



10.º ANO | ENSINO SECUNDÁRIO

Matemática A

INTRODUÇÃO

1. Matemática Escolar Orientada para o Futuro

A formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de matemática para o ensino secundário. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, crescente digitalização, conectividade e automatização, e por uma aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar. Esse poder matemático deve ser parte integrante da educação de todos os cidadãos, incluindo conhecimentos e capacidades que os jovens transportarão para a sua vida pessoal, social e profissional.

Empreender uma formação matemática abrangente e inovadora, neste ciclo de escolaridade, significa desenvolver nos alunos a capacidade de identificar conceitos matemáticos relevantes para resolver problemas reais, aplicar procedimentos matemáticos

adequados e interpretar os resultados em contextos diversos. O raciocínio matemático está na base dos processos de compreensão dos conceitos e objetos matemáticos, que podem e devem ser analisados, representados e relacionados de diferentes formas. São igualmente importantes a formulação de hipóteses, a testagem de conjeturas, a dedução, a generalização e a abstração, na construção de argumentos lógicos e conclusões, cuja comunicação de forma apropriada é cada vez mais importante no mundo atual.

O currículo consagra o propósito de preparar os alunos para formularem juízos e tomarem decisões fundamentadas, contribuindo para que se tornem cidadãos reflexivos, empenhados e participativos. Visa também contribuir para que os jovens valorizem o papel da Matemática no mundo e o seu carácter de ciência em evolução e renovação permanente, apreciando a sua dimensão estética, a par do seu legado histórico.

Assim, o currículo de Matemática para o futuro orienta-se para o desenvolvimento de áreas de competências, à luz do que é preconizado no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, nomeadamente no que se refere ao pensamento crítico aliado à resolução de problemas, promovendo a criatividade e a comunicação, além de acentuar a pertinência do trabalho colaborativo.

2. Ideias Inovadoras do Currículo

- Matemática para a Cidadania

O reconhecimento do Ensino Secundário como um ciclo que é parte integrante da formação geral dos jovens, incluído na escolaridade obrigatória, cria um contexto em que todas as disciplinas, incluindo a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos ativos, conscientes, informados e interventivos.

A crescente relevância do papel da Matemática na sociedade atual realça a importância e a necessidade de dotar os alunos de ferramentas de análise dos processos sociais, que estão na base do exercício de uma cidadania ativa. Assim, as Aprendizagens Essenciais introduzem modelos e processos eleitorais e a análise de modelos financeiros e valorizam o desenvolvimento da literacia estatística.

- Pensamento Computacional

Os aspetos comuns entre o Pensamento Matemático e o Pensamento Computacional, bem como a relevância atual do Pensamento Computacional na ciência e na sociedade, justificam que o currículo de Matemática valorize esta abordagem conceptual na resolução de problemas. As Aprendizagens Essenciais de Matemática promovem o desenvolvimento de práticas

como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, bem como a aquisição de hábitos de depuração e optimização dos processos envolvidos na atividade matemática. Deste modo, a aposta no Pensamento Computacional revela a aproximação do currículo às recomendações internacionais e também o alinhamento com o currículo de Matemática do Ensino Básico, favorecendo o desenvolvimento desta competência de forma integrada, coerente e progressiva.

- Diversificação de temas no currículo

Para além do desenvolvimento de competências dos alunos no âmbito da cidadania, pretende-se disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com os métodos numéricos, o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia, e a inclusão de temas com pouca tradição no Ensino Secundário em Portugal. Esta diversificação é intensificada no 12.º ano com a proposta de três temas em opção, possibilitando que turmas diferentes trabalhem temas matemáticos diferentes.

- Matemática para todos

Assume-se que o currículo na escolaridade obrigatória deve dar resposta a todos os alunos tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos. Os formalismos e os níveis de abstração excessivos deverão ser evitados. Pretende-se que a matemática seja um contributo na resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias.

3. Ideias-Chave das Aprendizagens Essenciais

As Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Secundário dão continuidade às aprendizagens do Ensino Básico e assumem um conjunto de princípios e orientações metodológicas, cuja concretização e especificação é feita para cada ano de escolaridade e tema matemático. A seguir, enunciam-se e apresentam-se as oito ideias-chave preconizadas nas Aprendizagens Essenciais, esquematizadas na Figura 1:

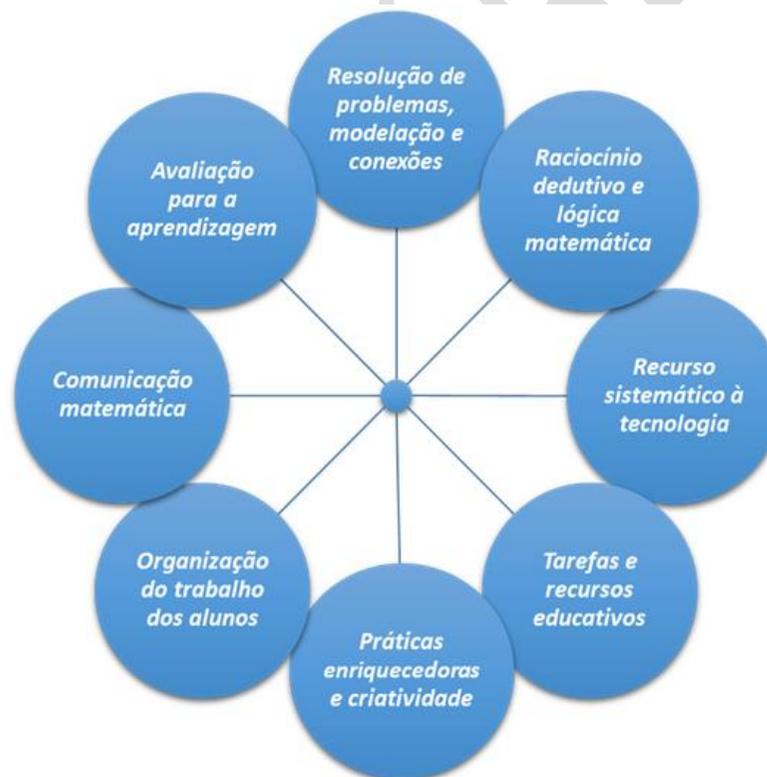


Figura 1 - Ideias-Chave das Aprendizagens Essenciais

1) Resolução de problemas, modelação e conexões

Dar sentido à Matemática e enfatizar a modelação e as aplicações

A resolução de problemas, tal como a modelação, devem constituir o contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da Matemática, assim como entre a Matemática e outras áreas do saber, permitindo uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática. É fundamental que os alunos tenham contacto com o processo de modelação matemática e sejam capazes de criticar, validar e aperfeiçoar modelos matemáticos. Preconizando a exploração de ideias e conceitos matemáticos, pretende-se que a aprendizagem não se reduza à memorização de regras, ao treino de procedimentos ou à sua execução sem compreensão. É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia-a-dia ou de outras disciplinas. Uma das áreas de competências no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, fortemente ligada à Matemática - Raciocínio e a Resolução de Problemas - implica que os alunos sejam capazes de: i) interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; ii) gerir informações e tomar decisões; iii) desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento, usando recursos diversificados.

2) Raciocínio dedutivo e lógica matemática

Incentivar processos de raciocínio dedutivo, integrando a lógica matemática nos diversos temas

O aluno deve ser sistematicamente incentivado a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios e a formular e validar conjecturas. Os conceitos e métodos relativos à lógica matemática não constituem um tema específico das Aprendizagens Essenciais, mas devem, de forma natural, ser integrados nos vários temas abordados. Noções elementares de Lógica podem e devem ser introduzidas à medida que forem relevantes para a clarificação de processos e de raciocínios. Pretende-se, assim, que o aluno adquira a capacidade de raciocinar dedutivamente e de forma autónoma, usando os princípios e a simbologia inerentes à lógica matemática. A integração do raciocínio dedutivo e da lógica, bem como da linguagem matemática e simbólica, deve estar presente em todos os momentos de aprendizagem, sem se transformar num conteúdo tratado de forma isolada. O grau de formalização a utilizar deve ter sempre em conta o nível de maturidade matemática dos alunos e deve surgir, se possível, como uma necessidade, garantindo que o processo de formalização acompanha a apropriação dos conceitos. Diversos temas, como, por exemplo, Geometria, Funções e Probabilidade, em contexto de resolução de

problemas, podem constituir-se como excelentes oportunidades para desenvolver o raciocínio dedutivo, no qual se inclui a utilização de linguagem e de notações adequadas.

3) Recurso sistemático à tecnologia

Incentivar a exploração de ideias e conceitos, integrando a tecnologia como alavanca para a compreensão e resolução de problemas.

A abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos apresenta-se como determinante, o que pressupõe levar o aluno a participar ativamente num processo de construção e aprofundamento, motivado por questões desafiadoras, problemas e procura de justificações. A integração da tecnologia é considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico. O recurso à folha de cálculo, a ambientes de geometria dinâmica, a aplicativos digitais diversos, a simulações, a *smartphones*, à calculadora gráfica e sensores, bem como a outros equipamentos e materiais, deve ser feito de forma sistemática. As atividades de programação devem ser integradas com uma complexidade progressiva, sendo relevantes para o desenvolvimento de processos algorítmicos, de um pensamento estruturado e do raciocínio lógico, proporcionando um vasto campo de aplicação da Matemática e envolvendo genuinamente a formulação e a resolução de problemas, além de promover o desenvolvimento do pensamento computacional.

4) Tarefas e recursos educativos

Apoiar a aprendizagem em tarefas poderosas, contextos e recursos diversificados

A construção de tarefas de aprendizagem constitui uma das ações decisivas do professor. Uma tarefa matemática poderosa pode ser um problema, uma questão, um exercício, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento, sempre que observe os seguintes critérios: ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos alunos e apoiar o seu progresso. As tarefas devem ser, ainda, diversificadas e ajustadas aos objetivos de aprendizagem e a sua planificação deve prever diferentes tipos de organização do trabalho dos alunos. A utilização de recursos variados, nomeadamente da tecnologia, bem como a diversificação de contextos de aprendizagem, incluindo laboratórios, espaços fora da sala de aula, museus de ciência e outros, deverão merecer especial atenção na construção de tarefas. O recurso a episódios e problemas marcantes da História da Matemática deve motivar pesquisas, estudos ou debates, não de caráter enciclopédico, mas contribuindo para que o progresso da Matemática seja apreciado e compreendido. Para além do seu valor intrínseco, enquanto património cultural

que importa valorizar, existem numerosos factos, aspetos particulares e episódios da História da Matemática que, pelo seu potencial pedagógico, devem ser explorados.

5) Práticas enriquecedoras e criatividade

Inovar e investir em práticas enriquecedoras, favorecendo o desenvolvimento da criatividade e atitudes positivas face à Matemática

O currículo integra propostas inovadoras, que incluem a realização de projetos, de fôlego e extensão ajustados às condições existentes e aos alunos. É igualmente recomendado que os alunos se envolvam na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade (nomeadamente, numa perspetiva integradora de STEAM - ciências, tecnologia, engenharia, artes e matemática). A programação, tal como a modelação ou o trabalho de projeto, abrem inúmeras vias de trabalho promissoras que não devem ser ignoradas. Também a beleza da Matemática, a sua aplicabilidade e a história fascinante que a envolve são fortes motivos para inovar através de práticas de enriquecimento das aprendizagens. É importante que os alunos experimentem o prazer da descoberta em Matemática e que desenvolvam o gosto pelo desafio, pela procura de soluções e pela sua comunicação. Dar aos alunos oportunidades de aprenderem matemática significativa contribui para que desenvolvam atitudes positivas em relação à disciplina. Estimular a curiosidade, o interesse, a motivação e a criatividade é essencial para que reconheçam a importância da Matemática na sua formação pessoal e académica e adquiram autoconfiança, sentindo-se capazes de raciocinar e comunicar matematicamente. O contexto sócio-emocional que permeia a aprendizagem da Matemática tem grande influência sobre a imagem que os jovens constroem da disciplina, sendo determinante na formação de cidadãos críticos, reflexivos, que se sintam capazes de tomar decisões e de formular e resolver problemas de formas criativas e profícuas.

6) Organização do trabalho dos alunos

Valorizar o trabalho colaborativo num ambiente de entreajuda e corresponsabilização, cultivando comunidades de aprendizagem

A valorização do trabalho colaborativo é assumida enquanto estratégia de aprendizagem e enquanto competência a desenvolver nos jovens na sociedade atual. A colaboração é especialmente indicada em tarefas nas quais os alunos possam discutir e definir abordagens e processos de resolução, confrontar ideias e contribuir para um objetivo comum. É também uma forma de trabalho em que os alunos se devem apoiar mutuamente, envolvendo-se em processos matemáticos, argumentação e comunicação, valorizando as competências individuais de cada um. Assim, o trabalho em pares e em pequenos grupos é

adequado em múltiplas situações de aprendizagem, desde a realização de tarefas curtas, passando por situações que envolvem pesquisa, recolha de dados, modelação, até ao desenvolvimento de projetos.

7) Comunicação matemática

Comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado

A comunicação matemática, a par do raciocínio e do pensamento crítico, está presente quando os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos. Importa pôr em prática diversos tipos de comunicação, dando espaço às discussões coletivas e em pequenos grupos, apresentações orais e/ou escritas, elaboração de relatórios e composições, publicações e exposições, que são essenciais no processo de desenvolvimento de conceitos ou processos matemáticos. A simbologia constitui um sistema de representação matemática robusto que deve ser relacionado com outros modos de representação, tendo em vista a sua utilização oportuna, nomeadamente no âmbito da comunicação matemática. A formalização de conceitos e resultados matemáticos é uma etapa importante da aprendizagem que não se alcança por meio do excesso de manipulação simbólica ou pela prática de artifícios de cálculo demasiadamente técnicos.

8) Avaliação para a aprendizagem

Privilegiar a avaliação formativa na regulação do processo de aprendizagem

A abordagem exploratória que se privilegia implica a integração da avaliação no processo de aprendizagem. É necessário que a avaliação seja um processo, e não um fim, e que esteja ao serviço da aprendizagem dos alunos, de modo a favorecê-la. A diversificação de formas e instrumentos de avaliação é uma das práticas de avaliação recomendadas. Constituem boas tarefas de avaliação formativa as resoluções detalhadas de tarefas, os relatórios e os cartazes. A produção de documentos de natureza audiovisual é igualmente válida e apelativa, designadamente sob a forma de pequenos vídeos, criação de páginas e blogs, tirando partido de ferramentas digitais. As partilhas de ideias e conclusões em sala de aula, bem como as apresentações orais, constituem boas oportunidades para monitorizar e acompanhar o desenvolvimento das aprendizagens e identificar dificuldades e obstáculos.

4. Operacionalização das Aprendizagens Essenciais

A disciplina de Matemática assume um papel estruturante nos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. As Aprendizagens Essenciais do 10.º ano integram uma vertente de formação matemática para a cidadania, em consonância com as restantes disciplinas de Matemática do Ensino Secundário. Esta vertente é concretizada nos temas de Eleições e Partilha, Literacia Financeira e Estatística. Para além destes temas, no 10.º ano, os alunos estudam Geometria e Funções numa lógica de ampliar e aprofundar as abordagens do Ensino Básico.

No 11.º ano as Aprendizagens Essenciais integram Geometria, Funções e Matemática Discreta. Na lecionação da Geometria inclui-se geometria analítica e vetorial e trigonometria. A abordagem das funções reais considerará sempre estudos dos diferentes pontos de vista: gráfico, numérico e algébrico. Na Matemática Discreta estudam-se técnicas de contagem e sucessões.

No 12.º ano são aprofundados os temas Funções e Probabilidade. A finalizar as Aprendizagens Essenciais do 12º ano são propostos três temas em alternativa: Inferência Estatística, Primitivas Imediatas e Integrais Definidos e Matrizes. Destes temas apenas um deles será escolhido por cada escola, ou mesmo para cada turma.

O trabalho de projeto assume uma dimensão relevante, surgindo explicitamente no 10.º ano, no tema de Literacia Financeira e no 11.º ano no tópico de Sucessões, mas poderá ser também uma proposta de trabalho em qualquer tema que o professor considere adequado.

As Aprendizagens Essenciais relativas à Matemática A dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas concretizam-se em três documentos distintos. A organização das Aprendizagens Essenciais, que a seguir se detalha, é apresentada em quatro áreas:

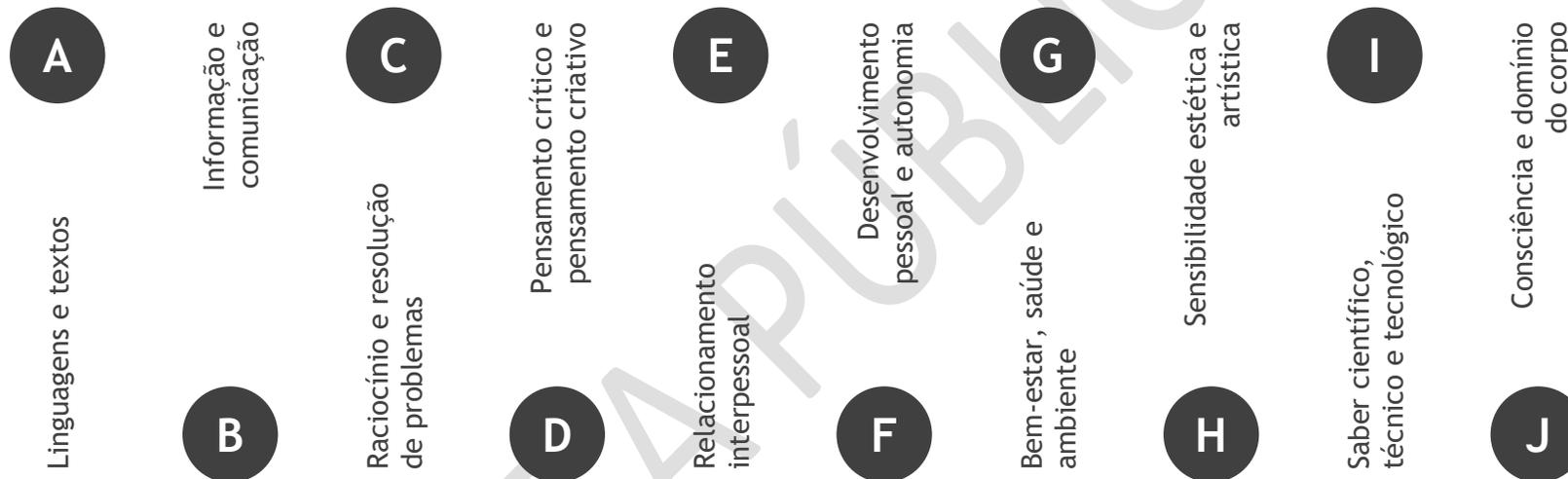
- *Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos*, em que são identificados os conceitos Matemáticos a abordar.
- *Objetivos de aprendizagem: conhecimentos, capacidades e atitudes que o aluno deve revelar*, em que são concretizadas, para cada tópico matemático, as aprendizagens visadas com a indicação do foco e da especificação preconizada.
- *Ações estratégicas de ensino do professor*, onde é clarificado o papel do professor e as indicações metodológicas que são consideradas adequadas para a obtenção dos objetivos de aprendizagem definidos, bem como a sugestão de exemplos para a concretização das atividades a propor aos alunos.

-
- *Áreas de competência do perfil dos alunos*, em que é estabelecida uma ligação entre as aprendizagens matemáticas visadas, as indicações metodológicas e as competências, capacidades e atitudes definidas no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*.

Quando nas Aprendizagens Essenciais se refere recurso a tecnologia gráfica, deve entender-se a utilização de folhas de cálculo ou qualquer versão de calculadora gráfica, física ou sob a forma de emulador, inclusive com Cálculo Algébrico Simbólico (CAS), bem como o uso do Geogebra ou outro Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD), nas suas diversas versões disponíveis em qualquer dispositivo digital. Considera-se também o recurso a aplicativos digitais específicos (apliquetas), disponíveis na internet ou em fóruns temáticos.

Para cada tema são incluídas notas clarificadoras, nomeadamente no que se refere à sugestão de: atividades para o desenvolvimento do Pensamento Computacional, com recurso a exemplos; propostas de possíveis aprofundamentos de alguns temas ou de abordagens alternativas; referências bibliográficas que incluem documentos e recursos para apoio ao trabalho do professor.

ÁREAS DE
COMPETÊNCIAS
DO PERFIL DOS
ALUNOS (ACPA)



OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p>ELEIÇÕES E PARTILHA</p> <p>Teoria Matemática das Eleições</p> <p>Majoria simples</p> <p>Majoria absoluta</p> <p>Método de Borda</p>	<p>Saber identificar o vencedor de um processo eleitoral através de maioria simples e maioria absoluta.</p> <p>Saber identificar o vencedor de processos eleitorais que recorram a boletins de preferência (método de Borda).</p>	<p>Contribuir para a clarificação da importância da participação de cada cidadão na eleição dos seus representantes (delegado de turma, associação de estudantes, estruturas sindicais e poderes políticos).</p> <p>Promover a análise, a interpretação e a discussão do sistema eleitoral para a Presidência da República, valorizando a relevância da segunda volta, nomeadamente com a referência à eleição presidencial de 1986.</p> <p>Propor a construção de um programa simples em Python (de iniciação à linguagem) que permita determinar o número de votos que garante a maioria absoluta, sendo inseridas as votações em 3 candidatos.</p> <p>Propor a análise de situações que evidenciem claramente o facto de métodos eleitorais diferentes gerarem escolhas diferentes para a mesma votação, recorrendo a contextos eleitorais concretos, como por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - eleição do delegado de turma; - eleição para a Associação de Estudantes; - eleições para os órgãos sociais de clubes desportivos. <p>Referir que todos os métodos eleitorais têm limitações, nomeadamente, encorajar o debate de situações em que existe e em que não existe transitividade das escolhas.</p>	<p>Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avaliando, validando e organizando a informação recolhida (B)</p> <p>Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C)</p>

<p>Teoria da partilha</p> <p>Método de Hondt</p> <p>Método de St. Laguë</p>	<p>Conhecer e aplicar o método de Hondt e o método de St. Laguë.</p> <p>Identificar vantagens e limitações dos métodos de Hondt e St. Laguë.</p>	<p>Analisar com os alunos os contextos eleitorais das eleições autárquicas e das eleições para a Assembleia da República, suscitando a compreensão da necessidade de um método de partilha proporcional.</p> <p>Incentivar os alunos a confirmar o processo da distribuição de mandatos num organismo local (eleições com um número reduzido de mandatos - até 6 mandatos).</p> <p>Promover a exploração, com recurso à tecnologia gráfica (folha de cálculo), de distribuições de mandatos em cenários nacionais (eleições com um número elevado de mandatos, por exemplo, distribuição de mandatos por círculo eleitoral).</p> <p>Propor a análise de situações concretas que evidenciem claramente que métodos de partilha diferentes geram distribuições diferentes para a mesma eleição, por exemplo as eleições europeias de 1987.</p>	<p>Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)</p>
--	--	--	--

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e estabelecer a ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem Python, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em Python que permite determinar o número de votos que garante a maioria absoluta, sendo inseridas as votações de 3 candidatos.

```
cA=int(input("N.º de votos do candidato A:"))
cB=int(input("N.º de votos do candidato B:"))
cC=int(input("N.º de votos do candidato C:"))
ma=int((cA+cB+cC)/2)+1
print(ma)
```

A conclusão é que para obter maioria absoluta são precisos **ma** votos. Algum dos candidatos ultrapassou esse valor? Podem ser trabalhadas simulações, procurando por exemplo o número mínimo e máximo de votos para um partido obter um número predeterminado de lugares (por exemplo, todos os mandatos serem atribuídos ao mesmo partido). Uma simulação do método de Hondt pode ser encontrada em: <https://www.sg.mai.gov.pt/AdministracaoEleitoral/MetodoHondt/Paginas/default.aspx>

Numa possível extensão a este programa poderá ser verificado se algum dos candidatos obteve maioria absoluta. Exemplo de programa em Python que permite, sendo inseridas as votações de 3 candidatos, determinar o número de votos que garante a maioria absoluta e verificar se algum dos candidatos obteve essa maioria.

```
cA=int(input("N.º de votos do candidato A:"))
cB=int(input("N.º de votos do candidato B:"))
cC=int(input("N.º de votos do candidato C:"))
ma=int((cA+cB+cC)/2)+1
print("Serão necessários pelo menos",ma,"votos para obter maioria absoluta.")
if cA>=ma:
    print("O candidato A obteve maioria absoluta com",cA,"votos.")
elif cB>=ma:
    print("O candidato B obteve maioria absoluta com",cB,"votos.")
elif cC>=ma:
    print("O candidato C obteve maioria absoluta com",cC,"votos.")
else:
    print("Nenhum dos candidatos obteve maioria absoluta.")
```

Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.9.1 para computador.

Possíveis aprofundamentos

Se for possível e oportuno, poderão ser abordados outros métodos eleitorais como, por exemplo, o método de Condorcet e a sua alegada proposta (em 1888) de um método eleitoral superior a todos os outros.

O estudo e comparação de diferentes métodos eleitorais são temas adequados para trabalhos de projeto.

Exemplo de um caso interessante a estudar: a mudança do uso de maioria simples para a maioria absoluta ao longo dos anos na Ordem dos Médicos e na Ordem dos Advogados.

Também pode ser feita a comparação com o método usado nas eleições para a Ordem dos Enfermeiros em que a lista vencedora é a que obtiver mais votos, sem exigência de maioria absoluta (e só com uma volta). Neste último caso pode ser consultada a página

<https://www.ordemenfermeiros.pt/arquivo/comunicacao/Paginas/ProclamacaoEleicoes> onde se encontra a proclamação dos resultados definitivos das Eleições de 12 de dezembro de 2011.

Bibliografia de referência

Carvalho e Silva, J. (2014). Um planeta organizado por humanos: os sistemas eleitorais. *Educação & Matemática*, nº 128, p. 17-18.

Chalub, F. (2019). *O ano de todas as eleições*. *Gazeta de Matemática*, nº 188, p. 9-11.

CNE, *Eleições / Referendos*. Obtido de: <https://www.cne.pt/content/eleicoes-referendos>

CNE, *Método de Hondt*. Obtido de <https://www.cne.pt/content/metodo-de-hondt>

COMAP (2016). *For all Practical Purposes - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

Feiteira, R. (2007). O que têm em comum a eleição de um delegado de turma e as eleições legislativas? *Gazeta de Matemática*, nº 152, p. 32-37.

Feiteira, R. (2008). Alguns métodos eleitorais através do Excel, *Educação & Matemática*, nº 96, p. 29-33.

Lopes, A. V. & Moreirinha, O. (2004). Materiais para a Aula de Matemática - Métodos de apoio à decisão: Plínio, o jovem. *Educação & Matemática*, nº 79, p. 25.

Lopes, A. V. et al. (2002). Materiais para a aula de Matemática - Eleições para a Presidência da República -1986. *Educação & Matemática*, nº 67, p. 34-35.

Malkevitch, J. (1999). *Teoria Matemática das Eleições*. COMAP (tradução portuguesa da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>

CONSULTA PÚBLICA

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p>ESTATÍSTICA</p> <p>Problema estatístico</p> <p>Variabilidade</p>	<p>Reconhecer o papel relevante desempenhado pela Estatística em todos os campos do conhecimento.</p> <p>Reconhecer a variabilidade como um conceito-chave de um problema estatístico.</p> <p>Conhecer e interpretar situações do mundo que nos rodeia em que a variabilidade está presente.</p>	<p>Promover a discussão na turma para identificar e formular questões estatísticas, cujas respostas dependam da recolha de dados.</p> <p>Propor a discussão de situações do mundo real envolvente em que a variabilidade está presente. Por exemplo, o político questiona se valerá a pena candidatar-se às próximas eleições autárquicas para o seu concelho; o diretor de um agrupamento escolar questiona a percentagem de alunos que almoçam diariamente na escola; o padeiro questiona quantos pães deve fazer por dia; o gerente de uma fábrica têxtil questiona qual o tamanho das camisas em que deverá investir.</p>	<p>Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B)</p>
<p>População e amostra</p> <p>Fases de um procedimento estatístico:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Produção ou aquisição de dados; - Organização e representação de dados; 	<p>Identificar num estudo estatístico, população, amostra e característica a estudar.</p> <p>Reconhecer que os termos população e amostra se referem a conjuntos de unidades estatísticas, mas que estes termos também são usados para identificar os conjuntos de valores assumidos pela característica em estudo.</p> <p>Refletir sobre o propósito de efetuar estudos que envolvam a variabilidade e sobre os métodos existentes para a seleção de amostras, no sentido de que estas sejam representativas das populações subjacentes, e de modo a evitar amostras enviesadas cujo estudo levaria a inferir conclusões erradas para as populações.</p>	<p>Propor a recolha de informação nos jornais ou internet sobre notícias que permitam:</p> <ul style="list-style-type: none"> - diferenciar os processos de recenseamento e sondagem (recolher dados sobre a população ou amostra); - identificar exemplos de amostras enviesadas, nomeadamente amostras por conveniência e por resposta voluntária. <p>Alertar para a necessidade de recolha de dados reais, como forma de responder a questões concretas.</p> <p>Informar que o grau de confiança é quantificado em termos de probabilidade, exemplificando com a forma como se transmite o resultado de uma sondagem.</p>	<p>Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)</p>

<p>- Interpretação tendo por base as representações obtidas</p>	<p>Intuir que os problemas estatísticos em que se recorre a amostras não têm uma solução matemática única que se possa exprimir como <i>verdadeiro</i> ou <i>falso</i>, mas em termos de grau de confiança.</p>		
<p>Estatística descritiva</p> <p>Dados univariados</p> <p>Dados quantitativos discretos ou contínuos</p> <p>Tabelas de frequências</p> <p>Gráfico de barras</p> <p>Histograma e função cumulativa</p> <p>Diagrama de caule-e-folhas</p> <p>Diagrama de extremos-e-quartis</p>	<p>Distinguir entre dados quantitativos discretos (obtidos por contagem) ou contínuos (obtidos por medição).</p> <p>Organizar e representar a informação contida em dados quantitativos discretos e contínuos.</p> <p>Saber organizar dados quantitativos em tabelas de frequências absolutas, absolutas acumuladas, relativas e relativas acumuladas e interpretá-las.</p> <p>Selecionar representações gráficas adequadas para cada tipo de dados identificando vantagens/inconvenientes.</p> <p>Reconhecer que o histograma é um diagrama de áreas, e que para a sua construção é necessário uma organização prévia dos dados em classes na forma de intervalos.</p> <p>Saber construir histogramas, considerando classes com a mesma amplitude.</p> <p>Saber construir diagramas de caule-e-folhas e diagramas de extremos e quartis</p>	<p>Salientar que a natureza dos dados não é uma característica inerente à variável em estudo, porque pode depender da forma como é medida. Exemplificar com a variável Idade que é de tipo contínuo e que pode ser utilizada de forma discreta (10, 15, 23,...), uma peça de roupa, cujo tamanho é uma variável contínua, mas é frequentemente classificada em categorias (XS, S, M, L, XL, ...).</p> <p>Promover a utilização da tecnologia gráfica para construir tabelas e gráficos.</p> <p>Realçar a utilidade do diagrama de caule-e-folhas para uma ordenação rápida dos dados.</p> <p>Salientar que o aspecto do histograma depende do número de classes considerado da amplitude de classe e do ponto onde se começa a considerar a construção da primeira classe (discutir com os alunos o que se entende por um número adequado de classes, chamando a atenção para que uma representação com muitas classes apresentará muita da variabilidade presente nos dados, não conseguindo fazer sobressair o padrão que se procura, enquanto que um número muito pequeno de classes esconderá esse padrão).</p> <p>Salientar a importância do gráfico de barras e do histograma para uma posterior seleção do modelo da população subjacente à amostra.</p>	<p>Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D)</p> <p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)</p>

<p>Medidas de localização</p>	<p>Interpretar as medidas de localização, média, mediana, moda(s) e percentis (quartis como caso especial) na caracterização da distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas.</p>	<p>Propor a elaboração de um programa simples em Python que permita recolher as idades de, por exemplo, 5 alunos de uma turma na disciplina de Matemática, organizá-las sob a forma de uma lista, retornando a média, a mediana, o máximo e o mínimo.</p>	
<p>Medidas de dispersão</p>	<p>Interpretar as medidas de dispersão, amplitude, amplitude interquartil e desvio padrão amostral (variância amostral) na caracterização da distribuição dos dados, relacionando-as com as representações gráficas obtidas.</p>	<p>Incentivar a utilização da tecnologia gráfica para o cálculo das diversas medidas, em particular quando a dimensão da amostra é razoavelmente grande, não negligenciando antecipadamente o cálculo dessas medidas usando papel e lápis para amostras de dimensão reduzida.</p>	<p>Trabalha com recurso a equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>
<p>Propriedades das medidas</p>	<p>Interpretar e mostrar analiticamente as alterações provocadas na média por transformação dos dados pela multiplicação de cada um por uma constante “a” e pela adição de uma constante “b”.</p> <p>Compreender os conceitos e as seguintes propriedades das medidas:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Pouca resistência da média e do desvio padrão; - Soma dos desvios dos dados relativamente à média é igual a zero; - Desvio padrão é igual a zero se e só se todos os dados forem iguais; - Amplitude interquartil igual a zero, não implica a não existência de variabilidade; <p>Saber que se os dados forem fornecidos já agrupados em classes, na forma de intervalos, torna-se necessário adequar as fórmulas ou os procedimentos existentes para dados não agrupados, para obter valores aproximados da média e do desvio padrão.</p> <p>Reconhecer que existem situações em que é preferível utilizar como medida de localização a mediana em vez da média, e como medida de dispersão a amplitude interquartil em vez do desvio padrão, apresentando exemplos simples.</p>	<p>Promover a utilização da tecnologia gráfica para explorar as propriedades das medidas, nomeadamente as alterações provocadas nas medidas de localização e dispersão por transformação dos dados pela multiplicação de cada um por uma constante “a” e pela adição de uma constante “b”.</p> <p>Incentivar os alunos a interpretar os conceitos e as propriedades das medidas, privilegiando a sua compreensão, em detrimento do uso de fórmulas e de procedimentos para as calcular. Por exemplo, depois de compreender o conceito de percentil, utilizar a função cumulativa ou as tabelas de frequências relativas acumuladas para calcular valores aproximados.</p> <p>Promover a utilização da tecnologia gráfica para determinar os percentis, e exemplificar a sua utilização com as tabelas de crescimento da DGS (aqui), relacionando o “peso” e a “estatura” com a “idade”.</p> <p>Promover a elaboração de um programa em Python para permitir o cálculo da amplitude e do desvio padrão e estudar as propriedades dessas medidas, efetuando alterações nos dados.</p>	

	<p>Reconhecer que algumas representações gráficas são mais adequadas que outras para comparar conjuntos de dados, nomeadamente o diagrama de extremos e quartis, para comparar a distribuição de dois ou mais conjuntos de dados, realçando aspetos de simetria, dispersão, concentração, etc.</p>	<p>Conduzir os alunos na interpretação das representações gráficas e das medidas, no contexto do problema, que levou à recolha dos dados.</p>	
<p>Dados bivariados</p> <p>Dados quantitativos</p> <p>Diagrama de dispersão</p> <p>Coefficiente de correlação linear</p> <p>Reta de regressão - variável independente ou explanatória - variável dependente ou resposta.</p>	<p>Reconhecer que, para estudar a associação entre duas variáveis numéricas de uma população, se observam essas variáveis sobre cada unidade estatística, obtendo-se pares de dados.</p> <p>Reconhecer a importância da representação dos dados no diagrama de dispersão, nuvem de pontos, antes de se proceder ao cálculo do coeficiente de correlação linear e à determinação de uma equação da reta de regressão, utilizando a tecnologia gráfica. Compreender que a existência de <i>outliers</i> influencia estes procedimentos.</p> <p>Compreender que na construção da reta de regressão não é indiferente qual das variáveis é que se considera como variável independente ou <i>explanatória</i>.</p> <p>Utilizar a reta de regressão para inferir o valor da variável dependente para um dado valor da variável independente, quando existe uma forte associação linear entre as variáveis, quer positiva, quer negativa, e desde que este esteja no domínio dos dados considerados.</p> <p>Saber que a correlação linear só mede a associação linear entre as variáveis, já que o coeficiente de correlação pode ser próximo de zero e as variáveis estarem fortemente correlacionadas, não linearmente.</p>	<p>Conduzir os alunos a explorar situações em que tenha interesse estudar a associação entre duas variáveis sobre as mesmas unidades estatísticas.</p> <p>Envolver os alunos na discussão sobre a construção do diagrama de dispersão, em especial na identificação da variável independente ou explanatória. Por exemplo, pretendendo-se estudar a associação entre as variáveis “idade” e “altura”, a variável independente deverá ser a “idade” e a variável “altura” a variável dependente.</p> <p>Realçar que só no caso de se visualizar uma associação aproximadamente linear entre os pontos do diagrama de dispersão é que tem sentido utilizar a calculadora para calcular o coeficiente de correlação, bem como construir a reta de regressão.</p> <p>Propor a construção da reta de regressão, recorrendo à tecnologia gráfica e explorar a forma como é afetada por <i>outliers</i>.</p> <p>Explorar o modelo da reta de regressão no contexto do estudo, nomeadamente inferindo valores da variável resposta para determinados valores para a variável explanatória.</p>	

<p>Gráfico de linhas</p> <p>Dados qualitativos</p> <p>Tabelas de contingência</p>	<p>Compreender que não se pode confundir correlação com relação causa-efeito, pois podem existir variáveis “perturbadoras” que provocam uma aparente associação entre as variáveis em estudo.</p> <p>Entender que um gráfico de linhas é um diagrama de dispersão, em que, de um modo geral, se pretende estudar a evolução de uma variável ao longo da variável tempo e em que se unem os pontos representados por linhas.</p> <p>Reconhecer que a associação entre duas variáveis qualitativas não pode ser feita utilizando o diagrama de dispersão e a correlação.</p> <p>Utilizar tabelas de contingência (dupla entrada) para obter a distribuição conjunta, assim como as distribuições condicionais em termos de percentagens.</p>	<p>Propor a pesquisa na internet de situações em que existem variáveis “perturbadoras”.</p> <p>Promover a exploração de alguns exemplos concretos de gráficos de linhas, como a evolução da temperatura medida numa determinada hora, ao longo de um mês, em determinado local.</p> <p>Chamar a atenção para um fenómeno, que se pode verificar quando se procede ao estudo da associação de variáveis, denominado por “paradoxo de Simpson” e que pode ser objeto de estudo de alguns alunos, pesquisando na internet.</p> <p>Propor a utilização dos diagramas de barras por segmentos, para mostrar as distribuições condicionais em termos de percentagem.</p>	
--	--	--	--

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e estabelecer a ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem Python, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em Python que permite recolher as idades de, por exemplo, 5 alunos de uma turma na disciplina de Matemática, organizá-los sob a forma de uma lista, retornando a média, a mediana, o máximo e o mínimo:

```
import statistics
print('Escreva as idades de 5 alunos')
idades=[]
for i in range(1,5):
    x = int(input('?'))
    idades=idades+[x]
idades.sort()
print('Idades:',idades)
```

```
print('Media:', statistics.mean(idades))
print('Mediana:', statistics.median(idades))
print('Máximo:', max(idades))
print('Mínimo:', min(idades))
```

Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.9.1 para computador.

Exemplo de programa em Python que permita recolher as idades de, por exemplo, 5 alunos de uma turma na disciplina de Matemática, organizá-los sob a forma de uma lista, retornando a média, a mediana, o desvio-padrão e a amplitude:

```
import statistics
n=int(input("Quantas disciplinas tens? "))
print("Escreve as tuas notas das disciplinas")
notas=[]
for i in range(0,n):
    x = int(input("?"))
    notas=notas+[x]
notas.sort()
print("Notas:", notas)
print("Media:", statistics.mean(notas))
print("Mediana:", statistics.median(notas))
print("Desvio-padrão:", statistics.stdev(notas))
print("Amplitude:", max(notas)-min(notas))
```

Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.9.1 para computador.

Possíveis aprofundamentos

Nada se sugere atendendo à variedade de temas tratados.

Bibliografia de referência

ActivAlea - *Associação entre variáveis quantitativas. O coeficiente de correlação*. Obtido de

http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=272&Itemid=1651&lang=pt

ActivAlea - *Associação entre variáveis qualitativas*. Obtido de

http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=270&Itemid=1653&lang=pt

COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

Correlações espúrias. Obtido de <http://tylervigen.com/spurious-correlations>.

Graça Martins, M. E. et al. (1997). *Estatística*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.

Graça Martins, M. E. & Cerveira, A. (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Universidade Aberta.

Graça Martins, M. E. & Loura, L. (2002). *Estatística, Modelos de Probabilidade e Introdução à Inferência Estatística* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa).
Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>

Graça Martins, M. E. (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

Grupo de trabalho T3. (1999). *Estatística e calculadoras gráficas*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

CONSULTA PÚBLICA

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p>Este tema será abordado através do desenvolvimento de projetos focados nos tópicos propostos. No contexto da turma, os alunos deverão ser organizados em vários grupos, cabendo a cada grupo eleger um problema concreto relacionado com um dos quatro tópicos previstos (Matemática nos salários, Matemática nos impostos, Matemática nos descontos e promoções, Matemática na poupança e no crédito), procurando que todos os tópicos sejam tratados e que os objetivos de aprendizagem sejam atingidos.</p>			
<p>LITERACIA FINANCEIRA</p> <p>Trabalho de projeto</p>	<p>Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados a instrumentos, produtos e riscos financeiros num problema contextualizado.</p> <p>Tomar decisões esclarecidas sobre questões financeiras, considerando o bem-estar financeiro dos indivíduos e da sociedade.</p> <p>Saber interpretar de forma crítica informação, modelos e processos financeiros.</p> <p>Conhecer e saber aplicar modelos presentes em diversas atividades do quotidiano, tirando partido da tecnologia.</p> <p>Efetuar simulações de situações reais que envolvam conceitos e modelos financeiros, nomeadamente através da construção de pequenos programas.</p> <p>Desenvolver hábitos de pesquisa.</p> <p>Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.</p>	<p>Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões).</p> <p>Considerar a pertinência e necessidade de usar recursos e tecnologia.</p> <p>Considerar a pertinência e necessidade de visitas técnicas e de consulta de peritos.</p> <p>Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório.</p> <p>Promover a divulgação, em grupo, dos trabalhos produzidos, podendo acontecer a sua apresentação na sala de aula ou alargando a outros espaços da escola e da comunidade.</p> <p>Estimular a discussão das ideias envolvidas no tema de cada trabalho de projeto.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</p> <p>Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avaliando, validando e organizando a informação recolhida (B)</p>

<p>Matemática nos salários</p> <p>Salário bruto e salário líquido</p> <p>Descontos</p>	<p>Reconhecer a diferença entre salário bruto e salário líquido.</p> <p>Interpretar um recibo de vencimento, identificando abonos e descontos.</p> <p>Identificar escalões de descontos.</p>	<p>Sugerir em grande grupo, ou nos grupos de trabalho de projeto:</p> <ul style="list-style-type: none"> - uma discussão que inclua a identificação de diferentes formas de referência aos rendimentos e dificuldades de comparação (ex: rendimento anual, salário, trabalhadores independentes); - a análise de exemplos autênticos relacionados com o processamento dos vencimentos (ex: analisando recibos); - a realização de simulações relacionadas com processamento de salários (em que sejam utilizados os conceitos de vencimento líquido, salário bruto, abonos e descontos), recorrendo, por exemplo, à folha de cálculo 	<p>Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C)</p>
<p>Matemática nos impostos</p>	<p>Conhecer e determinar o valor de alguns impostos sobre o consumo (IVA) e sobre o rendimento (IRS).</p> <p>Compreender o caráter provisório da taxa de retenção na fonte mensal (IRS).</p> <p>Identificar a progressividade do IRS e a relevância dos escalões.</p>	<p>Sugerir em grande grupo, ou nos grupos de trabalho de projeto:</p> <ul style="list-style-type: none"> - a comparação de preços de bens sem imposto, dado o preço ao consumidor e vice-versa, usando exemplos de produtos sujeitos a diferentes taxas de IVA; - a construção de programas para simular o cálculo de preços finais de produtos em função da sua taxa de IVA; - a determinação do valor do IVA a partir do preço final de um produto e da respetiva taxa; - pesquisas e análises das tabelas de IRS, os escalões aplicáveis e promover a discussão sobre a progressividade deste imposto. 	<p>Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D)</p>
<p>Matemática nos descontos e promoções</p>	<p>Usar o cálculo de percentagem para resolver problemas que envolvam o cálculo de descontos ou aumentos.</p> <p>Analisar criticamente campanhas de promoções de vendas.</p>	<p>Sugerir em grande grupo, ou nos grupos de trabalho de projeto:</p> <ul style="list-style-type: none"> - a recolha de informação em folhetos, jornais ou internet sobre campanhas e promoções de vendas (ex. descontos em cartão (vantagens e desvantagens; descontos de devolução do IVA); - a discussão do paradoxo dos saldos (impostos aplicados antes do saldo ou depois do saldo). 	<p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)</p>

<p>Matemática na poupança e no crédito</p> <p>Juros simples e juros compostos</p> <p>Decisões de contração de crédito ao consumo</p>	<p>Calcular juro simples e juro composto (com diferentes períodos de capitalização dos juros).</p> <p>Determinar o encargo total da aquisição de um bem/serviço a crédito.</p> <p>Saber analisar criticamente decisões de consumo a crédito.</p>	<p>Sugerir em grande grupo, ou nos grupos de trabalho de projeto:</p> <ul style="list-style-type: none"> -a exploração de exemplos de tipos de poupanças; cálculos simples de juros compostos; capitalização com várias periodicidades (folha de cálculo); - a recolha de informação em folhetos, jornais ou internet sobre divulgações de entidades que concedem empréstimos, de modo que os alunos se familiarizem com conceitos como: meios de pagamento, juros, poupança, empréstimos e amortizações; -a análise de uma compra em dois cenários (a pronto e a crédito) avaliando os custos da contratação do crédito e a comparação com o custo a pronto. 	<p>Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)</p>
---	--	--	--

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e estabelecer a ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem Python, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Podem propor-se vários tipos de programas em Python neste tema; por exemplo o cálculo do salário líquido sabendo a taxa de imposto a aplicar; ou um programa para simular o cálculo do preço de venda ao público de um produto em função do seu preço base e da sua taxa de IVA, ou em contrapartida, calcular o IVA a partir do preço final e da respetiva taxa.

Exemplo de programa em Python para calcular o preço de venda de um item a partir do seu preço base e da taxa de IVA:

```
p=float(input("Qual é o preço base do item? "))
iva=int(input("Qual é a taxa de IVA do item? (Introduza um dos valores: 6, 13 ou 23): "))
if iva==6 or iva==13 or iva==23:
    pf=p+p*iva/100
    print("O preço de venda com IVA incluído é",pf,"€")
else:
    print("Não existe uma taxa de IVA de",iva,"%")
```

Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.9.1 para computador.

Possíveis aprofundamentos

Poderão ser abordados outros temas de Literacia Financeira, como por exemplo a elaboração de orçamentos familiares para diferentes tipos de agregados familiares (para um casal, com ou sem filhos, para um solteiro, vivendo sozinho ou com outras pessoas, etc.). Pode ser igualmente sugerido como tema de Literacia Financeira a elaboração de um orçamento de uma viagem (visita de estudo, acampamento, etc.) Para os alunos de Ciências Sócio Económicas será recomendável que sejam fomentadas as conexões com assuntos e conceitos da disciplina de Economia.

Bibliografia de referência

- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: a experiência do projecto mat789*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: Associação de Professores de Matemática
- Amado, N. & Carreira, S. (2019). *Trabalho de Projeto*. Obtido de: <http://hdl.handle.net/10400.1/15482>
- Aspas, R. (2020). *Tipos de impostos: diretos e indiretos*. Obtido de <https://www.doutorfinancas.pt/financas-pessoais/impostos-em-portugal-diretos-e-indiretos/>
- Batista, A. S. (2014). *Matemática financeira. O valor do dinheiro ao longo do tempo*. Porto: Vida económica.
- Conselho Nacional de Supervisores Financeiros. (2016). *Plano Nacional de Formação Financeira 2016-2020*. Lisboa: Banco de Portugal.
- Domingos, A., Santiago, A., & Teixeira, P. (2017). Materiais para a Aula de Matemática - Perfis financeiros, *Educação & Matemática*, nº 142, p. 13-14.
- George Lucas Educational Foundation (2021). *Project-Based Learning (PBL)*. Obtido de: <https://www.edutopia.org/project-based-learning>.
- Gonçalves, D. (2019). *Quais os Impostos cobrados na compra de uma casa?* Obtido de <https://www.doutorfinancas.pt/creditos/credito-habitacao/quais-os-impostos-cobrados-na-compra-de-uma-casa/>
- Machado, H. A. (2011). *A literacia financeira da população escolar em Portugal. Estudo aplicado a alunos do ensino secundário da região de Lisboa*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Técnica de Lisboa.
- Mestre, A. P. (2011). *Histórias com matemática: trabalho de projecto no 2º ciclo do ensino básico*. (Dissertação de Mestrado). Obtido de: <http://hdl.handle.net/10400.1/6872>
- Ministério da Educação e Ciência (2013). *Referencial de Educação Financeira para a Educação Pré-Escolar, o Ensino Básico, o Ensino Secundário e a Educação e Formação de Adultos*, Obtido de: https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ficheiros/referencial_de_educacao_financeira_final-versao_port.pdf
- Nascimento, N. H. A. (2015). *Matemática e educação financeira: um estudo de caso do Ensino Secundário*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Nova de Lisboa. Obtido de <http://hdl.handle.net/10362/16356>
- Pinto, D. V. & Domingos, A. (2015). A Educação Financeira para uma eficaz contenção do consumo. In *Atas do 2º Seminário de Investigação em Educação Financeira Escolar e Educação Matemática*, (pp. 121). Lisboa: Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia; Unidade de Investigação e Desenvolvimento.
- Ponte, J. P., Brunheira, L., Abrantes, P., & Bastos, R. (1998). *Projetos Educativos: matemática - ensino secundário*. Ministério da Educação
- Pordata / RTP (2015). *O que é a dívida pública?* Obtido de <https://ensina.rtp.pt/artigo/o-que-e-a-divida-publica/>
- Pordata / RTP (2015). *O que são impostos diretos e indiretos?* Obtido de <https://ensina.rtp.pt/artigo/o-que-sao-impostos-diretos-e-indiretos/>
- Ribeiro, E. M. C. (2013). *Literacia Financeira. Estudo aplicado aos alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário*. (Dissertação de Mestrado). Universidade Portucalense Infante D. Henrique.
- Rodrigues, A. & Pimenta, C. (2017). Literacia financeira - construção do conhecimento matemático (uma experiência de ensino com alunos do 12º ano de escolaridade). *CIBEM 2017* (Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática) CB-219, p. 74-84. Madrid: Universidade Complutense.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p>GEOMETRIA</p> <p>Geometria sintética no plano</p> <p>Pontos notáveis do triângulo: - Incentro - Circuncentro - Ortocentro - Baricentro</p> <p>Circunferências inscritas e circunscritas</p> <p>Reta de Euler</p> <p>Circunferência dos nove pontos</p>	<p>Definir e caracterizar: - incentro e circunferência inscrita (com demonstração); - circuncentro e circunferência circunscrita (com demonstração); - ortocentro; - baricentro.</p> <p>Conhecer propriedades das medianas e do baricentro: - as três medianas dividem o triângulo em seis triângulos equivalentes (com demonstração); - a distância do baricentro a qualquer dos vértices é $\frac{2}{3}$ da mediana respetiva (com demonstração); - o baricentro é o centro de massa (gravidade, geométrico) de um triângulo.</p> <p>Localizar os pontos notáveis em triângulos equiláteros, isósceles e escalenos e em triângulos acutângulos, retângulos e obtusângulos.</p> <p>Verificar a existência da reta de Euler e da circunferência dos nove pontos.</p>	<p>Promover explorações e construções a realizar pelos alunos, envolvendo pontos notáveis do triângulo, usando geometria dinâmica, para resolver problemas, perceber os conceitos, fornecer suporte às demonstrações e verificar propriedades.</p> <p>Desenvolver nos alunos o gosto pela argumentação em geral e pela demonstração como elemento central da matemática.</p> <p>Propor a construção da reta de Euler e da circunferência dos nove pontos, usando geometria dinâmica, permitindo aos alunos a exploração de situações extremas da localização dos pontos notáveis, por exemplo: num triângulo equilátero os quatro pontos notáveis são coincidentes; num triângulo retângulo o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto; num triângulo obtusângulo o circuncentro é exterior ao triângulo.</p> <p>Exibir relações métricas entre os pontos notáveis, por exemplo: a distância do ortocentro ao baricentro é o dobro da distância do baricentro ao circuncentro; o centro da circunferência de nove pontos é o ponto médio do segmento definido pelo circuncentro e pelo ortocentro; o raio da circunferência de nove pontos é metade do raio da circunferência circunscrita.</p> <p>Propor a resolução de problemas com pontos notáveis do triângulo, envolvendo os alunos em investigações/explorações (em pequenos grupos), visando a elaboração de pequenos relatórios, composições, pósteres ou outros.</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</p> <p>Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância (B)</p> <p>Coloca e analisa questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir (C)</p>

<p>Geometria analítica no plano</p> <p>Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano.</p> <p>Coordenadas de pontos num referencial cartesiano</p> <p>Conjuntos de pontos e condições</p> <p>Lugares geométricos: mediatriz circunferência e círculo</p> <p>Vetores no plano</p> <p>Vetores livres no plano: - coordenadas de um vetor num referencial ortonormado - vetor como diferença de dois pontos</p>	<p>Identificar coordenadas de pontos do plano num referencial cartesiano , ortogonal e monométrico.</p> <p>Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas:</p> <ul style="list-style-type: none"> - simetrias de pontos, em relação a retas horizontais e verticais e à origem, através de coordenadas; - coordenadas do ponto médio de um segmento de reta; - fórmula da distância entre dois pontos; - condições que definem conjuntos de pontos: <ul style="list-style-type: none"> - mediatriz de um segmento de reta; - semiplanos; - circunferência e círculo; - outros conjuntos definidos por conjunções e disjunções, em casos simples. <p>Reconhecer, analisar e aplicar na resolução de problemas:</p> <ul style="list-style-type: none"> - norma de um vetor; - multiplicação de um vetor por um escalar e relação com a colinearidade de vetores e com o vetor simétrico; - diferença entre vetores; - propriedades algébricas das operações com vetores; 	<p>Promover o uso do Geogebra em explorações, por exemplo:</p> <ul style="list-style-type: none"> - procurar coordenadas de pontos simétricos em relação à origem, aos eixos coordenados e a retas paralelas aos eixos coordenados; - analisar condições que possam definir conjuntos de pontos e perceber como diferentes condições geram conjuntos de pontos diferentes (incluindo o conjunto vazio). <p>Propor problemas de modelação matemática, como por exemplo encontrar a melhor localização para propagadores de sinal de <i>Wifi</i> num local.</p> <p>Abordar a soma de vetores, a soma de um ponto com um vector e o produto de um escalar por um vector em contexto de resolução de problemas.</p> <p>Propor a dedução de propriedades de figuras geométricas usando vetores.</p>	<p>Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)</p>
--	---	--	--

<p>- colinearidade de dois vetores</p> <p>Equação reduzida e vetorial da reta no plano</p>	<ul style="list-style-type: none"> - coordenadas de um vetor; - vetor-posição de um ponto e respetivas coordenadas; - coordenadas da soma e da diferença de vetores; - coordenadas do produto de um vetor por um escalar e do simétrico de um vetor; - relação entre as coordenadas de vetores colineares; - Vetor diferença de dois pontos e cálculo das respetivas coordenadas; - coordenadas do ponto soma de um ponto com um vetor; - cálculo da norma de um vetor em função das respetivas coordenadas; - vetor diretor de uma reta; - relação entre as coordenadas de um vetor diretor e o declive da reta; - Paralelismo de retas e igualdade do declive; - Equação reduzida e equação vetorial de uma reta. 	<p>Referir a ligação do cálculo vetorial com outras áreas, como por exemplo as grandezas vetoriais da Física (forças, velocidades), a meteorologia, a computação gráfica, o jogo do bilhar.</p> <p>Conduzir os alunos a escrever a equação vetorial de uma reta, associada ao produto de um escalar por um vetor e à colinearidade de dois vetores.</p> <p>Propor aos alunos a utilização do Geogebra para explorar:</p> <ul style="list-style-type: none"> - a relação entre vetor diretor de uma reta e paralelismo de retas; - o efeito dos parâmetros, da equação reduzida de uma reta, na sua representação gráfica. <p>Salientar o papel central da equação reduzida da reta, permitindo escrever a equação de qualquer reta não vertical, cujo gráfico lhe seja apresentado, sem que para isso seja necessário fazer exercícios repetitivos.</p>	
--	---	---	--

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e estabelecer a ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem Python, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em Python para determinar coordenadas do ponto médio de um dado segmento de reta.

```
xA=float(input("xA=?"))
yA=float(input("yA=?"))
xB=float(input("xB=?"))
yB=float(input("yB=?"))
xM=(xA+xB)/2
```

```
yM=(yA+yB) /2  
print("Coordenadas do ponto médio M:")  
print("xM= ", xM)  
print("yM= ", yM)
```

Possíveis aprofundamentos

Poderão ser abordados outros temas para aprofundamento:

- estender o estudo a, pelo menos, outro ponto notável, envolvendo os alunos em atividades exploratórias com geometria dinâmica. Alguns exemplos de pontos notáveis: ponto de Fermat (ou ponto de Torricelli), ponto de Nagel, ponto de Miquel, ponto de Feuerbach, ponto de Gergonne (referência à Enciclopédia de pontos notáveis de um triângulo);
- resolver problemas das Olimpíadas de Matemática que envolvem pontos notáveis do triângulo;
- explorar os primórdios da Geometria Analítica com Descartes e Fermat;
- propor a elaboração de composições matemáticas sobre: a Geometria na “República” de Platão; a Geometria dos ORIGAMI; a Geometria dos templos japoneses.

Bibliografia de referência

- TRACTOR (s/d). Triângulos belos. Obtido de https://www.atractor.pt/mat/triangulos_belos/
- Caraça, Bento de Jesus (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Ciência Aberta, Gradiva, Lisboa,
- Cássio, J. (2019). Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma GeoGebra. Obtido de <https://www.geogebra.org/m/hsXHDX7>
- Estrada, M. F. et al. (2000) História da Matemática, Universidade Aberta
- Gonçalves, G. (2014). Geometria do Triângulo. Universidade de Brasília. Obtido de https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/16950/1/2014_GeorgeWesleyBarbalhoGon%C3%A7alves.pdf
- Khan Academy. Medianas e baricentros de triângulos. Obtido de <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/triangle-properties/medians-centroids/v/triangle-medians-and-centroids>
- Loureiro, C. et al. (1997). Geometria 10º ano de escolaridade. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- Loureiro, C. et al. (1998). Geometria 11º ano de escolaridade. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- Martins, A. e outros (2018). Reta de Euler: Colinearidade dos ortocentro, baricentro e circuncentro de um triângulo. Obtido de <https://geometrias.blogspot.com/2018/02/reta-de-euler-colinearidade-dos.html>
- Rosário, N. (2008) Aspectos Avançados da Geometria do Triângulo. Universidade do Algarve. Obtido de <https://sapientia.ualg.pt/bitstream/10400.1/642/1/AspectosAvancadosGeometriaTriangulo.pdf>
- Sebastião e Silva, J. (1970). Geometria Analítica Plana. Lisboa: Empresa Literária Fluminense.
- Sebastião e Silva, J. (1976). A Matemática na Antiguidade, SPM, Lisboa
- SESAMATH - *Manuel Maths 2de - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms2_2019
- Silva, E. (2019). Relações entre os pontos notáveis do triângulo e outras construções. Universidade do Porto. Obtido de https://sigarra.up.pt/fcup/pt/pub_geral.show_file?pi_doc_id=205687
- Veloso, E. (1998) Geometria - Temas atuais. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
<p>FUNÇÕES</p> <p>Generalidades acerca de funções</p> <p>Evolução histórica do conceito de função e formas de representação</p> <p>Estudo de funções definidas por tabelas, gráficos ou analiticamente: Domínio, conjunto de chegada e contradomínio; variável independente e variável dependente</p>	<p>Analisar elementos da evolução histórica do conceito de função e as diversas formas de representação: diagramas, tabelas, expressões analíticas e gráficos.</p> <p>Identificar domínio, conjunto de chegada, contradomínio, objeto e imagem de uma função em contextos históricos, de modelação, ou abstratos, com recurso a vários tipos de representações (tabelas, gráficos e expressões analíticas).</p>	<p>Apresentar elementos da evolução histórica do conceito de função, envolvendo episódios e problemas clássicos, como por exemplo, tabelas numéricas (quadrados, cubos, recíprocos, raízes quadradas e raízes cúbicas), tabelas trigonométricas de Ptolomeu/Copérnico ou lançamento de projéteis.</p> <p>Explorar o conceito de função em contextos reais e matemáticos em que faça sentido, nomeadamente como relação de covariação, incluindo a possibilidade de definição de funções em ambientes gráficos (calculadoras gráficas ou GeoGebra) ou em ambientes de programação (Python).</p> <p>Promover a análise de diferentes tabelas ou representações gráficas que se podem encontrar em jornais, revistas ou na internet (retomar exemplos do 3.º ciclo do EB).</p>	<p>Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A)</p> <p>Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B)</p>
<p>Funções polinomiais de grau não superior a 2</p> <p>Função afim</p> <p>Função quadrática</p>	<p>Estudar gráfica e analiticamente a função afim em termos de zeros, sinal e monotonia.</p> <p>Estudar famílias de funções quadráticas relativamente ao sentido das concavidades do seu gráfico, eixo de simetria, contradomínio, zeros, sinal, monotonia e extremos, gráfica e analiticamente.</p>	<p>Promover o estudo de funções definidas analiticamente com recurso à tecnologia gráfica, nomeadamente através da resolução de problemas em contexto de modelação de funções afins e quadráticas. No caso da função quadrática, efetuar uma referência histórica à parábola.</p> <p>Propor a representação de famílias de funções afins e quadráticas, com recurso à tecnologia gráfica, determinando zeros, sinal e vértice das parábolas.</p>	<p>Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)</p>

	<p>Interpretar e prever as alterações no gráfico de uma função $f(x - a)$, $f(x) + b$, $c \cdot f(x)$, com a, b e c números reais, c não nulo, a partir do gráfico da função de domínio \mathbb{R}, definida por $f(x) = x^2$, e descrever o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.</p> <p>Resolver equações e inequações do 2.º grau, em contextos de resolução de problemas.</p> <p>Determinar expressões analíticas de funções representadas graficamente.</p>	<p>Conduzir os alunos à dedução da fórmula resolvente para o cálculo dos zeros da função quadrática, fazendo referência aos números complexos, quando o discriminante é negativo.</p> <p>Solicitar a elaboração de um programa em Python para determinação dos zeros de uma função afim e/ou de uma função quadrática.</p> <p>Promover o estudo da relação entre gráfico da função definida por $f(x) = x^2$ e os gráficos das funções $f(x - a)$, $f(x) + b$, $c \cdot f(x)$, com a, b e c números reais, c não nulo, e usá-las na resolução de problemas em contextos de modelação.</p> <p>Promover a recolha de dados para modelação com funções, utilizando instrumentos de medição ou sensores, como por exemplo a experiência da deslocação de uma bola num plano inclinado.</p>	<p>Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D)</p> <p>Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)</p>
<p>Função módulo</p>	<p>Interpretar e prever as alterações no gráfico de uma função $f(x - a)$, $f(x) + b$, $c \cdot f(x)$, com a, b e c números reais, c não nulo, a partir do gráfico da função definida por $f(x) = x$, e descrever o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.</p> <p>Estudar gráfica e analiticamente famílias de funções definidas com módulos relativamente ao domínio e contradomínio, calcular coordenadas dos pontos de interseção com os eixos coordenados e estudar a monotonia e extremos.</p> <p>Determinar expressões analíticas de funções representadas graficamente.</p>	<p>Promover o estudo da relação entre o gráfico da função definida por $f(x) = x$ e os gráficos das funções $f(x - a)$, $f(x) + b$, $c \cdot f(x)$, com a, b e c números reais, c não nulo, e usá-las na resolução de problemas em contextos de modelação.</p> <p>Fomentar a utilização da tecnologia gráfica para comparar gráficos, explorar, investigar e comunicar, utilizando a função em estudo.</p>	<p>Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)</p>

<p>Funções definidas por ramos</p>	<p>Elaborar tabelas de variação de sinal e de monotonia.</p> <p>Definir e representar gráfica e algebricamente funções por ramos e utilizá-las em contextos de modelação.</p>	<p>Fomentar a resolução de problemas, em contexto real, que possam ser modeladas por funções definidas por ramos (por exemplo, escalões do IRS, faturas de água ou eletricidade, as sucessivas acelerações e desacelerações provocadas no movimento de um automóvel, ou ainda o deslocamento de um foguete e a sua transição para satélite).</p>	
<p>Complexos</p> <p>Unidade imaginária</p> <p>Números complexos na forma algébrica</p> <p>Igualdade de complexos</p> <p>Conjugado e módulo de um número complexo</p> <p>Operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão) com números complexos na forma algébrica</p> <p>Representação de complexos no diagrama de Argand-Gauss</p>	<p>Analisar a evolução histórica do conceito de número.</p> <p>Resolver equações do 2.º grau, de coeficientes reais, quando não existem raízes reais.</p> <p>Efetuar operações elementares com números complexos na forma algébrica.</p> <p>Representar números complexos no diagrama de Argand-Gauss.</p>	<p>Estimular a pesquisa na internet sobre a evolução do conceito de número, desde os números naturais até à formalização dos números complexos.</p> <p>Sugerir a adaptação do programa efetuado em Python para a resolução de equações do 2.º grau, incorporando números complexos.</p> <p>Fomentar a interpretação geométrica de adições e subtrações com complexos na forma algébrica recorrendo a ferramentas, como por exemplo o Geogebra.</p> <p>Fomentar a visualização geométrica, no diagrama de Argand-Gauss, do resultado de multiplicações e divisões de números complexos na forma algébrica, descrevendo o resultado e fazendo previsões e generalizações.</p>	

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e estabelecer a ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem Python, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Exemplo de programa em Python para determinação dos zeros de uma função afim e/ou de uma função quadrática:

```
import math*
n=int(input("Afim - 1/Quadrática - 2?"))
if n==1:
    print('f(x)=ax+b (a não nulo)')
    a=int(input("a?"))
    b=int(input("b?"))
    x1=-b/a
    print("ZERO: {}".format(x1))
elif n==2:
    print("f(x)=ax^2+bx+c")
    a=int(input("a?"))
    b=int(input("b?"))
    c=int(input("c?"))
    delta=b**2-4*a*c
    if delta<0:
        print("ZEROS: \nNão tem zeros")
    elif delta==0:
        x1=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
        print('ZEROS: \n1 zero: {}'.format(x1))
    else:
        x1=(-b-math.sqrt(delta))/(2*a)
        x2=(-b+math.sqrt(delta))/(2*a)
        print('ZEROS: \n2 zeros: {} e {}'.format(x1,x2))
```

Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.9.1 para computador.

Possíveis aprofundamentos:

Caraterizar o gráfico de uma função quadrática como sendo o conjunto de pontos a igual distância de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz). Definir regiões do plano delimitadas por parábolas e retas e obter aproximações da área respetiva por enquadramentos com recurso a polígonos.

Bibliografia de referência

- Copérnico, Nicolau (2014). *A revolução das orbes celestes*, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.
- Grupo de Trabalho T3 (2011). *Funções no 3.º Ciclo com Tecnologia*. Lisboa: APM.
- Guichard, Jean Paul (1986). *História da Matemática no ensino da Matemática*. in Bouvier, A. (coord), *Didactique des Mathématiques*, Cedic/Nathan, 1986 (Adaptação livre de Arsélio Martins). Obtido de <https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.html>
- Icart, J (2021). “Fonctions: Une Perspective Historique”. *Revue MathémaTICE*, nº 75. Obtido de <http://revue.sesamath.net/spip.php?article1414>
- Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1999). *Funções - 12º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Cofinanciado por:



UNIÃO EUROPEIA
Fundo Social Europeu