REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

12.º ANO | ENSINO SECUNDÁRIO

Matemática A

INTRODUÇÃO

1. Matemática Escolar Orientada para o Futuro

A formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de matemática para o ensino secundário. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, crescente digitalização, conectividade e automatização, e por uma aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar. Esse poder matemático deve ser parte integrante da educação de todos os cidadãos, incluindo conhecimentos e capacidades que os jovens transportarão para a sua vida pessoal, social e profissional.

Empreender uma formação matemática abrangente e inovadora, neste ciclo de escolaridade, significa desenvolver nos alunos a capacidade de identificar conceitos matemáticos relevantes para resolver problemas reais, aplicar procedimentos matemáticos adequados e interpretar os resultados em contextos diversos. O raciocínio matemático está na base dos processos de compreensão dos conceitos e objetos matemáticos, que podem e devem ser analisados, representados e relacionados de diferentes formas. São igualmente importantes a formulação de hipóteses, a testagem de conjeturas, a dedução, a generalização e a abstração, na construção de argumentos lógicos e conclusões, cuja comunicação de forma apropriada é cada vez mais importante no mundo atual.

O currículo consagra o propósito de preparar os alunos para formularem juízos e tomarem decisões fundamentadas, contribuindo para que se tornem cidadãos reflexivos, empenhados e participativos. Visa também contribuir para que os jovens valorizem o papel da Matemática no mundo e o seu carácter de ciência em evolução e renovação permanente, apreciando a sua dimensão estética, a par do seu legado histórico.

Assim, o currículo de Matemática para o futuro orienta-se para o desenvolvimento de áreas de competências, à luz do que é preconizado no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, nomeadamente no que se refere ao pensamento crítico aliado à resolução de problemas, promovendo a criatividade e a comunicação, além de acentuar a pertinência do trabalho colaborativo.

2. Ideias Inovadoras do Currículo

- Matemática para a Cidadania

O reconhecimento do Ensino Secundário como um ciclo que é parte integrante da formação geral dos jovens, incluído na escolaridade obrigatória, cria um contexto em que todas as disciplinas, incluindo a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos ativos, conscientes, informados e interventivos.
A crescente relevância do papel da Matemática na sociedade atual realça a importância e a necessidade de dotar os alunos de ferramentas de análise dos processos sociais, que estão na base do exercício de uma cidadania ativa. Assim, as Aprendizagens Essenciais introduzem modelos e processos eleitorais e a análise de modelos financeiros e valorizam o desenvolvimento da literacia estatística.

- Pensamento Computacional

Os aspetos comuns entre o Pensamento Matemático e o Pensamento Computacional, bem como a relevância atual do Pensamento Computacional na ciência e na sociedade, justificam que o currículo de Matemática valorize esta abordagem conceptual na resolução de problemas. As Aprendizagens Essenciais de Matemática promovem o desenvolvimento de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, bem como a aquisição de hábitos de depuração e optimização dos processos envolvidos na atividade matemática. Deste modo, a aposta no Pensamento Computacional revela a aproximação do currículo às recomendações internacionais e também o alinhamento com o currículo de Matemática do Ensino Básico, favorecendo o desenvolvimento desta competência de forma integrada, coerente e progressiva.

- Diversificação de temas no currículo

Para além do desenvolvimento de competências dos alunos no âmbito da cidadania, pretende-se disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com os métodos numéricos, o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia, e a inclusão de temas com pouca tradição no Ensino Secundário em Portugal. Esta diversificação é intensificada no 12.º ano com a proposta de três temas em opção, possibilitando que turmas diferentes trabalhem temas matemáticos diferentes.

- Matemática para todos

Assume-se que o currículo na escolaridade obrigatória deve dar resposta a todos os alunos tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos. Os formalismos e os níveis de abstração excessivos deverão ser evitados. Pretende-se que a matemática seja um contributo na resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias.

3. Ideias-Chave das Aprendizagens Essenciais

As Aprendizagens Essenciais de Matemática no Ensino Secundário dão continuidade às aprendizagens do Ensino Básico e assumem um conjunto de princípios e orientações metodológicas, cuja concretização e especificação é feita para cada ano de escolaridade e tema matemático. A seguir, enunciam-se e apresentam-se as oito ideias-chave preconizadas nas Aprendizagens Essenciais, esquematizadas na Figura 1:

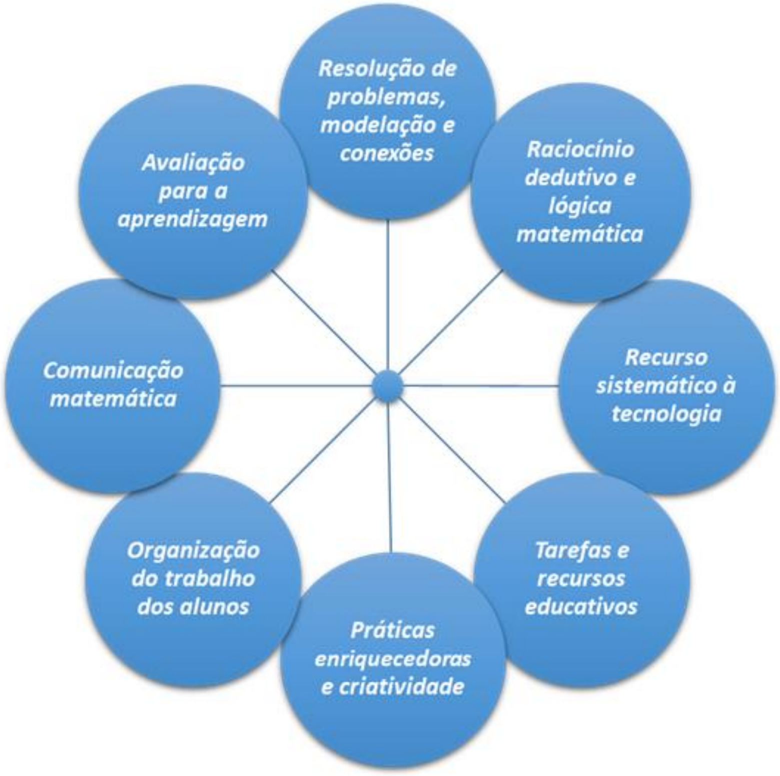

Figura 1 - Ideias-Chave das Aprendizagens Essenciais

1) Resolução de problemas, modelação e conexões

Dar sentido à Matemática e enfatizar a modelação e as aplicações

A resolução de problemas, tal como a modelação, devem constituir o contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da Matemática, assim como entre a Matemática e outras áreas do saber, permitindo uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática. É fundamental que os alunos tenham contacto com o processo de modelação matemática e sejam capazes de criticar, validar e aperfeiçoar modelos matemáticos. Preconizando a exploração de ideias e conceitos matemáticos, pretende-se que a aprendizagem não se reduza à memorização de regras, ao treino de procedimentos ou à sua execução sem compreensão. É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia-a-dia ou de outras disciplinas. Uma das áreas de competências no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, fortemente ligada à Matemática - Raciocínio e a Resolução de Problemas - implica que os alunos sejam capazes de: i) interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; ii) gerir informações e tomar decisões; iii) desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento, usando recursos diversificados.

2) Raciocínio dedutivo e lógica matemática

Incentivar processos de raciocínio dedutivo, integrando a lógica matemática nos diversos temas

O aluno deve ser sistematicamente incentivado a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios e a formular e validar conjeturas. Os conceitos e métodos relativos à lógica matemática não constituem um tema específico das Aprendizagens Essenciais, mas devem, de forma natural, ser integrados nos vários temas abordados. Noções elementares de Lógica podem e devem ser introduzidas à medida que forem relevantes para a clarificação de processos e de raciocínios. Pretende-se, assim, que o aluno adquira a capacidade de raciocinar dedutivamente e de forma autónoma, usando os princípios e a simbologia inerentes à lógica matemática. A integração do raciocínio dedutivo e da lógica, bem como da linguagem matemática e simbólica, deve estar presente em todos os momentos de aprendizagem, sem se transformar num conteúdo tratado de forma isolada. O grau de formalização a utilizar deve ter sempre em conta o nível de maturidade matemática dos alunos e deve surgir, se possível, como uma necessidade, garantindo que o processo de formalização acompanha a apropriação dos conceitos. Diversos temas, como, por exemplo, Geometria, Funções e Probabilidade, em contexto de resolução de problemas, podem constituir-se como excelentes oportunidades para desenvolver o raciocínio dedutivo, no qual se inclui a utilização de linguagem e de notações adequadas.

3) Recurso sistemático à tecnologia

Incentivar a exploração de ideias e conceitos, integrando a tecnologia como alavanca para a compreensão e resolução de problemas.

A abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos apresenta-se como determinante, o que pressupõe levar o aluno a participar ativamente num processo de construção e aprofundamento, motivado por questões desafiadoras, problemas e procura de justificações. A integração da tecnologia é considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico. O recurso à folha de cálculo, a ambientes de geometria dinâmica, a aplicativos digitais diversos, a simulações, a *smartphones*, à calculadora gráfica e sensores, bem como a outros equipamentos e materiais, deve ser feito de forma sistemática. As atividades de programação devem ser integradas com uma complexidade progressiva, sendo relevantes para o desenvolvimento de processos algorítmicos, de um pensamento estruturado e do raciocínio lógico, proporcionando um vasto campo de aplicação da Matemática e envolvendo genuinamente a formulação e a resolução de problemas, além de promover o desenvolvimento do pensamento computacional.

4) Tarefas e recursos educativos

Apoiar a aprendizagem em tarefas poderosas, contextos e recursos diversificados

A construção de tarefas de aprendizagem constitui uma das ações decisivas do professor. Uma tarefa matemática poderosa pode ser um problema, uma questão, um exercício, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento, sempre que observe os seguintes critérios: ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos alunos e apoiar o seu progresso. As tarefas devem ser, ainda, diversificadas e ajustadas aos objetivos de aprendizagem e a sua planificação deve prever diferentes tipos de organização do trabalho dos alunos. A utilização de recursos variados, nomeadamente da tecnologia, bem como a diversificação de contextos de aprendizagem, incluindo laboratórios, espaços fora da sala de aula, museus de ciência e outros, deverão merecer especial atenção na construção de tarefas. O recurso a episódios e problemas marcantes da História da Matemática deve motivar pesquisas, estudos ou debates, não de caráter enciclopédico, mas contribuindo para que o progresso da Matemática seja apreciado e compreendido. Para além do seu valor intrínseco, enquanto património cultural que importa valorizar, existem numerosos factos, aspetos particulares e episódios da História da Matemática que, pelo seu potencial pedagógico, devem ser explorados.

5) Práticas enriquecedoras e criatividade

Inovar e investir em práticas enriquecedoras, favorecendo o desenvolvimento da criatividade e atitudes positivas face à Matemática

O currículo integra propostas inovadoras, que incluem a realização de projetos, de fôlego e extensão ajustados às condições existentes e aos alunos. É igualmente recomendado que os alunos se envolvam na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade (nomeadamente, numa perspetiva integradora de STEAM – ciências, tecnologia, engenharia, artes e matemática). A programação, tal como a modelação ou o trabalho de projeto, abrem inúmeras vias de trabalho promissoras que não devem ser ignoradas. Também a beleza da Matemática, a sua aplicabilidade e a história fascinante que a envolve são fortes motivos para inovar através de práticas de enriquecimento das aprendizagens. É importante que os alunos experimentem o prazer da descoberta em Matemática e que desenvolvam o gosto pelo desafio, pela procura de soluções e pela sua comunicação. Dar aos alunos oportunidades de aprenderem matemática significativa contribui para que desenvolvam atitudes positivas em relação à disciplina. Estimular a curiosidade, o interesse, a motivação e a criatividade é essencial para que reconheçam a importância da Matemática na sua formação pessoal e académica e adquiram autoconfiança, sentindo-se capazes de raciocinar e comunicar matematicamente. O contexto sócio-emocional que permeia a aprendizagem da Matemática tem grande influência sobre a imagem que os jovens constroem da disciplina, sendo determinante na formação de cidadãos críticos, reflexivos, que se sintam capazes de tomar decisões e de formular e resolver problemas de formas criativas e profícuas.

6) Organização do trabalho dos alunos

Valorizar o trabalho colaborativo num ambiente de entreajuda e corresponsabilização, cultivando comunidades de aprendizagem

A valorização do trabalho colaborativo é assumida enquanto estratégia de aprendizagem e enquanto competência a desenvolver nos jovens na sociedade atual. A colaboração é especialmente indicada em tarefas nas quais os alunos possam discutir e definir abordagens e processos de resolução, confrontar ideias e contribuir para um objetivo comum. É também uma forma de trabalho em que os alunos se devem apoiar mutuamente, envolvendo-se em processos matemáticos, argumentação e comunicação, valorizando as competências individuais de cada um. Assim, o trabalho em pares e em pequenos grupos é adequado em múltiplas situações de aprendizagem, desde a realização de tarefas curtas, passando por situações que envolvem pesquisa, recolha de dados, modelação, até ao desenvolvimento de projetos.

7) Comunicação matemática

Comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado

A comunicação matemática, a par do raciocínio e do pensamento crítico, está presente quando os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos. Importa pôr em prática diversos tipos de comunicação, dando espaço às discussões coletivas e em pequenos grupos, apresentações orais e/ou escritas, elaboração de relatórios e composições, publicações e exposições, que são essenciais no processo de desenvolvimento de conceitos ou processos matemáticos. A simbologia constitui um sistema de representação matemática robusto que deve ser relacionado com outros modos de representação, tendo em vista a sua utilização oportuna, nomeadamente no âmbito da comunicação matemática. A formalização de conceitos e resultados matemáticos é uma etapa importante da aprendizagem que não se alcança por meio do excesso de manipulação simbólica ou pela prática de artifícios de cálculo demasiadamente técnicos.

8) Avaliação para a aprendizagem

Privilegiar a avaliação formativa na regulação do processo de aprendizagem

A abordagem exploratória que se privilegia implica a integração da avaliação no processo de aprendizagem. É necessário que a avaliação seja um processo, e não um fim, e que esteja ao serviço da aprendizagem dos alunos, de modo a favorecê-la. A diversificação de formas e instrumentos de avaliação é uma das práticas de avaliação recomendadas. Constituem boas tarefas de avaliação formativa as resoluções detalhadas de tarefas, os relatórios e os cartazes. A produção de documentos de natureza audiovisual é igualmente válida e apelativa, designadamente sob a forma de pequenos vídeos, criação de páginas e blogs, tirando partido de ferramentas digitais. As partilhas de ideias e conclusões em sala de aula, bem como as apresentações orais, constituem boas oportunidades para monitorizar e acompanhar o desenvolvimento das aprendizagens e identificar dificuldades e obstáculos.

4. Operacionalização das Aprendizagens Essenciais

A disciplina de Matemática assume um papel estruturante nos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. As Aprendizagens Essenciais do 10.º ano integram uma vertente de formação matemática para a cidadania, em consonância com as restantes disciplinas de Matemática do Ensino Secundário. Esta vertente é concretizada nos temas de Eleições e Partilha, Literacia Financeira e Estatística. Para além destes temas, no 10.º ano, os alunos estudam Geometria e Funções numa lógica de ampliar e aprofundar as abordagens do Ensino Básico.

No 11.º ano as Aprendizagens Essenciais integram Geometria, Funções e Matemática Discreta. Na lecionação da Geometria inclui-se geometria analítica e vetorial e trigonometria. A abordagem das funções reais considerará sempre estudos dos diferentes pontos de vista: gráfico, numérico e algébrico. Na Matemática Discreta estudam-se técnicas de contagem e sucessões.

No 12.º ano são aprofundados os temas Funções e Probabilidade. A finalizar as Aprendizagens Essenciais do 12º ano são propostos três temas em alternativa: Inferência Estatística, Primitivas Imediatas e Integrais Definidos e Matrizes. Destes temas apenas um deles será escolhido por cada escola, ou mesmo para cada turma.

O trabalho de projeto assume uma dimensão relevante, surgindo explicitamente no 10.º ano, no tema de Literacia Financeira e no 11.º ano no tópico de Sucessões, mas poderá ser também uma proposta de trabalho em qualquer tema que o professor considere adequado.

As Aprendizagens Essenciais relativas à Matemática A dos Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas concretizam-se em três documentos distintos. A organização das Aprendizagens Essenciais, que a seguir se detalha, é apresentada em quatro áreas:

- *Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos*, em que são identificados os conceitos Matemáticos a abordar.
- *Objetivos de aprendizagem: conhecimentos, capacidades e atitudes que o aluno deve revelar*, em que são concretizadas, para cada tópico matemático, as aprendizagens visadas com a indicação do foco e da especificação preconizada.
- *Ações estratégicas de ensino do professor*, onde é clarificado o papel do professor e as indicações metodológicas que são consideradas adequadas para a obtenção dos objetivos de aprendizagem definidos, bem como a sugestão de exemplos para a concretização das atividades a propor aos alunos.

- *Áreas de competência do perfil dos alunos*, em que é estabelecida uma ligação entre as aprendizagens matemáticas visadas, as indicações metodológicas e as competências, capacidades e atitudes definidas no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*.

Quando nas Aprendizagens Essenciais se refere recurso a tecnologia gráfica, deve entender-se a utilização de folhas de cálculo ou qualquer versão de calculadora gráfica, física ou sob a forma de emulador, inclusive com Cálculo Algébrico Simbólico (CAS), bem como o uso do Geogebra ou outro Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD), nas suas diversas versões disponíveis em qualquer dispositivo digital. Considera-se também o recurso a aplicativos digitais específicos (apliquetas), disponíveis na internet ou em fóruns temáticos.

Para cada tema são incluídas notas clarificadoras, nomeadamente no que se refere à sugestão de: atividades para o desenvolvimento do Pensamento Computacional, com recurso a exemplos; propostas de possíveis aprofundamentos de alguns temas ou de abordagens alternativas; referências bibliográficas que incluem documentos e recursos para apoio ao trabalho do professor.

ÁREAS DE COMPETÊNCIAS DO **PERFIL DOS ALUNOS (ACPA)**

- **A** Linguagens e textos
- **B** Informação e comunicação
- **C** Raciocínio e resolução de problemas
- **D** Pensamento crítico e pensamento criativo
- **E** Relacionamento interpessoal
- **F** Desenvolvimento pessoal e autonomia
- **G** Bem-estar, saúde e ambiente
- **H** Sensibilidade estética e artística
- **I** Saber científico, técnico e tecnológico
- **J** Consciência e domínio do corpo

OPERACIONALIZAÇÃO DAS **APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)**

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
PROBABILIDADE Fenómeno aleatório Experiência aleatória Espaço de resultados ou espaço amostral Modelo de probabilidade Acontecimentos União e interseção de acontecimentos	Distinguir entre fenómeno aleatório e não aleatório (determinístico). Compreender que as realizações individuais de um fenómeno aleatório são incertas, mas existe um padrão genérico de comportamento, recorrendo-se à Teoria da Probabilidade para construir modelos matemáticos que descrevam a regularidade estatística observada numa longa série de repetições do fenómeno. Compreender que: - À realização de um fenómeno aleatório se dá o nome de experiência aleatória; - Ao conjunto S de resultados possíveis se dá o nome de espaço de resultados ou espaço amostral; - Um acontecimento é um subconjunto do espaço de resultados e que a estes resultados se dá o nome de “resultados favoráveis” à realização do acontecimento; - A descrição do fenómeno aleatório é feita através de um modelo de probabilidade, constituído pelos resultados possíveis e a probabilidade atribuída a cada resultado. Relembrar os conceitos: acontecimento certo, impossível, elementar e composto; acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos; acontecimentos contrários ou complementares; união e interseção de acontecimentos.	Recorrer a situações em contextos variados, para sensibilizar os alunos para a existência destes fenómenos, nomeadamente através de exemplos de fenómenos físicos, com leis determinísticas (movimento de um carro; queda de uma maçã do alto de uma torre) e de exemplos de fenómenos que se podem considerar aleatórios pela dificuldade em arranjar uma lei física para os descrever (número de irmãos de um aluno da escola, escolhido ao acaso; face do dado que fica virada para cima quando se lança; temperatura máxima a observar numa data futura). Salientar que os modelos de probabilidade são modelos matemáticos que descrevem os fenómenos aleatórios. Realçar que para construir um modelo de probabilidade tem de se arranjar um processo que permita atribuir probabilidades aos acontecimentos elementares.	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B)

Probabilidade Probabilidade frequencista	Compreender que a caraterística do fenómeno aleatório permite definir, intuitivamente, a probabilidade de um acontecimento A, representada por P(A), como sendo o valor para o qual estabiliza a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória, nas mesmas condições, ou seja, P(A) é o valor em que estabiliza $\frac{n_A}{n}$, onde n_A representa o número de vezes que se realizou A em *n* repetições da experiência aleatória.	Iniciar o estudo deste tema com modelos de probabilidade simples, com espaços de resultados finitos, nomeadamente os que descrevem os chamados "jogos de sorte e azar". Por exemplo, intuitivamente, espera-se que ao fim de muitas repetições do lançamento do dado, cada uma das faces saia aproximadamente 16,6(6)% das vezes. Alguns acontecimentos, associados com esta experiência, são: "sair uma face com um nº de pintas par", "sair uma face com um nº de pintas maior ou igual a 5", "sair uma face com um nº de pintas maior que 6", etc.	Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)
Regras da probabilidade	Reconhecer que as probabilidades associadas aos acontecimentos elementares têm de ser números entre 0 e 1 e que a soma total deve ser 1. Reconhecer que a probabilidade de um acontecimento é igual à soma das probabilidades dos acontecimentos elementares constituídos pelos resultados que o compõem.		Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)
Probabilidade da união de acontecimentos	Utilizar a representação dos acontecimentos em diagramas de Venn, para mostrar que, dados dois acontecimentos A e B quaisquer, P(A∪B)=P(A)+P(B)-P(A∩B). Reconhecer que se admite que os acontecimentos elementares são equiprováveis quando não haja à partida razão para admitir que os resultados do espaço de resultados não tenham igual possibilidade de se verificarem.		
Regra de Laplace	Conhecer a regra de Laplace, para o cálculo da probabilidade de um acontecimento A, com o seguinte enunciado: $\text{Probabilidade de A} = \frac{\text{Número de resultados favoráveis a A}}{\text{Número de resultados possíveis}}$	Propor a resolução de problemas que envolvam o cálculo de probabilidades recorrendo à regra de Laplace, evitando o uso excessivo de técnicas de contagem.	

	Compreender em que situações se pode utilizar a regra de Laplace para determinar a probabilidade de um acontecimento.	Realçar que uma vez definido o modelo de probabilidade se pode calcular a probabilidade de qualquer acontecimento associado ao fenómeno em estudo. Alertar os alunos para o facto de que na vida real as situações mais frequentes são aquelas em que não é possível recorrer à regra de Laplace para calcular a probabilidade de acontecimentos, por exemplo: o tipo sanguíneo de uma pessoa escolhida ao acaso, de entre a população portuguesa, ou a eficácia de uma vacina.	
Probabilidade condicionada Definição Regra do produto Árvore de probabilidade Tabelas de contingência Acontecimentos independentes	Saber que a probabilidade de um acontecimento A se realizar, condicionada ou sabendo que o acontecimento B se realizou, com $P(B) > 0$, se representa por $P(A\|B)$ e se calcula de acordo com a seguinte fórmula: $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ Reconhecer que a partir da definição de probabilidade condicionada se pode definir a probabilidade simultânea de dois acontecimentos, chamada regra do produto, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\|A)$ ou $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A\|B)$ conforme seja A ou B o acontecimento que está a condicionar. Reconhecer a utilidade de árvores de probabilidade para organizar a informação disponível sobre os acontecimentos em cadeia. Reconhecer a utilidade das tabelas de contingência para calcular a probabilidade condicionada. Utilizar a probabilidade condicionada para definir acontecimentos independentes e saber que o acontecimento A é independente do acontecimento B, com $P(B) > 0$, se $P(A\|B) = P(A)$	Conduzir os alunos a reconhecerem que em muitas situações em que se pretende calcular a probabilidade de um acontecimento, já se dispõe de alguma informação sobre o resultado da experiência, a qual permite atualizar a atribuição de probabilidade a esse acontecimento. Exemplificar com situações intuitivas, como a extração de bolas, de vários tipos, de uma caixa sucessivamente, sem reposição, em que a composição da caixa se altera, implicando que a probabilidade de se retirar uma bola depende dos tipos de bolas que saíram nas extrações anteriores Pedir aos alunos que calculem a probabilidade de ocorrência de cadeias simples de acontecimentos, utilizando árvores de probabilidade, como forma de organização da informação disponível. Salientar que uma das situações mais simples para compreender intuitivamente o conceito de independência de acontecimentos está ligada à situação do lançamento de uma moeda. A moeda “não tem memória” e a probabilidade de sair “face	

	Reconhecer que os acontecimentos A e B são independentes se, e só se: $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B})$	nacional" no próximo lançamento não depende do que saiu nos lançamentos anteriores. Porém, no acontecimento "selecionar o nome de dois alunos do sexo masculino" de uma turma com 14 rapazes e 16 raparigas, a probabilidade de selecionar o segundo rapaz, depende da escolha do primeiro aluno (seleção sem reposição). Orientar os alunos na obtenção da probabilidade de um certo acontecimento B, quando são conhecidas as probabilidades de B condicionadas aos acontecimentos $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, mutuamente exclusivos e tal que a sua união é igual ao espaço de resultados, e é conhecido o modelo de probabilidade para estes acontecimentos: $P(B) = P(B\|A_1) \cdot P(A_1) + \cdots + P(B\|A_n) \cdot P(A_n) \cdot$ Este resultado é conhecido como "teorema da probabilidade total".	
Modelos de probabilidade em espaços finitos Variáveis aleatórias (discretas) Função massa de probabilidade	Reconhecer que se podem associar números aos resultados de um fenómeno aleatório, através de uma função denominada variável aleatória (v.a.) e que construir um modelo de probabilidade para modelar um fenómeno aleatório, com espaço de resultados finito, é equivalente a construir a função massa de probabilidade (f.m.p.) da variável aleatória associada. Identificar a população com a variável aleatória associada e reconhecer que construir a f.m.p. é obter um modelo para a população. Reconhecer que a f.m.p. permite calcular a probabilidade de acontecimentos, relacionados com a realização do fenómeno modelado.	Exemplificar e orientar os alunos na construção de modelos de probabilidade simples, nomeadamente o que descreve o resultado do lançamento de um dado equilibrado, em que se define a variável aleatória X, que associa a cada face do dado, o seu número de pintas. Destacar a situação do lançamento de dois dados em que se pretende modelar o fenómeno aleatório que consiste em observar a soma das pintas dos dois dados e chamar a atenção para que embora o número de resultados possíveis seja igual a 11, a probabilidade de cada um não é $\frac{1}{11}$.	

Parâmetros Valor médio e desvio padrão populacional	Reconhecer que dois dos parâmetros, características numéricas da população, mais importantes são o valor médio (ou média populacional) e o desvio padrão populacional, e saber que estes parâmetros se representam pelas letras gregas μ (miu) e σ (sigma), respetivamente. Compreender o paralelismo entre valor médio (ou média populacional) e a média e também, de modo idêntico, para a variância e outras medidas calculadas para a população e para a amostra. Saber calcular o valor médio e o desvio-padrão populacional de uma variável aleatória de suporte finito, a partir da f.m.p.	Propor o cálculo do valor médio e do desvio padrão, recorrendo à f.m.p. em exemplos como o do lançamento do dado e de outros modelos como seja, a extração de bolas de um saco com e sem reposição. Salientar que a fórmula utilizada para calcular o valor médio é semelhante à fórmula utilizada para calcular a média com os dados discretos agrupados em tabelas de frequências relativas. Orientar na interpretação do valor médio, utilizando exemplos associados a jogos.	
Modelo Normal Propriedades	Reconhecer o modelo Normal, de suporte contínuo, como um dos modelos mais importantes para a modelação de fenómenos aleatórios. Saber calcular probabilidades com base nesta família de modelos.	Salientar que é necessário alargar o conceito de modelo de probabilidade a situações onde o espaço amostral não seja finito, como por exemplo, o “n.º de carros que atravessam a ponte 25 de Abril das 8h às 9h”, em que se considera como suporte do modelo os números naturais, ou o comprimento do salto de um atleta, em que o suporte da variável comprimento é $\mathbb{R}$. Destacar que o modelo Normal é utilizado para estudar variáveis aleatórias de suporte contínuo, como, por exemplo, a “altura” ou o “peso” de um indivíduo adulto. Salientar a curva em forma de “sino” como representativa do modelo Normal, bem como o significado nessa curva dos valores da probabilidade associados a intervalos. Utilizar a tecnologia gráfica para calcular probabilidades com base no modelo Normal.	

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada ou em problemas semelhantes, anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação do algoritmo a desenvolver. Antes de redigir o programa na linguagem Python, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.
Exemplo de programa em Python para simular lançamentos de 1 dado cúbico, numerado de 1 a 6, e o registo das frequências relativas referentes à saída de cada face:

```
import random
n=int(input("Quantos lançamentos queres simular?"))
f1=0
f2=0
f3=0
f4=0
f5=0
f6=0
for i in range(0,n):
    r=random.randint(1, 6)
    if r==1:
        f1=f1+1
    elif r==2:
        f2=f2+1
    elif r==3:
        f3=f3+1
    elif r==4:
        f4=f4+1
    elif r==5:
        f5=f5+1
    elif r==6:
        f6=f6+1
print("Freq. relativa da saída da face 1 = "+str(f1/n))
print("Freq. relativa da saída da face 2 = "+str(f2/n))
print("Freq. relativa da saída da face 3 = "+str(f3/n))
```

```
print("Freq. relativa da saída da face 4 = "+str(f4/n))
print("Freq. relativa da saída da face 5 = "+str(f5/n))
print("Freq. relativa da saída da face 6 = "+str(f6/n))
```

Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.9.1 para computador.

Exemplo de programa em Python para simular lançamentos de 1 dado cúbico, numerado de 1 a 6, e o registo das frequências relativas referentes à saída de cada face, com recurso a ciclos e a listas:

```
import random
n=int(input("Quantos lançamentos queres simular?"))
f=[0 for k in range(6)]
for i in range(n):
    r=random.randint(1,6)
    f[r-1]=f[r-1]+1

for k in range(6):
    print("Freq. relativa da saída da face",k+1,"=",f[k]/n)
```

Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.9.1 para computador.

Possíveis aprofundamentos

Nada se sugere atendendo à variedade de temas tratados.

Bibliografia de referência

COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.
Graça Martins, M. E. & Cerveira, A. (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Universidade Aberta.
Graça Martins, M. E. et al. (1999). Probabilidades e Combinatória. Ministério da Educação/Departamento do Ensino Secundário.
Graça Martins, M. E. (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
FUNÇÕES Função exponencial	Conhecer e aplicar propriedades simples com raízes de índice natural na resolução de problemas, nomeadamente a radiciação de índice natural como inversa da potenciação de expoente natural. Utilizar potências de expoente fracionário relacionando-as com as raízes de índice natural. Identificar função exponencial, como função do tipo $f(x) = a.b^x$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ analisando algumas propriedades (domínio, contradomínio, pontos de interseção com os eixos coordenados, monotonia e limites no infinito). Resolver equações em contexto de resolução de problemas, quer analiticamente, quer graficamente. Conhecer o número irracional "*e*", como limite da sucessão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.	Discutir a aplicação de raízes de índice natural em problemas de modelação, como por exemplo o cálculo da taxa de juro anual nominal quando se pretende obter uma taxa anual efetiva, num contexto de juros compostos com várias capitalizações ao longo do ano. Apresentar a função exponencial num contexto de resolução de problemas de crescimento e decrescimento exponencial, como por exemplo o crescimento de bactérias ou o arrefecimento de um café. Promover a resolução analítica, gráfica e simbólica (CAS), de equações envolvendo funções exponenciais. Recorrer a sucessivos valores de *n*, por exemplo, 1, 2, 3, 10, 1000, 10000, 100000, para determinar os termos da sucessão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e conduzir à intuição de que os termos tendem para um valor aproximado do número "*e*" (observando que a tecnologia tem limitações e que num sistema de precisão finita não se podem obter os resultados corretos para valores de *n* muito elevados). Fazer referência ao trabalho pioneiro de Euler, o primeiro a estudar de forma sistemática o número "*e*", que provou ser irracional.	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)

	Identificar o número “e” como a única base da função exponencial em que o seu gráfico coincide com o gráfico da respetiva função derivada (chamada *exponencial natural*). Conhecer e aplicar a derivada da função $f(x) = e^x$. Utilizar as regras de derivação estudadas anteriormente (adição, subtração e produto) de modo a determinar derivadas que envolvam a função $f(x) = e^x$. Resolver problemas simples de modelação matemática, no contexto de aplicações.	Promover a utilização da tecnologia gráfica para representar funções da família $f(x) = a^x,\ a \in [2,3]$ e respectivas derivadas (calculadas usando funções específicas da tecnologia para derivadas ou tangentes ao gráfico) e verificar que só existe um valor de *a* para o qual a função e a sua derivada coincidem. Promover a resolução de problemas de modelação que envolvam a função exponencial.	Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D) Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)
Função inversa Função logarítmica	Identificar funções invertíveis e não invertíveis recorrendo ao “teste da reta horizontal”. Estabelecer as relações entre o domínio e o contradomínio de funções inversas, bem como a simetria das respetivas representações gráficas, relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares. Reconhecer que a função logarítmica de qualquer base é a inversa da função exponencial com a mesma base. Estudar intuitivamente, com recurso à tecnologia gráfica, o comportamento de funções com logaritmos. Conhecer e aplicar as propriedades e regras operatórias dos logaritmos, em casos simples e em contexto de resolução de problemas e de modelação. Resolver equações em contexto de resolução de problemas, quer analiticamente, quer graficamente.	Promover a utilização da tecnologia para estudar funções invertíveis e comparar gráficos de funções com os das suas inversas. Propor a exploração de modelos exponenciais e conduzir os alunos na identificação da relação inversa. Promover a utilização das propriedades e regras operatórias, incluindo a fórmula da mudança de base, em contexto de resolução de problemas. Propor a utilização da tecnologia na resolução de problemas, no contexto da vida real.	Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

	Saber relacionar geometricamente a derivada da função logarítmica com a derivada da função exponencial, tendo por base a simetria das retas tangentes aos gráficos em pontos simétricos, relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares. Conhecer e aplicar a derivada da função $g(x) = ln\, x$. Utilizar as regras de derivação estudadas anteriormente (adição, subtração e produto) de modo a determinar derivadas que envolvam a função $f(x) = e^x$ e a função $g(x) = ln\, x$.	Ilustrar a determinação da derivada de $g(x) = ln\, x$, através da construção seguinte, usando tecnologia gráfica: 1. Construir a representação gráfica de $f(x) = e^x$ e, por meio de uma simetria relativa à bissetriz dos quadrantes ímpares, obter o gráfico da função $g(x) = ln\, x$; 2. Marcar um ponto de coordenadas $(x, g(x))$ e o seu simétrico relativamente à reta $y = x$; 3. Traçar a reta tangente ao gráfico de g em $(x, g(x))$ e, por simetria, traçar a tangente ao gráfico de f em $(g(x), x)$; 4. Verificar que o produto dos declives das retas tangentes é igual a 1, qualquer que seja x; 5. Observar que o declive da tangente ao gráfico de f em $(g(x), x)$ é x, porque $(e^x)' = e^x$. 6. Concluir que o declive da tangente ao gráfico de g em $(x, g(x))$ é $\frac{1}{x}$, ou seja $(ln\, x)' = \frac{1}{x}$. Promover a resolução de problemas de modelação, com tecnologia ou analiticamente, que envolvam a função logarítmica.	
Funções trigonométricas Radiano Funções trigonométricas seno, cosseno e tangente Fenómenos periódicos	Conhecer a unidade de medida radiano, com base no círculo trigonométrico, e utilizá-la na representação gráfica de funções trigonométricas. Reconhecer, analisar e aplicar na modelação de fenómenos periódicos as funções trigonométricas $sen(x)$, $cos(x)$ e $tg(x)$. Identificar fenómenos periódicos e usar os conceitos de período, máximo, mínimo, amplitude e frequência, no estudo dos fenómenos periódicos.	Introduzir o conceito de radiano, tendo em vista a sua utilização na representação gráfica de funções trigonométricas. Levar os alunos a compreender a diferença na representação gráfica de uma função trigonométrica quando se utilizam unidades diferentes (graus e radianos) e a perceber as vantagens da sua representação em radianos. Incentivar o uso do círculo trigonométrico e da tecnologia gráfica para explorar as funções trigonométricas $sen(x)$, $cos(x)$ e $tg(x)$.	

Equações trigonométricas	Resolver equações trigonométricas, num contexto de resolução de problemas, encontrando valores aproximados com recurso à tecnologia.	Promover o estudo de famílias de funções do tipo $f(x) = a\,sen(b(x-c)) + d$ e $g(x) = a\,cos(b(x-c)) + d$, com a, b, c e d números reais, a e b não nulos, propondo a exploração de situações como, por exemplo, a variação das marés, a roda gigante ou as ondas sonoras. Promover a resolução gráfica de equações trigonométricas, com recurso a tecnologia. Propor aos alunos o estudo de situações problemáticas, utilizando tecnologia, recorrendo a modelos com funções trigonométricas.	
Derivadas Regras de derivação	Conhecer e aplicar as regras de derivação para: - quociente de funções; - funções do tipo $f(x)$=x^{α} (com α real e $x > 0$); - funções trigonométricas ($sen(x)$, $cos(x)$ e $tg(x)$); Conhecer a composição de funções e o teorema da derivada da função composta (Regra da Cadeia). Determinar derivadas de funções das famílias já estudadas (exemplos simples).	Dar a conhecer e promover a utilização das regras de derivação, sem demonstrar, do quociente de funções, da função $f(x)$=x^{α} e de funções trigonométricas. Dar a conhecer e aplicar a composição de funções e o teorema da derivada da função composta, generalizando as fórmulas de derivação conhecidas.	
Problemas de otimização	Resolver problemas de otimização tendo por base funções deriváveis.	Promover a resolução de problemas de otimização envolvendo funções deriváveis já estudadas, num contexto de modelação matemática.	
Segunda derivada	Determinar a segunda derivada de funções polinomiais, racionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.	Propor o cálculo da segunda derivada de funções que não ultrapassem o grau de dificuldade de: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7$, $g(x) = cos^2 x$, $h(x) = \frac{e^x}{x}$.	
Concavidades e pontos de inflexão	Relacionar o sinal e os zeros da segunda derivada com o sentido das concavidades e pontos de inflexão.	Promover o estudo de funções, incluindo o sentido das concavidades e os pontos de inflexão em intervalos onde as funções têm segunda derivada.	

Continuidade e limites			
Continuidade	Reconhecer uma função contínua num ponto do seu domínio como uma função que admite limite nesse ponto igual à sua imagem. Saber identificar se uma função é contínua num intervalo.	Promover o estudo da continuidade de uma dada função num ponto do domínio e num subconjunto do domínio. Analisar alguns modelos de funções descontínuas como por exemplo: tarifários de estacionamento, a força exercida pelo propulsor de um foguete após o seu lançamento.	
Assíntotas	Determinar analiticamente as equações das assíntotas, verticais e não verticais, ao gráfico de uma função.	Propor aos alunos a determinação das assíntotas verticais e não verticais ao gráfico de uma função.	
Regra de L'Hôpital	Estudar o limite de funções que conduzem a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, aplicando a Regra de L'Hôpital ou usando limites notáveis.	Promover o estudo de indeterminações para comparar magnitudes de funções quando a variável independente se aproxima de um ponto específico ou do infinito. Propor a construção de uma tabela de limites notáveis, recorrendo à regra de L´Hôpital, nomeadamente: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x^p}$ e $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^p}$ $(p\epsilon\mathbb{N})$	
Estudo de funções	Resolver problemas, envolvendo o estudo de funções, complementando o uso da tecnologia com o estudo analítico.	Incentivar o estudo das funções, combinando as ferramentas analíticas com a tecnologia gráfica, identificando na representação gráfica obtida as características resultantes de processos analíticos. Proporcionar oportunidades para compreender que as representações gráficas apresentadas pela tecnologia podem, por vezes, não corresponder com rigor ao gráfico da função em estudo.	

Resolução aproximada de equações Teorema de Bolzano-Cauchy Método da Bisseção Método de Newton	Conhecer o teorema dos valores intermédios (Bolzano-Cauchy). Conhecer e aplicar o método da Bisseção. Conhecer e aplicar o método de Newton.	Apresentar como objetivo a resolução por métodos aproximados de qualquer equação, tendo em conta que existem muitas situações em que não é possível obter uma resolução analítica com solução exata. Promover o uso sistemático da tecnologia na aplicação dos diferentes métodos enumerados de obtenção aproximada de soluções de equações. Propor a elaboração de programas em Python para implementar os métodos de Newton e da Bisseção. Ilustrar a partir de um exemplo concreto a interpretação geométrica do método de Newton.	

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada ou em problemas semelhantes, anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação do algoritmo a desenvolver. Antes de redigir o programa na linguagem Python, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.
O método da Bisseção é análogo ao método de pesquisa binária numa lista ordenada e, entre os métodos de seção do intervalo, é o que, em geral, produz melhores estimativas para igual número de avaliações da função.
Exemplo de programa em Python para calcular a aproximação de uma raíz num determinado intervalo através do método da Bisseção.

```
def bissecao(f,a,b,erro):
    fa = f(a)
    fb = f(b)
    if fa*fb > 0:
       print("A função tem imagens com o mesmo sinal nos extremos deste intervalo")
       exit(0)
```

```
    while b-a > 2*erro:
        c = (a+b)/2.
        fc = f(c)
        if fa*fc < 0:
            b, fb = c, fc
        elif fa*fc > 0:
            a, fa = c, fc
        else:
            return c
    return c

def f(x):
    return x**3-5*x**2+2*x-3

print(bissecao(f,0,5,0.000001))
```

Nota: O programa foi criado em Python IDLE 3.9.1 para computador.

Possíveis aprofundamentos

Usando as derivadas das funções exponencial e logarítmica em conjunto com o teorema da derivação da função composta é possível deduzir a expressão geral da derivada de x^{α}, com $\alpha \in \mathbb{R}$ e de $f(x)^{g(x)}$, em que $f(x) > 0$.
Referir o método babilónico para calcular raízes quadradas aproximadas (método de Herão) e verificar que se trata do método de Newton com a função $f(x) = x^2 - a,\ a > 0$.

Bibliografia de referência

Apostol, T. (1999). *Cálculo Volume 1 - Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear*. Barcelona: Reverté.
Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática,* Ciência Aberta. Lisboa: Gradiva.
Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática,* Universidade Aberta.
Figueira, M., (1997). *Fundamentos de Análise Infinitesimal* (2ª edição). Lisboa: FCUL.
Graça, M. (2000). Efeitos colaterais no uso de máquinas de calcular. *Gazeta de Matemática*, nº 139, p. 15-21.
Guichard, J. P. (1986). História da Matemática no ensino da Matemática. in Bouvier, A. (coord), Didactique des Mathématiques, Cedic/Nathan,1986 (Adaptação livre de Arsélio Martins). Obtido de https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/mhist.html
Haese, M. et al. (2012). *Mathematics for the international student Mathematics SL* (for use with IB Diploma Programme). Third Edition. Adelaide: Haese

Mathematics.
Haese, M. et al. (2019). *Mathematics - Analysis and Approaches SL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Haese, M. et al. (2019). *Mathematics - Applications and Interpretation SL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Haese, M. et al. (2019). *Mathematics Core topics SL 1* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Hodgson, B. (2008). Uma breve história da quinta operação. *Gazeta de Matemática*, nº 156, p. 7-30.
Icart, J (2021). Fonctions: Une Perspective Historique. Revue MathémaTICE, nº 75, maio 2021. Obtido de http://revue.sesamath.net/spip.php?article1414
Pina, H. (2010). *Métodos Numéricos*, Escolar Editora, Lisboa.
Sebastião e Silva, J. (1975-1978). Compêndio de Matemática (3 volumes). Lisboa: GEP.
SESAMATH - *Manuel Maths 1re - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019
SESAMATH - *Manuel Maths 2de - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms2_2019
SESAMATH - *Manuel Maths Terminale - Spécialité - Édition 2020*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=mstsspe_2020
Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.
Teixeira, P., Precatado, A., Albuquerque, C., Antunes, C., & Nápoles, S. (1999). *Funções - 12º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

<table>
<tr><th>TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos</th><th>OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar</th><th>AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR</th><th>Áreas de Competência do Perfil dos Alunos</th></tr>
<tr><td colspan="3">As Aprendizagens Essenciais de Matemática A do 12.º ano integram ainda três temas opcionais, para que apenas um deles seja trabalhado em cada escola, ou mesmo em cada turma. Para esta seleção os professores terão em conta o perfil e os interesses dos alunos e os recursos a que será possível ter acesso. Os três temas são: Introdução à Inferência Estatística; Primitivas Imediatas e Integrais Definidos; e Matrizes. Apresenta-se uma breve justificação do interesse de cada tema em apreço, para auxiliar a escolha dos professores.

A escolha da Introdução à Inferência Estatística visa atingir um dos objetivos prioritários da matemática escolar, que é o da educação para a cidadania. Esta educação subentende uma melhor compreensão do mundo que nos rodeia, pelo que é importante dotar os jovens das ferramentas necessárias para mais rapidamente, e em melhores condições, responderem às inúmeras solicitações e tomarem decisões informadas sobre questões relevantes do mundo real em que se integram. Com este tema, pretende-se evidenciar a grande potencialidade da Estatística, pois estudar-se-á como se podem tirar conclusões para uma população, partindo do estudo de alguns elementos dessa população e, ao mesmo tempo, quantificar o erro cometido ao tomar decisões. Aqui, será dado relevo ao papel desempenhado pela Probabilidade, já que será o instrumento apropriado para quantificar o erro cometido ao tomar as decisões quando se faz inferência. O estudo de exemplos simples permitirá mostrar como se pode fechar o ciclo de um procedimento estatístico, que se inicia com o planeamento da experiência e uma consequente recolha de dados, com o objetivo final de uma tomada de decisões.

No tema Primitivas Imediatas e Integrais Definidos o trabalho concentra-se na resolução de um problema básico: o cálculo da área da figura definida pelo gráfico de uma função contínua e pelos eixos coordenados. Note-se que a possibilidade do cálculo de áreas é muito aumentada neste tema relativamente ao que os alunos estudaram anteriormente, pois até aqui, foram trabalhadas apenas áreas limitadas por polígonos ou a área de um círculo, podendo agora calcular uma multiplicidade de áreas de figuras, desde que seja possível defini-la a partir de uma função contínua. O cálculo integral é um método poderoso para resolver problemas em contextos tão diversos como o cálculo de áreas e volumes, o cálculo do comprimento de curvas, o cálculo da pressão exercida por líquidos, a determinação de probabilidades em modelos contínuos, o cálculo de centros de gravidade de figuras irregulares e a determinação do valor médio de uma função contínua num dado intervalo, entre outros.

As Matrizes são uma das ferramentas mais poderosas inventadas pelo espírito humano, apesar de datarem apenas do século XIX. Uma matriz é algo tão simples como uma tabela de números sobre as quais é possível definir operações simples que se revelam muito eficazes. As matrizes fornecem o enquadramento necessário para a resolução de sistemas de milhares de equações com milhares de incógnitas, essenciais por exemplo no bom desenrolar das viagens espaciais. Também são fundamentais em áreas como o estudo de redes e a ciência dos dados e são uma ferramenta básica das atuais tecnologias do cinema de animação, pois são o modo como são representadas as transformações geométricas que definem o movimento dos objetos e personagens. Conhecer matrizes é entrar num mundo novo que originou ferramentas que todas as tecnologias digitais hoje utilizam profusamente.</td><td></td></tr>
</table>

Introdução à inferência estatística Raciocínio indutivo ou inferencial Parâmetro e estatística Estimador e estimativa Amostras aleatórias	Compreender que o raciocínio indutivo ou inferencial se utiliza quando se pretende estudar uma população, analisando só alguns elementos dessa população, ou seja uma amostra, e que a partir das propriedades verificadas na amostra, se inferem propriedades para a população. Conhecer que parâmetro é uma caraterística numérica da população e que estatística é uma caraterística numérica da amostra. Compreender que um dos objetivos pretendidos ao recolher uma amostra da população, que se pretende estudar, é tirar conclusões sobre os parâmetros dessa população, considerando-se funções adequadas, estatísticas, que só dependem dos elementos da amostra. Saber que à estatística utilizada para estimar um parâmetro também se dá o nome de estimador e que ao valor do estimador para uma amostra também se chama estimativa. Compreender que é necessário recolher uma amostra aleatória, quando se pretende utilizá-la para retirar conclusões para a população subjacente, pois só assim será possível utilizar a probabilidade para quantificar o erro cometido ao inferir para a população, os resultados aí verificados. Compreender que os processos de seleção da amostra podem ser sem reposição ou com reposição.	Recorrer a contextos variados, que levem os alunos a tomar consciência de situações aleatórias, em que é necessário tomar decisões sobre populações, a partir de alguma informação recolhida dessas populações, na forma de dados. Orientar os alunos na leitura da ficha técnica que acompanha o resultado de uma sondagem, alertando que a tomada de decisões tem um erro associado, que vai ser contabilizado em termos de probabilidade. Salientar que o parâmetro é uma caraterística numérica da população, (normalmente desconhecida) enquanto a estatística é uma caraterística numérica da amostra (que se pode calcular). Exemplificar situações, como por exemplo, a média das alturas de todos os portugueses adultos, que é um parâmetro, enquanto a média das alturas de uma amostra é uma estatística, ou a proporção de eleitores decididos a votar em determinado candidato presidencial, que é um parâmetro, e a proporção de eleitores, que numa amostra, disseram ir votar nesse candidato, é uma estatística. Orientar os alunos na recolha de uma amostra, necessariamente aleatória, quando se pretende utilizá-la para estimar um parâmetro. Realçar que o valor do estimador depende da amostra considerada, podendo-se obter tantas estimativas diferentes, quantas as amostras consideradas, da mesma dimensão, sendo esta variabilidade inerente à aleatoriedade da escolha da amostra.	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais, avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C)

Distribuição de amostragem de uma estatística Distribuição de amostragem da média Teorema Limite Central (TLC) Estimativas pontuais e estimativas intervalares	Compreender que o processo da seleção da amostra é o primeiro passo importante para uma inferência estatística eficiente. Compreender que para averiguar da eficácia de um estimador para estimar um parâmetro, é necessário conhecer a sua distribuição de amostragem, ou seja, a distribuição dos valores obtidos pelo estimador, quando se consideram todas as amostras possíveis, utilizando um determinado esquema de amostragem. Compreender que a distribuição de amostragem de um estimador depende da dimensão das amostras consideradas e apresentará tanto menor variabilidade, quanto maior for a dimensão das amostras. Compreender a utilização do Teorema Limite Central (TLC) na obtenção da distribuição de amostragem da média, quando se consideram amostras aleatórias de dimensão suficientemente grande, legitimando a utilização do modelo Normal e a utilização da média para estimar o valor médio. Reconhecer as limitações das estimativas pontuais.	Exemplificar a construção da distribuição de amostragem do estimador da proporção de homens numa população constituída por 3 mulheres e 2 homens, recolhendo amostras de dimensão 2. Conduzir, dada uma certa população, à obtenção da distribuição de amostragem da média, quando se pretende estimar o valor médio dessa população, utilizando a tecnologia gráfica para simular a recolha de amostras de determinada dimensão. Chamar a atenção dos alunos para a existência de duas fórmulas para calcular o desvio-padrão amostral, obtido a partir das fórmulas para a variância amostral: $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ e $S'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}$ e explicar que a razão da utilização da primeira, é ser a que fornece melhores estimativas quando se está a estimar o desvio-padrão populacional. Salientar que obter a distribuição de amostragem da média seria uma tarefa, a maior parte das vezes, impossível, pois teria de se calcular o valor da média para todas as amostras aleatórias de determinada dimensão, de populações de grandes dimensões ou eventualmente infinitas. Esta situação é resolvida pelo TLC, segundo o qual o modelo Normal é uma aproximação para a sua distribuição de amostragem, independentemente da forma da distribuição da população subjacente. Exemplificar a recolha de várias amostras aleatórias, da mesma dimensão, calculando o valor da média para cada uma delas e explorar esta situação, chamando a atenção para a impossibilidade de saber qual das estimativas se deve utilizar, para estimar o parâmetro valor médio, desconhecido, da população subjacente às amostras consideradas.	Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões do comportamento do sistema em estudo (C) Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões (D) Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)

Intervalo de confiança, para o valor médio, com uma confiança de 95%	Utilizar o modelo Normal como aproximação da distribuição de amostragem do estimador média, para estimar o valor médio μ, desconhecido, de uma população com desvio padrão σ, para obter a seguinte probabilidade $P\left(\overline{X}-1{,}96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\overline{X}+1{,}96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0{,}95$ e chamar ao intervalo $\left[\overline{X}-1{,}96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+1{,}96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ um intervalo de 95% de confiança para μ, em que se substitui o parâmetro σ, quando desconhecido, pelo desvio-padrão amostral.	Explorar o significado de intervalo de confiança, cuja leitura correta deve ser realçada, tendo em consideração que o aleatório está nos limites do intervalo, pelo que se deve ler “a probabilidade do intervalo conter μ, é 95%” e não “a probabilidade de μ estar contido”. Realçar o significado da confiança de 95%. Sugerir que essa confiança pode ser entendida do seguinte modo: se recolhessemos 100 amostras e se calculassemos para cada uma delas o intervalo $\left[\bar{x}-1{,}96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+1{,}96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ esperar-se-ia que aproximadamente 95 dos intervalos contivessem o valor médio; como, na prática, só se recolhe uma amostra, só se calcula um intervalo, não se sabendo se é um dos que contém ou não μ.	Compreende processos e fenómenos científicos que permitam a tomada de decisão (I)
Intervalo de confiança, para o valor médio, com outros níveis de confiança de $100(1-\alpha)\%$ Margem de erro	Reconhecer a fórmula geral para o intervalo de confiança, com uma confiança de $100(1-\alpha)\%$, $\left[\overline{X}-z_{1-\alpha/2}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{1-\alpha/2}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ onde $z_{1-\alpha/2}$ é o percentil de probabilidade $100(1-\alpha/2)\%$ e saber que a margem de erro é igual a metade da amplitude do intervalo.	Explorar a relação entre a margem de erro, a confiança e a dimensão da amostra a recolher, para construir a estimativa intervalar.	Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
Intervalo de confiança para a proporção (populacional) *p*	Reconhecer que a proporção (populacional) *p*, é um caso particular do valor médio de uma população constituída por uns e zeros, conforme a caraterística que se está a estudar está ou não presente na população e que o estimador que se utiliza é a proporção amostral, que se representa por $\hat{P}$. Saber fazer uma leitura adequada da informação veiculada pela comunicação social quando apresentam resultados de sondagens, na forma de intervalos de confiança.	Salientar que a proporção (amostral) é um caso particular da média, pelo que uma vez obtida a distribuição de amostragem da média, fica conhecida a distribuição de amostragem da proporção (amostral) $\hat{P}$. Orientar os alunos na obtenção do intervalo de confiança para a proporção *p*, admitindo que o modelo de probabilidade para a população X é $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline X & 1 & 0 \\ \hline \text{Probabilidade} & p & 1-p \\ \hline\end{array}$ Valor médio de $X=p$ Variância de $X=p(1-p)$	

<table>
<tr>
<td>Primitivas imediatas e Integrais definidos

Teorema Fundamental do Cálculo Integral

Áreas de figuras definidas por gráficos de funções

Propriedades das primitivas</td>
<td>Conhecer o processo de primitivação (antiderivação) como processo inverso da derivação.

Reconhecer o integral definido de uma função positiva como a área de uma região compreendida entre o gráfico da função e o eixo das abcissas.

Conhecer e aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo Integral e a Fórmula de Barrow para calcular integrais definidos.

Calcular áreas de figuras definidas por funções contínuas e positivas usando a Fórmula de Barrow.

Provar e aplicar as seguintes propriedades das primitivas (antiderivadas):
- $P(k\,f) = k\,P(f)$
- $P(f+g) = P(f) + P(g)$
generalizadas aos integrais.

Construir uma tabela de primitivas simples, envolvendo funções polinomiais, $\frac{1}{x}$, e^x, $sen(x)$ e $cos(x)$.

Usar exclusivamente primitivas de combinações lineares das funções da tabela referida anteriormente.</td>
<td>Promover o cálculo de primitivas (antiderivadas) tendo por base o conhecimento das derivadas de funções elementares já estudadas.

Discutir a relação entre o valor da área abaixo do gráfico de uma função contínua e positiva e a sua primitiva, para introduzir o Teorema Fundamental do Cálculo Integral.

Propor a determinação de áreas limitadas por gráficos de funções contínuas e positivas nos casos em que se conhece a primitiva.

Conduzir os alunos à formulação das propriedades das primitivas (antiderivadas) tendo por base o conhecimento das propriedades das derivadas.

Propor a construção de uma tabela de primitivas a partir da definição de primitiva, como por exemplo a seguinte:

<table>
<tr><th>Função</th><th>Primitiva</th></tr>
<tr><td>k</td><td>$kx + C$</td></tr>
<tr><td>x^n</td><td>$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$</td></tr>
<tr><td>e^x</td><td>$e^x + C$</td></tr>
<tr><td>$\frac{1}{x}$</td><td>$ln\|x\| + C$</td></tr>
<tr><td>$sen(x)$</td><td>$-cos(x) + C$</td></tr>
<tr><td>$cos(x)$</td><td>$sen(x) + C$</td></tr>
</table>
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Matrizes Conceito de matriz	Identificar matrizes e operações com matrizes em situações concretas. Entender o conceito de matriz e conhecer alguns casos particulares, nomeadamente matriz retangular, matriz quadrada, matriz linha, matriz coluna, matriz diagonal e matriz identidade.	Recorrendo a exemplos de situações reais, conduzir à noção de matriz de números reais, a partir da representação em tabela ou esquemas (por exemplo, em problemas económicos, de composição de misturas, de ligações ferroviárias ou rodoviárias entre cidades, etc.). Incentivar a atribuição de significado a um elemento específico da matriz, no contexto da situação que esta representa. Propor a identificação e construção de diferentes tipos de matrizes, e a identificação de situações que podem ser representadas por cada um dos tipos de matrizes.	
Operações com matrizes	Operações elementares com matrizes: adição, subtração, multiplicação (multiplicação por um escalar e multiplicação de duas matrizes). Analisar as propriedades da adição e da multiplicação de matrizes e os casos de impossibilidade (associados à dimensão das matrizes).	Retomar os exemplos trabalhados anteriormente para identificar e contextualizar as operações e o resultado que produzem, e antever propriedades das operações. Promover a determinação da matriz resultante da adição e da subtração de duas matrizes e analisar casos de impossibilidade. Propor o cálculo do produto de duas matrizes e analisar casos de impossibilidade. Fazer notar o caso das matrizes quadradas de uma certa ordem, especialmente a não comutatividade da multiplicação. Incentivar o recurso à tecnologia para analisar vários exemplos e identificar os casos de impossibilidade e a não comutatividade da multiplicação.	

Aplicações às transformações geométricas	Caraterizar translações através da soma de matrizes coluna. Caraterizar variações de tamanho (*scaling*), cisalhamentos (*shearing*) e rotações no plano, recorrendo a matrizes adequadas multiplicadas por matrizes coluna.	Recorrer a construções do GeoGebra para ilustrar as transformações geométricas realizadas sobre uma figura. Promover a identificação da multiplicação de matrizes com a composição de transformações geométricas. Referir a importância destes procedimentos com matrizes no moderno cinema de animação.	

Pensamento Computacional (Introdução à inferência estatística)

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada ou em problemas semelhantes, anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação do algoritmo a desenvolver. Antes de redigir o programa na linguagem Python, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.
Exemplo de programa em Python para explorar a noção de intervalo de confiança. Extraem-se sucessivas amostras, com a mesma dimensão, de uma população com distribuição Normal N(0,1) e para cada uma delas apresenta-se o intervalo de 95% de confiança para o valor médio. Pode verificar-se que este intervalo depende da amostra e que nem sempre contém o valor médio da população. Pode também fazer-se variar a dimensão das amostras e comparar as amplitudes dos intervalos.

```
import random
import statistics
import math

num_amostras=100
dim_amostra=20

for i in range(num_amostras):
    amostra=[random.normalvariate(0,1) for k in range(dim_amostra)]
    vmedio=statistics.mean(amostra)
    desvio_padrao=statistics.stdev(amostra)
    d=1.96*desvio_padrao/math.sqrt(dim_amostra)
    print('O intervalo de 95% de confiança para o valor médio é [',vmedio-d,',',vmedio+d ,']')
```

Nota: O programa foi criado em Python 3.7.4 para computador.

Possíveis aprofundamentos (Introdução à inferência estatística)

Nada se sugere atendendo à variedade de temas tratados.

Bibliografia de referência (Introdução à inferência estatística)

Alea – *Introdução à Inferência Estatística*, obtido de http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=133&Itemid=1205&lang=pt
COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.
Graça Martins, M. E. & Loura, L. (2002). *Estatística, Modelos de Probabilidade e Introdução à Inferência Estatística* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online
Graça Martins, M. E. (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

Pensamento Computacional (Primitivas imediatas e Integrais definidos)

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada ou em problemas semelhantes, anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação do algoritmo a desenvolver. Antes de redigir o programa na linguagem Python, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.
Exemplo de programa em Python para aproximar o valor de um integral. Na função integral_aproximado o intervalo de integração é dividido em N intervalos de igual comprimento e para cada intervalo multiplica-se o valor no ponto médio pelo tamanho do intervalo, resultando a aproximação do integral da soma dos contributos de todos os intervalos. O exemplo usado, $\int_1^5 \frac{e^x}{x} dx$, é o mesmo do Compêndio de Matemática, vol. 2, de Sebastião e Silva, e também aqui se calculam as aproximações com um número de intervalos que é sucessivamente duplicado, para se poder observar a estabilização progressiva das casas decimais dos valores obtidos.

```
def integral_aproximado(f,a,b,N):
    dt=(b-a)/N
    soma=0
    for k in range(N):
        soma+=f(a+k*dt+dt/2)
    return dt*soma

def f(x):
    import math
```

```
    return math.exp(x)/x

a=1
b=5
N=20
for d in range(10):
    N=2*N
    I=integral_aproximado(f,a,b,N)
    print('Com N=',N,' o integral aproximado dá: ',I)
```

Nota: O programa foi criado em Python 3.7.4 para computador.

Possíveis aprofundamentos (Primitivas imediatas e Integrais definidos)

Pode ser explorado o conceito de integral definido a partir da formulação de Riemann, discutindo como aplicação o cálculo aproximado de integrais a partir das somas de Riemann (Hughes-Hallett 1997, p. 158).
Pode ser explorado o uso do integral definido para determinar o valor médio de uma função contínua num intervalo (Hughes-Hallett 1997, p. 163).
Podem ser alargadas as técnicas de integração referindo a primitivação por partes, promovendo a sua utilização crítica.

Bibliografia de referência (Primitivas imediatas e Integrais definidos)

Apostol, T. (1999). *Cálculo Volume 1 - Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear*. Barcelona: Reverté.
Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.
Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática*, Universidade Aberta.
Haese, M. et al. (2019). *Mathematics - Analysis and Approaches HL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Haese, M. et al. (2019). *Mathematics - Applications and Interpretation HL 2* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Haese, M. et al. (2019). *Mathematics - core topics HL* (for use with IB Diploma Programme). Marleston: Haese Mathematics.
Hughes-Hallett, D., Gleason, A. et al (1997). Cálculo – volume 1. Rio de Janeiro: LTC editora.
Icart, J. (2021). Fonctions: Une Perspective Historique. Revue MathémaTICE, nº 75. Obtido de http://revue.sesamath.net/spip.php?article1414
Pina, H. (2010). *Métodos Numéricos*, Escolar Editora, Lisboa.
Sebastião e Silva, J. (1975-1978). Compêndio de Matemática (3 volumes). Lisboa: GEP.
SESAMATH - *Manuel Maths 1re - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019
SESAMATH - *Manuel Maths 2de - Programme 2019*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms2_2019
SESAMATH - *Manuel Maths Terminale - Spécialité - Édition 2020*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=mstsspe_2020

Pensamento Computacional (Matrizes)

Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes e a estabelecer ordem entre eles. O reconhecimento de padrões na tarefa (ou situação) apresentada, ou em problemas semelhantes anteriormente resolvidos, poderá contribuir para facilitar a estruturação das etapas de resolução.
No estudo das matrizes podem ser usadas as capacidades das calculadoras científicas e gráficas. Quase todas têm a possibilidade de escrever matrizes e operar com as matrizes.
Também podem ser usadas páginas interativas online como por exemplo a seguinte:
Calculadora de matrizes: https://matrixcalc.org/pt/
O estudo das transformações geométricas a partir da sua representação matricial pode ser feito de forma interativa a partir de recursos disponíveis em várias páginas. Por exemplo:
- 2x2 matrix transformation: https://www.geogebra.org/m/QxWrMgBV
- Matrix Representation of a "Stretch": https://www.geogebra.org/m/AhNWDWPu

Possíveis aprofundamentos (Matrizes)

Podem ser exploradas as ligações entre a indexação do Google e as matrizes (Almeida, 2010).
Pode ser explorada a relação entre as matrizes e suas operações e a resolução de sistemas, referindo o método de Gauss.
Podem ser exploradas as relações entre as matrizes e os grafos, discutindo a representação de grafos usando matrizes, através do conceito de matriz de adjacência.
Podem ser exploradas várias aplicações das matrizes, como por exemplo a modelos populacionais; a este respeito pode ser referida a gestão de rebanhos (Queiró, 1982) ou o crescimento populacional usando o modelo de Leslie (Crisler et al. 1999, p. 132).

Bibliografia de referência (Matrizes)

Abrantes, P. (1994). Contagens, Grafos e Matrizes nos nossos programas? *Educação & Matemática*, nº 30, p. 17-20.
Almeida, M., Celeman, S. (2010) A Matemática escondida no Google, *Revista do Professor de Matemática*, nº 80. Obtida de: https://rpm.org.br/cdrpm/80/10.html
Anton, H., & Busby, R. (2003). *Contemporary Linear Algebra*. Hoboken, NJ.: John Wiley & Sons.
COMAP (1999). *Geometry and its applications-Graph Models*. COMAP, Lexington: COMAP.
COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.
Crisler, N., Fisher, P., Froelich, G. (1999). *Discrete Mathematics through applications*. New York: COMAP & W. H. Freeman and Company.
Febles, C. E. (1994). Matrizes por detrás das redes. *Educação & Matemática*, nº 29, p. 3-5 e 10.
Martins, R. (2012). Como é que o Google googla. *Isto é Matemática T01E02*. Obtido de https://youtu.be/DZ0hq2sQg28
Pesco, D. U., & Bortolossi, H. J. (2013). Imagens digitais e matrizes. *Gazeta de Matemática*, nº 169, p. 44-48.
Queiró, J.F. (1982). Ovelhas matrizes e computadores, *Actas do 4.º Encontro da Delegação Regional do Centro da SPM*, Covilhã 1982.
SESAMATH - *Manuel Terminale Expertes*. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=mstsexp_2020

Cofinanciado por:
PORTUGAL 2020
UNIÃO EUROPEIA
Fundo Social Europeu