PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

SUC11 – atividades práticas

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

No domínio das *Sucessões*, a maior novidade será o tratamento "de facto" do Princípio de indução matemática.

Este método de demonstração para propriedades nos números naturais (ou, mais geralmente, nos números inteiros a partir de um inteiro dado) já era referido no anterior programa («*as propriedades das progressões e outras sucessões definidas por recorrência justificam a aprendizagem do método de indução matemática*») mas, como não constava na coluna "Desenvolvimento", acabava por não ser efetivamente tratado na maioria das salas de aula e dos manuais.

De salientar também que o novo programa revela a preocupação de colocar o estudo das sucessões antes do estudo das funções, para que se possa fazer uma abordagem coerente e rigorosa do conceito de limite de funções (segundo Heine) em detrimento da abordagem intuitiva dos limites que era proposta no anterior programa e que propunha que o conceito de limite se desenvolvesse recorrendo ao estudo das funções racionais, respetivas propriedades e assintotas.

1. Utilize o princípio de indução matemática para provar, em $\mathbb{N}$, as seguintes propriedades:

   1.1. $a^n \times b^n = (a \times b)^n$

   1.2. $\sum_{j=1}^{n} (2j - 1) = n^2$

   1.3. $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. (onde $x > 0$)

2. Prove, para qualquer número natural n, que $(4^n - 1)$ é um múltiplo de 3

3. Utilize o princípio de indução matemática para demonstrar que a soma dos n primeiros números naturais é dada por $\frac{n(n+1)}{2}$.

Exemplo de resolução

1. Utilize o princípio de indução matemática para provar, em $\mathbb{N}$, as seguintes propriedades:

   1.1. $a^n \times b^n = (a \times b)^n$

Resolução:

Para $n = 1$, tem-se: $a \times b = a \times b$

Admitindo que a propriedade é válida para n, vamos verificar se se mantém válida para $n + 1$:

$$a^{n+1} \times b^{n+1} = a^n \times a \times b^n \times b = a^n \times b^n \times a \times b = (a \times b)^n \times (a \times b) = (a \times b)^{n+1}$$

c. q. d.

Metas Curriculares

4. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência do seguinte modo:

$$(u_n) = \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{4+u_n}{3} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

4.1. Mostre, por indução, que $u_n > 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4.2. Tendo em conta o resultado da alínea anterior, mostre que (u_n) é uma sucessão decrescente.

4.3. Justifique que u_n é convergente é calcule o respetivo limite.

Para além da novidade do tratamento efetivo do princípio de indução matemática, as Metas Curriculares também preveem que se façam, com regularidade, diversas demonstrações sobre propriedades das sucessões.

5. Utilizando a definição apropriada, prove que:

5.1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-5)=+\infty$;

5.2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(-2n+1)=-\infty$;

5.3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7}{n+5}=0$;

5.4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6n+1}{2n-3}=3$.

6. Considere sucessões (u_n) e (v_n) tais que
$\lim_{n \to +\infty} u_n = a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n \to +\infty} v_n = b \in \mathbb{R}$.

6.1. Para $\delta > 0$, justifique a existência de uma ordem $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq p_1 \Rightarrow |u_n - a| < \delta$ e de uma ordem $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq p_2 \Rightarrow |v_n - b| < \delta$.

6.2. Mostre que existe uma ordem a partir da qual se tem
$a + b - 2\delta < u_n + v_n < a + b + 2\delta$.

6.3. Conclua que $\lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = a + b$.

Seguem-se alguns exemplos de atividades mais usuais.

7. Determine uma expressão do termo geral da progressão aritmética (u_n) sabendo-se que $u_3 = 10$ e que $u_{15} = 40$.

8. Mostre que as sucessões definidas por um termo geral da forma $u_n = an + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ são progressões aritméticas de razão a.

9. Calcule a soma dos 35 primeiros termos da progressão $u_n = 1 - 2n$.

10. Prove que o produto de duas progressões geométricas é ainda uma progressão geométrica de razão igual ao produto das respetivas razões.

11. Prove que as sucessões definidas por um termo geral do tipo $u_n = a \times b^{cn+d}$, $n \in \mathbb{N}$, $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $d \in \mathbb{R}$ são progressões geométricas de razão b^c.