PROGRAMA
e
Metas Curriculares
Matemática A

INTRODUÇÃO AO DOMÍNIO FRVR

António Bivar, Carlos Grosso, Filipe Oliveira , Luisa Loura, Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

FUNÇÕES 10.º ano – Programa 2001

Funções e Gráficos de Funções; Funções polinomiais ; Função Módulo

Função; gráfico e representação gráfica;

- **<u>Estudo intuitivo</u> de propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica:**
  - **- função quadrática***
  - **- função módulo ***
  - **- funções polinomiais de grau 3 e 4 ***
  - **- Decomposição de polinómios em factores (regra de Ruffini)**
  - **- Resolução de problemas.**

* **análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das famílias de funções definidas por**

$y = f(x) + a,\quad y = f(x + a),\quad y = af(x),\quad y = f(ax),\quad y = |f(x)|,$

com *a* positivo ou negativo, descrevendo o resultado com recurso à linguagem das transformações geométricas.

FUNÇÕES 10.º ano – Programa 2001

Funções e Gráficos de Funções; Funções polinomiais ; Função Módulo

Função; gráfico e representação gráfica;

- **<u>Estudo intuitivo</u> de propriedades das funções e dos seus gráficos, tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica:**

As propriedades sugeridas são: domínio, contradomínio, pontos notáveis (intersecção com os eixos coordenados), monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, limites nos ramos infinitos. Os estudantes devem determinar pontos notáveis e extremos tanto de forma exacta como de forma aproximada (com uma aproximação definida *a priori*) a partir do gráfico traçado na calculadora gráfica ou computador.

- O raciocínio matemático é por excelência o raciocínio hipotético-dedutivo,

  embora o raciocínio indutivo desempenhe também um papel fundamental na atividade matemática, uma vez que preside, em Matemática, à formulação de conjeturas.

- Os alunos devem ser capazes de estabelecer conjeturas, em alguns casos, após a análise de um conjunto de situações particulares, nomeadamente pela exploração das potencialidades dos recursos tecnológicos.

- As conjeturas formuladas mas não demonstradas têm um interesse limitado, devendo os alunos ser alertados para este facto e incentivados a justificá-las *a posteriori.*

10º ano (Tópicos do Programa)

Generalidades acerca de funções

- Produtos cartesianos de conjuntos;
- Gráficos de funções;
- Restrições de uma função;
- Imagem de um conjunto por uma função;
- Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas;
- Composição de funções;
- Função inversa de uma função bijetiva.

Generalidades acerca de funções reais de variável real

- Funções reais de variável real; funções definidas por expressões analíticas;
- Propriedades geométricas dos gráficos de funções;
- Paridade; simetrias dos gráficos das funções pares e das funções ímpares;
- Relação geométrica entre o gráfico de uma função e o da respetiva inversa;
- Relação entre o gráfico de uma função f e os gráficos das funções $af(x)$, $f(bx)$, $f(x+c)$ e $f(x)+d$, a, b, c, d números reais, a e b não nulos.

Metas Curriculares

10º ano (Tópicos do Programa)

Monotonia, extremos e concavidade

- Intervalos de monotonia de uma função real de variável real; caso das funções afins e caso das funções quadráticas;
- Vizinhança de um ponto da reta numérica; extremos relativos e absolutos;
- Sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real.

Estudo elementar das funções quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica e módulo e de funções definidas por ramos

- Extremos, sentido das concavidades, raízes e representação gráfica de funções quadráticas;
- Funções definidas por ramos;
- Estudo da função $x \to a|x-b|+c$, $a \neq 0$;
- As funções $x \to \sqrt{x}$ e $x \to \sqrt[3]{x}$ enquanto funções inversas;
- Domínio e representação gráfica das funções definidas analiticamente por $f(x) = a\sqrt{x-b}+c$, $a \neq 0$ e $f(x) = a\sqrt[3]{x-b}+c$, $a \neq 0$;
- Estudo de funções definidas por ramos envolvendo funções polinomiais, módulos e radicais.

Metas Curriculares

10º ano (Tópicos do Programa)

Resolução de problemas

- Equações e inequações envolvendo as funções polinomiais, raiz quadrada e raiz cúbica, e a composição da função módulo com funções afins e com funções quadráticas;
- Resolução de problemas envolvendo as propriedades geométricas dos gráficos de funções reais de variável real;
- Resolução de problemas envolvendo as funções afins, quadráticas, raiz quadrada, raiz cúbica, módulo, funções definidas por ramos e a modelação de fenómenos reais.

ALG10

Polinómios

- Divisão euclidiana de polinómios e regra de Ruffini;
- Divisibilidade de polinómios; Teorema do resto;
- Multiplicidade da raiz de um polinómio e respetivas propriedades;
- Resolução de problemas envolvendo a divisão euclidiana de polinómios, o Teorema do resto e a fatorização de polinómios;
- Resolução de problemas envolvendo a determinação do sinal e dos zeros de polinómios.

10º ano – FRVR (Objetivo Geral 2)

11. Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$), por «contração vertical (respetivamente dilatação vertical) de coeficiente a» a transformação ϕ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (x, ay).
12. Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em D_f por $g(x) = af(x)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela contração vertical (respetivamente pela dilatação vertical) de coeficiente a.

13. Designar, dado um plano munido de um referencial ortogonal e um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$), por «contração horizontal (respetivamente dilatação horizontal) de coeficiente a» a transformação ϕ do plano que ao ponto $P(x, y)$ associa o ponto $\phi(P)$ de coordenadas (ax, y).
14. Reconhecer, dados uma função real de variável real f, um número $0 < a < 1$ (respetivamente $a > 1$) e um plano munido de um referencial ortogonal, que o gráfico cartesiano de uma função g definida em $D_g = \left\{\frac{x}{a} : x \in D_f\right\}$ por $g(x) = f(ax)$ é a imagem do gráfico cartesiano de f pela dilatação horizontal (respetivamente pela contração horizontal) de coeficiente $\frac{1}{a}$.

Metas Curriculares

10º ano - FRVR

Monotonia, extremos e concavidade

- Intervalos de monotonia de uma função real de variável real; caso das funções afins e caso das funções quadráticas;
- Vizinhança de um ponto da reta numérica; extremos relativos e absolutos;
- Sentido da concavidade do gráfico de uma função real de variável real.

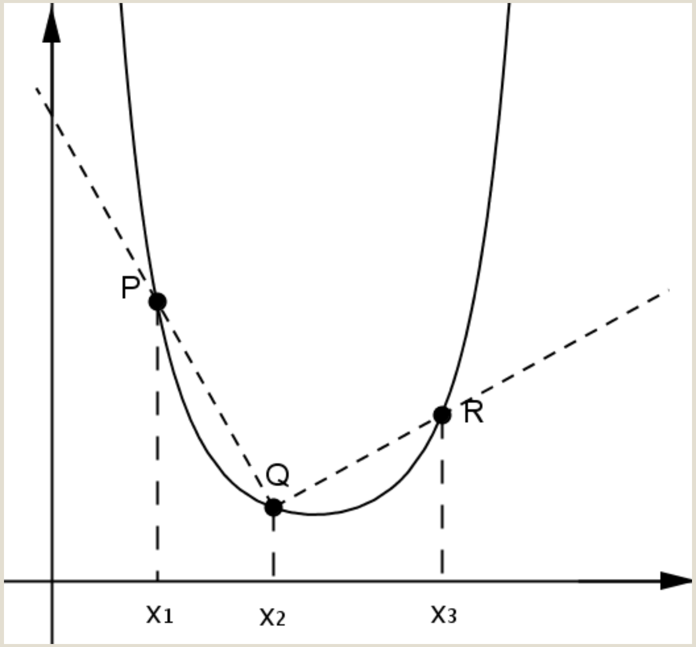
Objetivo Geral 3

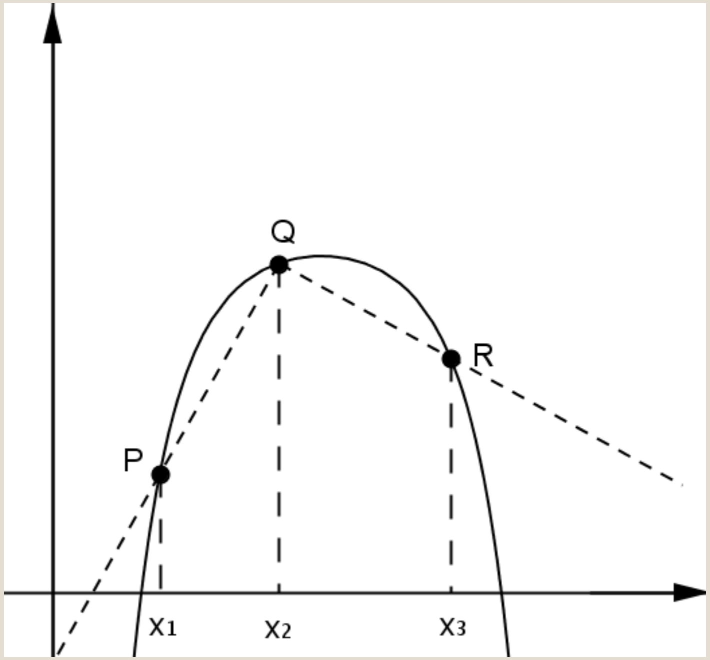
8. Demonstrar que uma função afim definida por $f(x) = ax + b$ é estritamente crescente (respetivamente decrescente) em $\mathbb{R}$ se e somente se $a > 0$ (respetivamente $a < 0$).
9. Demonstrar que, dada uma função quadrática da forma $f(x) = ax^2$, se $a > 0$ então f é decrescente em $]-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty[$ e que, se $a < 0$, então f é crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$.

Metas Curriculares

10ºANO – Estudo da concavidade do gráfico

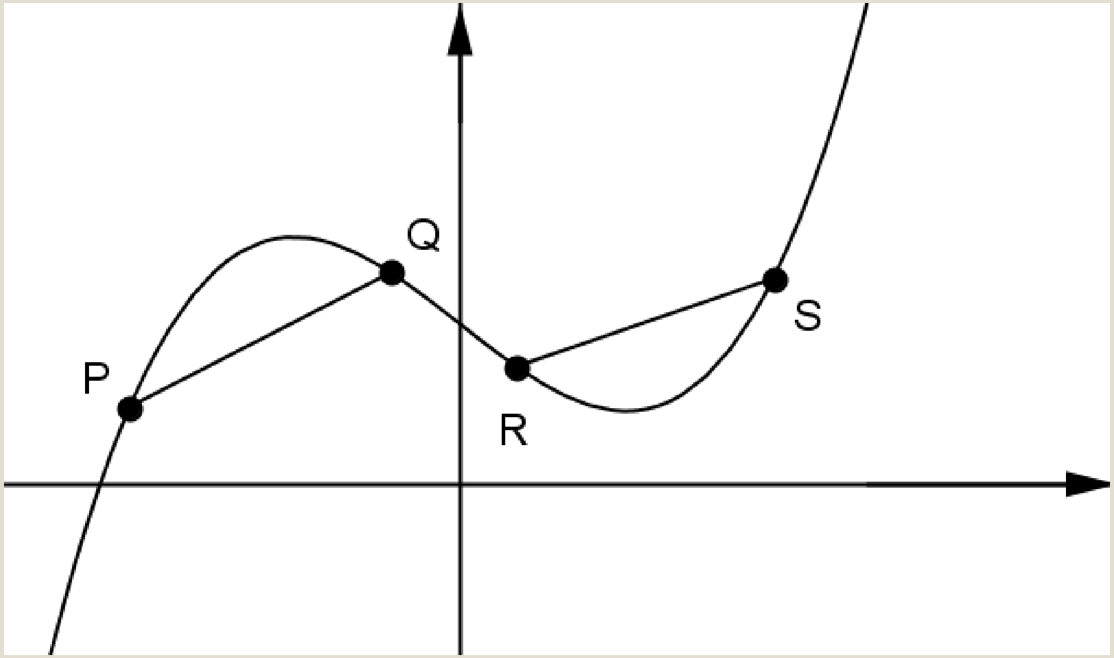
Identificar, dada uma função real de variável real f, o gráfico de f como «tendo a concavidade (estritamente) voltada para cima» (respetivamente como «tendo a concavidade (estritamente) voltada para baixo») num dado intervalo $I \subset D_f$ se dados quaisquer três pontos P, Q e R do gráfico, de abcissas em I tais que $x_P < x_Q < x_R$, o declive da reta PQ é inferior (respetivamente superior) ao da reta QR.





10ºANO – Estudo da concavidade do gráfico

Saber que uma função real de variável real tem a concavidade (estritamente) voltada para cima (respetivamente para baixo) num dado intervalo $I \subset D_f$ se e somente se dados quaisquer dois pontos P e Q do gráfico, de abcissas em I, a parte do gráfico de f de abcissas estritamente situadas entre as abcissas de P e Q ficar "abaixo" (respetivamente "acima") do segmento de reta $[PQ]$.



10ºANO – Estudo da concavidade do gráfico

8. +Reconhecer, dado um número real não nulo a, que o gráfico da função f definida pela expressão $f(x) = ax^2$ tem, em $]-\infty, +\infty[$, a concavidade voltada para cima se $a > 0$ e voltada para baixo se $a < 0$.

1. Considere a função definida em $\mathbb{R}$ pela expressão $f(x) = 7x^2$.
   1.1 Calcule as ordenadas dos pontos P, Q e R do gráfico de f, sabendo que as respetivas abcissas são 0, 2 e 5.
   1.2 Compare o declive das retas PQ e QR.
   1.3 Repita o exercício da alínea anterior escolhendo três pontos arbitrários P, Q e R do gráfico de f, de abcissas respetivamente $x_P < x_Q < x_R$ e conclua quanto ao sentido da concavidade do gráfico de f.

2. *Considere a função f definida, em $\mathbb{R}$, pela expressão $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$. Considere ainda pontos P, Q e R pertencentes ao gráfico de f e tais que, num referencial cartesiano, as respetivas abcissas verificam a condição: $x_P < x_Q < x_R$.
   2.1 Exprima em função das abcissas de P e de Q o declive da reta PQ.
   2.2 Exprima em função das abcissas de Q e de R o declive da reta QR.
   2.3 Considere $a > 0$ e compare os declives das retas PQ e QR.
   2.4 Considere $a < 0$ e compare os declives das retas PQ e QR.
   2.5 Conclua qual a relação entre o sinal de a e o sentido da concavidade do gráfico de f.

11ºANO (Tópicos do Programa)

- **Funções Trigonométricas (TRI11 – 7., 8. e 9.)**
- **Sucessões**

  - Generalidades;
  - Principio de indução;
  - Progressões aritméticas e geométricas;
  - Limites de sucessões.

- **Funções reais de variável real**
  - Limites segundo Heine de funções reais de variável real

    (...) Funções racionais (2.6), 4.1, 4.4 e 4.5
  - Derivadas de funções reais de variável real ;

A noção de limite é introduzida de forma cuidada. Uma abordagem puramente intuitiva dos limites leva rapidamente a insuficiências concetuais graves. É pois exigida, em situações muito simples, a justificação da convergência de certas sucessões recorrendo diretamente à definição. É também desenvolvida, de forma bastante completa, a álgebra dos limites, incluindo uma análise das situações ditas indeterminadas, devendo os alunos justificar igualmente alguns destes resultados.

No domínio *Funções Reais de Variável Real*, do 11.º ano, utilizam-se os conceitos introduzidos no domínio *Sucessões*, para, pelo processo atribuído a Heine, ficar definida a noção de limite de uma função, num dado ponto ou em mais ou menos infinito.

A definição de limite segundo Heine – que já é comum no Ensino Secundário – permite, de forma bastante imediata estender ao caso de funções reais a álgebra de limites estudada a propósito das sucessões, bem como os teoremas de convergência por comparação, como o Teorema das funções enquadradas, que é uma consequência direta, com esta abordagem, do Teorema das sucessões enquadradas e que são estudados no 12.º ano. Apresenta-se em seguida a noção de continuidade e, como uma aplicação da noção de limite de uma função, o estudo das assíntotas, em particular no caso do gráfico de uma função racional.

Continuidade de funções

- Função contínua num ponto e num subconjunto do respetivo domínio;
- Continuidade da soma, diferença, produto, quociente e composição de funções contínuas;
- Continuidade das funções polinomiais, racionais, trigonométricas, raízes e potências de expoente racional.

Assíntotas ao gráfico de uma função

- Assíntotas verticais e assíntotas oblíquas ao gráfico de uma função;
- Resolução de problemas envolvendo a determinação das assíntotas e da representação gráfica de funções racionais definidas analiticamente por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$;
- Resolução de problemas envolvendo a determinação de assíntotas ao gráfico de funções racionais e de funções definidas pelo radical de uma função racional.

3. Definir assíntotas ao gráfico de uma função

1. Identificar, dado um referencial cartesiano, uma função real de variável real f e $a \in \mathbb{R}$, a reta de equação $x = a$ como « assíntota vertical ao gráfico de f» quando pelo menos um dos limites laterais de f no ponto a for infinito.
2. Designar, dada uma função real de variável real f e um referencial cartesiano, a reta de equação $y = mx + b$ $(m, b \in \mathbb{R})$ por «assíntota ao gráfico de f em $+\infty$» (respetivamente por «assíntota ao gráfico de f em $-\infty$») se $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (mx + b)) = 0$ (respetivamente se $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (mx + b)) = 0$) e designá-la, quando $m = 0$, por «assíntota horizontal».
3. Provar, dada uma função real de variável real f, que a condição $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = m$ (respetivamente $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = m$) é necessária (mas não suficiente) para que exista uma reta de declive m que seja assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ (respetivamente em $-\infty$).

4. Resolver problemas

1. +Resolver problemas envolvendo o estudo de funções racionais.
2. +Calcular, por meios algébricos, limites de funções reais de variável real em situação de indeterminação e referir um desses cálculos como um «levantamento da indeterminação».
3. +Resolver problemas envolvendo a noção de limite e de continuidade de uma função real de variável real.
4. +Resolver problemas envolvendo a determinação das assíntotas e da representação gráfica de funções racionais definidas em $\mathbb{R}\backslash\{c\}$ por $f(x) = a + \frac{b}{x-c}$.
5. +Resolver problemas envolvendo a determinação de assíntotas ao gráfico de funções racionais e de funções definidas pelo radical de uma função racional.

Utilização da Tecnologia

Os professores e os alunos têm ao seu dispor, por exemplo, um vasto conjunto de recursos que facilitam o cálculo, as representações geométricas e a representação gráfica de funções, mas importa que os alunos adquiram capacidade crítica para reconhecer as situações em que a tecnologia não permite só por si justificar a adequação dos resultados encontradas ao problema proposto ou ilustrar devidamente os conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos.

A utilização da tecnologia não pode, pois, substituir a compreensão conceptual, a proficiência no cálculo e a capacidade de resolver problemas. Assim, os alunos devem dominar procedimentos como operar com polinómios, efetuar representações de gráficos de funções, resolver equações, calcular limites e derivadas sem necessitarem de utilizar recursos tecnológicos (calculadoras, computadores, etc.) que substituam algumas das capacidades matemáticas inerentes a esses procedimentos. Apenas a memorização e a compreensão cumulativa de conceitos, técnicas e relações matemáticas permitem alcançar conhecimentos progressivamente mais complexos e resolver problemas progressivamente mais exigentes.

Em particular o professor deve alertar os alunos para as limitações das calculadoras e computadores, sublinhando sempre a importância de relacionar quer as representações gráficas observadas, quer os valores encontrados, com o conhecimento teórico que permite atribuir o devido significado a essas representações e valores.

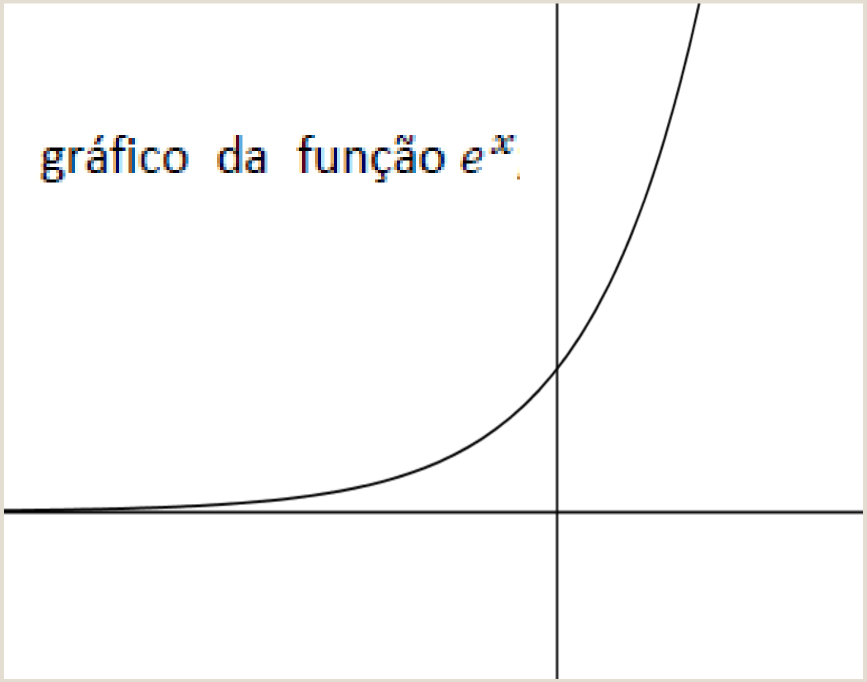
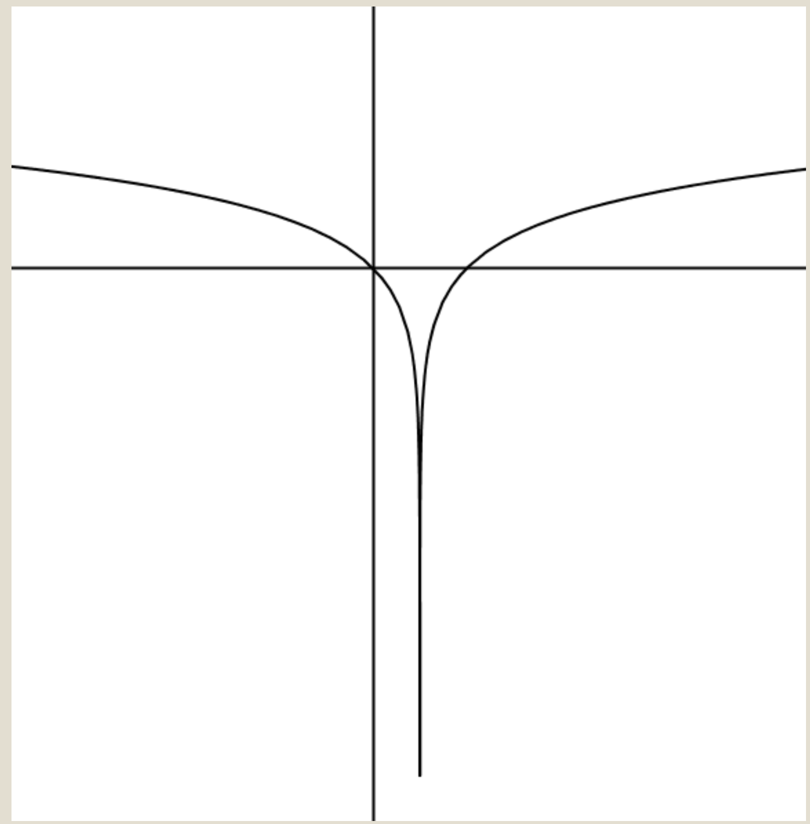
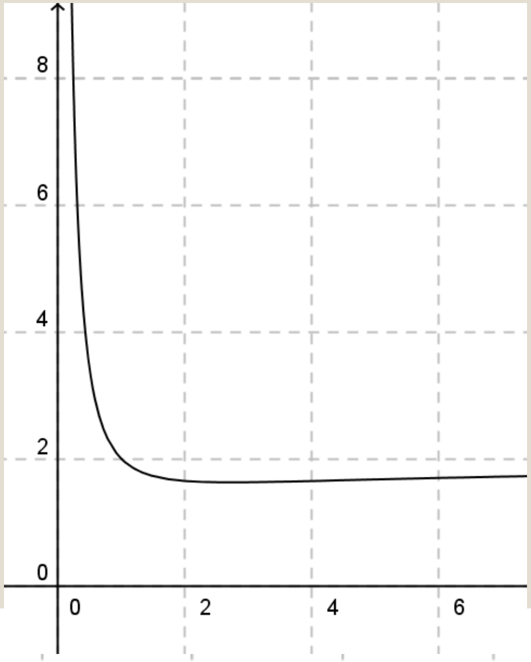
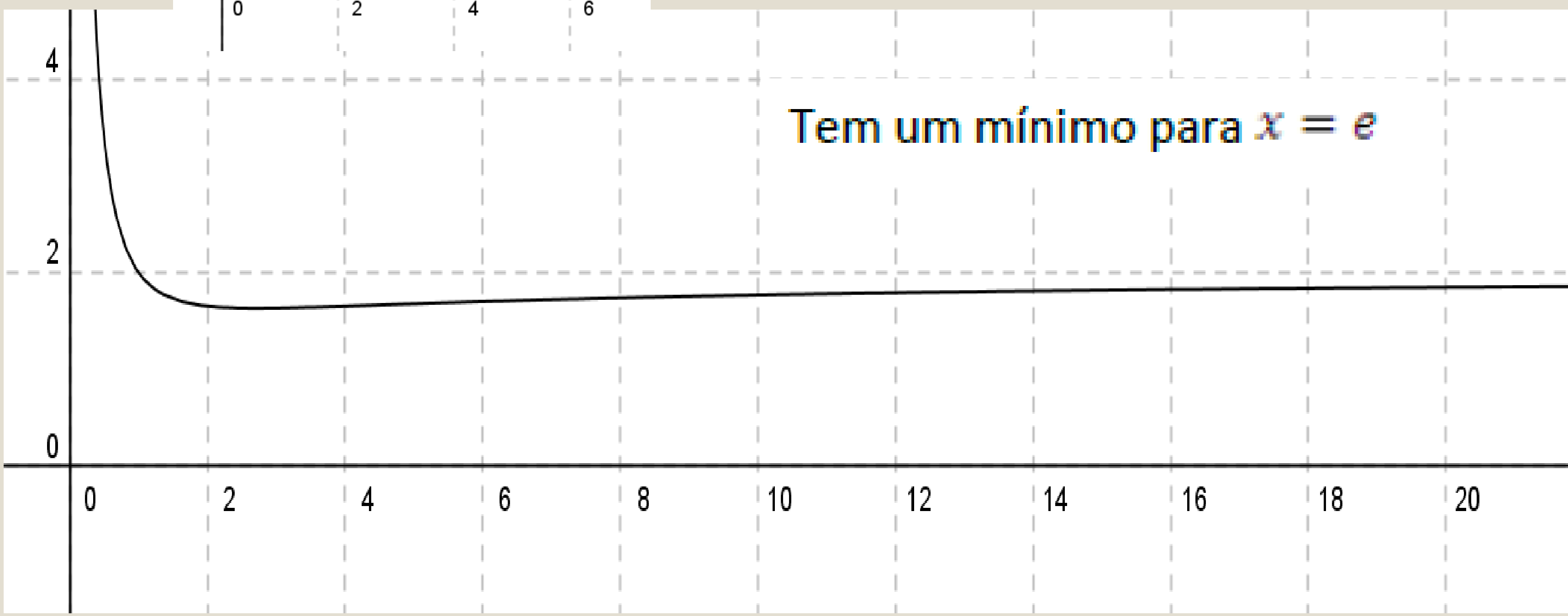


Gráfico da função ln|x-1|





Função f definida por $f(x) = \frac{2x - \ln(x)}{x}$



Tem um mínimo para $x = e$

É um erro grave,

- Pensar que se pode provar a irracionalidade de um número através da calculadora.

- Concluir que uma função definida numa infinidade de pontos é monótona através da calculadora que só dá o valor (com aproximação) da função num subconjunto finito de pontos.

- Averiguar se uma sucessão é convergente através unicamente da calculadora.

ou mais geralmente,

- Deduzir qualquer propriedade do gráfico de uma função que necessite do conhecimento dos valores da função numa infinidade de pontos.

Como é evidente, a calculadora gráfica pode sempre ser utilizada para ilustrar propriedades de gráficos de funções adequadamente escolhidas pelo professor, ou para que o aluno teste o resultado de variações de parâmetros em classes de funções de que já tenha algum conhecimento teórico e, de maneira geral, para uma abordagem experimental ao estudo de funções, desde que devidamente controlada e acompanhada de uma análise crítica da validade de conjeturas que essas experiências possam induzir.

Neste sentido, considera-se que no Ensino Secundário a tecnologia, e mais especificamente a calculadora gráfica, deve ser utilizada em sala de aula e consequentemente em certos instrumentos de avaliação (na resolução de problemas requerendo cálculos de valores aproximados de soluções de determinado tipo de equações ou de funções envolvendo, por exemplo, razões trigonométricas, logaritmos, ou exponenciais) mas que se deve evitar a sua utilização em outras provas de avaliação em que os conteúdos e capacidades envolvidas claramente o não justifiquem ou mesmo o desaconselhem.