GEOMETRIA SINTÉTICA

Matemática A
10.º ano

Coletânea de tarefas das turmas piloto

2023/2024

Ficha técnica

Título:

Coletânea de tarefas das turmas piloto - Geometria sintética (Matemática A 10.º ano)

Autoria e adaptação:

Professores das turmas piloto de Matemática A

Revisão:

Grupo de Trabalho de Desenvolvimento Curricular e Profissional de Matemática do Ensino Secundário

Imagem da capa:

Adaptada de imagem de utilização livre para fins não comerciais, disponível em https://www.pexels.com/photo/a-group-of-people-planning-while-looking-at-the-laptop-7550298/

Data:

Lisboa, abril de 2024

Nota de apresentação

A Direção-Geral da Educação (DGE) tem vindo a conceber e a concretizar um conjunto de atividades destinadas a apoiar a generalização dos programas (Aprendizagens Essenciais) de Matemática para os 10.°, 11.° e 12.° anos de escolaridade, designadamente nas disciplinas de Matemática A, Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) e nos módulos de Matemática dos Cursos Profissionais.

É essencialmente no âmbito do **Grupo de Trabalho (GT) do Desenvolvimento Curricular e Profissional em Matemática para o Ensino Secundário (DCPMES)** que tais atividades têm sido apresentadas, pensadas, discutidas e planeadas. Integram este GT os docentes e investigadores Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, Ana Breda, António Cardoso, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Cristina Negra, Emanuel Martinho, Helder Manuel Martins, Hélia Jacinto, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Manuel Torres, Maria Teresa Santos, Nélia Amado, Nélida Filipe, Paulo Correia, Pedro Freitas, Pedro Macias Marques, Raúl Gonçalves, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

As Coletâneas de Tarefas destinam-se a apoiar a implementação dos programas de Matemática já referidos. São materiais que foram na sua grande maioria testados em turmas piloto que se iniciaram no ano letivo de 2023/2024 e são acompanhados de alguns dos comentários motivados pela sua aplicação em sala de aula. Contudo, não substituem outros elementos de estudo e de consulta, mas constituem certamente referências de qualidade que, com certeza, ajudarão os professores de Matemática a aprofundar os seus conhecimentos sobre a natureza e as finalidades dos programas, sobre questões matemáticas, pedagógicas e didáticas ou sobre a conceção e o desenvolvimento de projetos. Neste sentido, são materiais que, passados pela prova essencial da realidade da sala de aula, podem apoiar os professores na seleção e na planificação de tarefas que mais facilmente concretizem as ideias inovadoras do currículo e envolvam os alunos em atividades matemáticas relevantes, empreendendo uma formação matemática abrangente e inovadora.

A aprendizagem de conceitos estruturantes e de competências essenciais dos alunos no âmbito da cidadania, implica disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos, e das abordagens a cada tema, valorizando competências algébricas em paralelo com métodos numéricos e o raciocínio dedutivo a par do recurso à tecnologia. Estas Coletâneas de Tarefas pretendem oferecer exemplos muito concretos de forma a contribuir para esse objetivo.

Os professores das Turmas Piloto e os restantes elementos do GT DCPMES são professores, formadores e investigadores com percursos académicos e profissionais diversificados e significativos. Estas Coletâneas de Tarefas foram aplicadas num conjunto de turmas em escolas de Portugal Continental que aceitaram integrar a antecipação da aplicação das novas Aprendizagens Essenciais, com a preocupação de encontrar uma grande diversidade regional, com escolas localizadas em grandes centros urbanos e localizadas no interior, com turmas grandes e turmas pequenas, com alunos com condições socioeconómicas muito diferentes, dando garantia de uma melhor adequação aos alunos das escolas de hoje.

A testagem das tarefas agora publicadas é uma característica essencial do trabalho presente ao permitir uma reflexão sobre a aplicação prática das tarefas em salas de aula reais e um posterior refinamento dessas mesmas tarefas. Além do mais irão permitir, mais facilmente, uma aplicação a diferentes ambientes escolares e adaptações em diferentes direções, atendendo aos detalhes que emergiram da sua aplicação concreta. Os professores das turmas piloto e respetivas escolas/agrupamentos de escolas em 2023/2024 foram:
Alexandra Ferrão (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo), Ana Catarina Lopes (Escola Secundária Cacilhas Tejo), Ana Cristina Gomes (Agrupamento de Escolas Soares Basto), Cristina Cruchinho (Escola Secundária Filipa de Vilhena), Cristina Fernandes (Agrupamento de Escolas de Sampaio), Elisabete Sousa (Agrupamento de Escolas de Trancoso), Elisabete Sousa Almeida (Agrupamento de Escolas de Sátão), Elsa Gomes (Escola Secundária de Paços de Ferreira), Eunice Tavares Pita (Agrupamento de Escolas Gabriel Pereira), Helder Manuel Martins (Escola Secundária António Damásio), Joaquim Rosa (Escola Secundária Luís de Freitas Branco), Maria Teresa Santos (Escola Profissional de Agricultura e Desenvolvimento Rural de Vagos), Marília Rosário (Escola Secundária de Tomaz Pelayo), Marisabel Antunes (Escola Secundária D. Dinis, Coimbra), Nélida Filipe (Agrupamento de Escolas Dra. Laura Ayres), Paula Teixeira (Escola Secundária João de Barros), Paulo Correia (Agrupamento de Escolas de Alcácer do Sal), Raul Aparício Gonçalves (Agrupamento de Escolas de Ermesinde), Rui Gonçalo Espadeiro (Agrupamento de Escolas de Redondo), Sandra Afonso (Escola Secundária José Saramago), Sara Faria Monteiro (Escola Secundária Pedro Nunes), Verónica Lopes (Agrupamento de Escolas Poeta António Aleixo).

A DGE tem vindo a desenvolver um processo de apoio sistemático e persistente aos professores de Matemática que iniciam em 2024/2025 a generalização dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário, e que inclui, entre outras iniciativas: a dinamização de Turmas Piloto em mais de uma vintena de escolas; a edição de várias Coletâneas de Tarefas e outras brochuras; a formação de professores formadores que determina uma rede nacional de professores que, localmente, apoiam os seus colegas e desenvolvem ações de formação para todas as escolas; uma base de dados de tarefas novas ou já anteriormente publicadas e adequadas aos novos programas; e um conjunto de seminários a distância (*webinars*) dedicados a temas relevantes suscitados pelos novos programas.

Os desafios dos tempos modernos são significativos e por isso é fundamental que o currículo na escolaridade obrigatória dê resposta a todos os alunos, tendo em vista a sua formação matemática enquanto cidadãos, proporcionando-lhes uma experiência rica, adequada ao seu nível etário e ao alcance de todos, tendo o cuidado dos formalismos e dos níveis de abstração serem adequados ao trabalho a desenvolver em cada tema. A matemática deve ser um importante contributo para a resolução de problemas, possibilitando que os alunos mobilizem e desenvolvam o seu raciocínio com vista à tomada de decisões e à construção e uso de estratégias adequadas a cada contexto.

Finalmente, esperamos que as professoras e os professores de Matemática do ensino Secundário, bem como toda a comunidade, possam reconhecer utilidade nos materiais agora disponibilizados, quer no âmbito da planificação das suas atividades de ensino quer ainda como referências e instrumentos de reflexão, de autoformação e de desenvolvimento profissional. A DGE e o GT DCPMES, como lhes compete, não deixarão de continuar a desenvolver esforços para apoiar e melhorar o desenvolvimento curricular na disciplina de Matemática. Para tal, continuamos a contar com os professores e com o seu profissionalismo empenhado, informado e consciente, elemento essencial e decisivo no processo de efetiva melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática.

Pelo GT DCPMES

Jaime Carvalho e Silva
Coordenador

TEMA - GEOMETRIA SINTÉTICA

Aulas (50 min)	Nome da Tarefa	Tópicos/ Subtópicos	Objetivos de Aprendizagem	Tipo de trabalho	Ideias chave das AE	Áreas de Competência do PASEO
1	Tarefa 1 Explorar (n)o GeoGebra	**Geometria sintética no plano**	• Explorar propriedades das figuras geométricas estudadas no Ensino Básico.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Comunicação matemática	• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões. • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos.
1	Tarefa 2 À mesma distância dos vértices	**Geometria sintética no plano** Pontos notáveis do triângulo: -Circuncentro	• Definir e caracterizar: - circuncentro e circunferência circunscrita (com demonstração).	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Raciocínio e lógica matemática • Recurso sistemático à tecnologia	• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões. • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos.
1	Tarefa 3 À mesma distância dos lados	**Geometria sintética no plano** Pontos notáveis do triângulo: - Incentro	• Definir e caracterizar: - incentro e circunferência inscrita (com demonstração).	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Raciocínio e lógica matemática • Recurso sistemático à tecnologia	• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões. • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos.

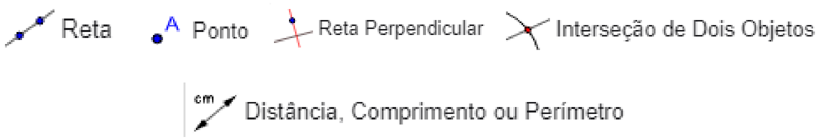
1	[Tarefa 4](#) Outro ponto notável do triângulo	**Geometria sintética no plano** Pontos notáveis do triângulo: - Baricentro	• Definir e caracterizar: - baricentro. • Conhecer propriedades do baricentro: - o baricentro é o centro de massa (gravidade, geométrico) de um triângulo.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Práticas enriquecedoras e criatividade	• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões. • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos.
1	[Tarefa 5](#) Construção do Ortocentro e identificação de algumas propriedades	**Geometria sintética no plano** Pontos notáveis do triângulo: - Ortocentro	• Definir e caracterizar: - ortocentro.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Práticas enriquecedoras e criatividade	• Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões. • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos.
1	[Tarefa 6](#) Pontos notáveis do triângulo	**Geometria sintética no plano** -Pontos notáveis do triângulo -Reta de Euler	• Localizar os pontos notáveis em triângulos equiláteros, isósceles e escalenos e em triângulos acutângulos, retângulos e obtusângulos. • Verificar a existência da reta de Euler.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Tarefas e recursos educativos	• Coloca e analisa questões a investigar, distinguindo o que se sabe do que se pretende descobrir. • Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos.
1	[Tarefa 7](#) Propriedades do baricentro (I)	**Geometria sintética no plano** Pontos notáveis do triângulo: - Baricentro	• Conhecer propriedades das medianas: - as três medianas dividem o triângulo em seis triângulos equivalentes (com demonstração).	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Tarefas e recursos educativos • Comunicação matemática	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões.

1	Tarefa 8 Propriedades do baricentro (II)	**Geometria sintética no plano** Pontos notáveis do triângulo: - Baricentro	• Conhecer propriedades das medianas: - a distância do baricentro a qualquer dos vértices é 2/3 da mediana respetiva (com demonstração);	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Tarefas e recursos educativos • Comunicação matemática	• Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões.
1	Tarefa 9 Circunferência dos nove pontos	**Geometria sintética no plano** Circunferência dos nove pontos	• Verificar a existência da circunferência dos nove pontos.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Raciocínio e lógica matemática	• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões.
1	Tarefa 10 Relações métricas entre pontos notáveis do triângulo	**Geometria sintética no plano** -Pontos notáveis do triângulo -Reta de Euler	• Verificar a existência da reta de Euler. • Relações métricas entre pontos notáveis do triângulo.	Trabalho a pares, com discussão final em turma	• Recurso sistemático à tecnologia • Raciocínio e lógica matemática	• Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. • Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das suas opiniões.

Tarefa 1

Explorar (n)o GeoGebra

1. **Determina a distância de um ponto a uma reta à qual ele não pertença.**
   Nota: Começa por construir os objetos geométricos (reta e ponto). Lembra-te que a distância é a medida do comprimento do menor segmento cujos extremos são um ponto da reta e o ponto exterior à reta e que isso acontece se esse segmento de reta for perpendicular à reta. Podes então continuar a construção para obteres a distância pretendida.



2. **Constrói o lugar geométrico dos pontos que distam igualmente de dois pontos dados.**
   Nota: Começa por colocar dois pontos A e B na folha geométrica, os quais definem um segmento de reta (são os extremos desse segmento de reta). Constrói depois o ponto médio do segmento de reta, o qual, por definição, dista igualmente de A e de B (diz-se <u>equidistante</u> de A e de B). Coloca outro ponto no plano e determina as distâncias a A e a B. Move depois o ponto para um local em que estas medidas fiquem iguais. Onde deves colocar um terceiro ponto que seja equidistante de A e de B? Qual é o conjunto de todos os pontos que estão à mesma distância de A e de B? Desenha-o!

3. **Constrói um ângulo e mede a sua amplitude, em graus.**
   Nota: Começa por construir duas semirretas com a mesma origem de modo a definirem um ângulo convexo e um ângulo côncavo (as semirretas são lados dos ângulos). Mede depois cada um dos ângulos.

4. Constrói o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados de um ângulo.

Nota: Utiliza o ângulo convexo construído aquando da resolução da questão anterior e coloca um ponto no seu interior. Determina a distância a cada uma das semirretas (recorda o que fizeste para dar resposta à questão 1) e depois move-o para um local onde essas distâncias sejam iguais. Onde deves colocar outro ponto de modo a que ele seja também equidistante das semirretas? Qual é o conjunto de todos os pontos que estão à mesma distância dos lados do ângulo?

Tarefa 1

Explorar (n)o GeoGebra

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem como objetivos promover a fluência na utilização do GeoGebra e também revisitar alguns conceitos e designações que serão estruturantes nas aulas deste tema.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conceito de lugar geométrico.

Materiais e recursos: Computador ou telemóvel com acesso ao GeoGebra.

Notas para o professor:

A pertinência da proposta desta tarefa depende em grande medida da experiência prévia dos alunos com o GeoGebra. Nas situações em que os alunos estejam ambientados à utilização autónoma desta ferramenta, a necessidade de propor esta tarefa será menor. Nos casos em que o contacto prévio dos alunos tenha sido reduzido, tendo-se limitado essencialmente a observar ou a manipular construções previamente criadas, será importante a realização desta tarefa, tendo em vista a evolução gradual para uma situação em que serão convidados a assumir um papel ativo e autónomo.

Assim, a fase da aula em que se pretende que os alunos trabalhem de forma autónoma reveste-se de especial importância, sendo essencial que tenham oportunidades de errar, descobrir, tentar e explorar, relegando/deixando para um plano secundário o resultado final.

Tarefa 2

À mesma distância dos vértices

1. Abre uma folha de trabalho GeoGebra e desenha um triângulo qualquer.

2. Desenha uma circunferência usando a ferramenta "Circunferência dado o centro e um ponto". Ajusta o centro e o ponto de modo que a circunferência esteja circunscrita ao triângulo.

3. Para tentar saber como encontrar o centro da circunferência, a partir do triângulo, traça os segmentos de reta que unem o centro da circunferência aos vértices do triângulo. Que regularidades encontras sobre esses segmentos de reta? [Observa em particular os seus comprimentos.]

4. Constrói o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois dos vértices do triângulo. Repete a construção anterior para outros dois vértices do triângulo.

5. Justifica que o centro se encontra nas mediatrizes dos lados do triângulo.

6. Apagando a circunferência, e deixando o triângulo, como procederias para encontrar, de forma rigorosa, o centro da circunferência circunscrita?

7. Constrói a circunferência circunscrita ao triângulo.

O ponto encontrado é designado por circuncentro e é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Tarefa 2

À mesma distância dos vértices

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem como objetivo familiarizar os alunos com a designação e algumas propriedades do circuncentro de um triângulo. Pretende-se ainda valorizar a definição e a construção da circunferência circunscrita ao triângulo.

Conhecimentos prévios dos alunos: Saber medir comprimentos no GeoGebra e traçar mediatrizes de um segmento de reta.

Materiais e recursos: A tarefa pode ser desenvolvida no ambiente de "Tarefas do GeoGebra" possibilitando a recolha das produções digitais dos alunos como recurso para desencadear a discussão final da tarefa em grande grupo. A atividade disponível em https://www.geogebra.org/m/dwgtn47w pode ser copiada para ser adaptada ou para a criação imediata de uma tarefa a disponibilizar aos alunos.

Notas para o professor:

A discussão durante o trabalho autónomo dos alunos, mas sobretudo na discussão final da tarefa, deve deixar claro que a mediatriz de um segmento de reta é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos extremos do segmento de reta (neste caso, os extremos de cada um dos lados do triângulo).

Será importante clarificar que no ambiente do GeoGebra, a utilização da ferramenta "mediatriz" tem o mesmo resultado que traçar a perpendicular pelo ponto médio.

Da mesma forma, a circunferência circunscrita pode ser obtida pela ferramenta "Circunferência por três pontos", embora esta ferramenta não assinale o centro da circunferência, podendo este, ser identificado na interseção de quaisquer duas mediatrizes dos lados do triângulo.

Tarefa 3

À mesma distância dos lados

1. Abre uma folha de trabalho GeoGebra e desenha um triângulo qualquer.

2. Desenha uma circunferência usando a ferramenta “Circunferência dado o centro e um ponto”. Ajusta o centro e o ponto de modo que a circunferência esteja inscrita no triângulo.

3. Para tentar saber como encontrar o centro da circunferência, a partir do triângulo, traça as retas que unem o centro da circunferência aos vértices desse triângulo. Que regularidades encontras na posição dessas retas? [Observa, em particular, a posição das retas em relação aos ângulos internos do triângulo.]

4. Constrói o lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois dos lados do triângulo. Repete a construção anterior para outros dois lados do triângulo.

5. Justifica que o centro se encontra nas bissetrizes dos lados do triângulo.

6. Apagando a circunferência, a partir do triângulo, como procederias para encontrar, de forma rigorosa, o centro da circunferência inscrita no triângulo?

7. Constrói a circunferência inscrita no triângulo.

O ponto encontrado é designado por incentro e é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

Tarefa 3

À mesma distância dos lados

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo familiarizar os alunos com a designação e algumas propriedades do incentro de um triângulo. Pretende-se ainda valorizar a definição e a construção da circunferência inscrita no triângulo.

Conhecimentos prévios dos alunos: Saber medir comprimentos no GeoGebra e traçar bissetrizes de um ângulo.

Materiais e recursos: A tarefa pode ser desenvolvida no ambiente de "Tarefas do GeoGebra" possibilitando a recolha das produções digitais dos alunos como recurso para desencadear a discussão final da tarefa em grande grupo. A atividade disponível em https://www.geogebra.org/m/y2fnw7uj pode ser copiada para ser adaptada ou para a criação imediata de uma tarefa a disponibilizar aos alunos.

Notas para o professor:
Na discussão durante o trabalho autónomo dos alunos, mas sobretudo na discussão final da tarefa, deve deixar-se claro que a bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos segmentos de reta que formam o ângulo (neste caso, os lados do triângulo). É importante verificar esta propriedade e o conceito de distância de um ponto a uma reta.
Poderá decorrer das construções dos alunos a necessidade de esclarecer que, no GeoGebra, o traçado das bissetrizes, selecionando os segmentos de reta (lados do triângulo), dá origem a duas retas, que correspondem às bissetrizes dos ângulos interno e externo referentes aos dois lados do triângulo considerados.
No item 7 da tarefa poderá não ficar claro para os alunos a necessidade de encontrar o ponto de tangência da circunferência a um dos lados, traçando a perpendicular ao lado que contém o incentro. Esta necessidade pode ser facilmente observada arrastando um dos vértices nas construções que não tenham determinado o ponto de tangência.

Tarefa 4

Outro ponto notável do triângulo

Parte I - Descobrir o ponto

1. Abre uma folha de trabalho GeoGebra e desenha um triângulo qualquer.

2. Marca um ponto G no interior do triângulo, e constrói os três triângulos definidos pelo ponto G e dois vértices do triângulo inicial. Mede a área dos três triângulos. Ajusta a localização do ponto G de forma a que as três áreas sejam aproximadamente iguais.

3. Para tentar saber como encontrar a localização exata do ponto G, de modo a que as três áreas sejam iguais, traça as retas que contêm o ponto G e os vértices do triângulo original. Cada uma destas retas interseta os lados do triângulo inicial em três pontos, numa localização específica. Faz uma conjetura sobre a localização de cada um desses pontos.

4. Explica como procederias para encontrar, de forma rigorosa o ponto que permite dividir o triângulo em três triângulos com a mesma área.

O ponto G encontrado é designado por baricentro.

5. Consegues dividir o triângulo original em três triângulos com a mesma área de outra forma?

Parte II - Equilíbrio

Recorta um triângulo qualquer num cartão e constrói o baricentro desse triângulo.

Tenta equilibrar esse triângulo num lápis, ou na ponta de um dedo.

Identifica o ponto do triângulo que te permite mantê-lo em equilíbrio - esse ponto é também designado por "Centro de massa do triângulo".

Tira uma fotografia do triângulo equilibrado e envia-a ao teu professor (como no exemplo ao lado).

Escolhe uma fotografia criativa e original.

Tarefa 4

Outro ponto notável do triângulo

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo familiarizar os alunos com a designação e algumas propriedades do baricentro de um triângulo. A divisão do triângulo em triângulos equivalentes é um elemento relevante para uma das demonstrações identificadas nas AE que virão a ser objeto de uma das tarefas que faz parte deste tema.

Conhecimentos prévios dos alunos: Saber medir áreas no GeoGebra e definir o ponto médio de um segmento de reta.

Materiais e recursos: A tarefa pode ser desenvolvida no ambiente de "Tarefas do GeoGebra" possibilitando a recolha das produções digitais dos alunos como recurso para desencadear a discussão final da tarefa em grande grupo. A atividade disponível em https://www.geogebra.org/m/zuumfyef pode ser copiada para ser adaptada ou para a criação imediata de uma tarefa a disponibilizar aos alunos.

Notas para o professor:
No item 5 da parte I, o professor poderá questionar os alunos sobre a forma de dividir o triângulo em dois triângulos equivalentes. Esta atividade é especialmente relevante por ser uma propriedade essencial para uma das duas demonstrações identificadas nas AE. A divisão do triângulo poderá ainda ser estendida à divisão do triângulo em quatro triângulos equivalentes (uma lista de 21 formas diferentes de o fazer pode ser consultada em https://mat.absolutamente.net/rp_tri4.php).
Na parte II da tarefa, poderá ser sugerido aos alunos que façam uma publicação da foto nas redes sociais promovendo a divulgação das atividades realizadas na sala de aula de Matemática. Esta valorização também pode ser da iniciativa do professor divulgando na página da escola, ou nas redes sociais da escola, as melhores fotografias enviadas pelos alunos.

Tarefa 5

Construção do Ortocentro e identificação de algumas propriedades

1. Abre uma folha de trabalho no GeoGebra e desenha um triângulo com vértices A, B e C.

2. Traça as retas perpendiculares a cada lado, que passam pelo vértice oposto. Arrasta os vértices do triângulo e observa a interseção das retas.

3. Como observaste, estas três retas intersetam-se sempre num ponto. O ponto de interseção destas três retas chama-se *ortocentro* do triângulo, que usualmente é designado por H.

4. Arrasta os vértices do triângulo $[ABC]$, de forma a que este seja acutângulo e marca A', B' e C', os pontos de interseção das perpendiculares com os lados (usualmente designados por "pés das alturas").

5. Une estes pontos com segmentos de reta, formando um triângulo $[A'B'C']$, que é designado por triângulo órtico do triângulo $[ABC]$. O que acontece se o triângulo for retângulo? Porquê?

6. Num triângulo acutângulo, o ponto H é um ponto notável do triângulo órtico. Identifica de que ponto se trata. Usa as ferramentas do GeoGebra para testar a tua conjetura.

[Extra]

7. Desenha um triângulo e a respetiva circunferência circunscrita. Traça as três retas perpendiculares aos lados do triângulo que passam pelo vértice oposto, e marca os pontos de interseção dessas retas com a circunferência. Descreve a relação entre o ortocentro do triângulo e os pontos de interseção das alturas com a circunferência circunscrita.

   Sugestão: Começa por analisar os triângulos em que o ortocentro pertence ao interior do triângulo, e verifica depois se a tua conjetura é válida para qualquer triângulo.

Tarefa 5

Construção do Ortocentro e identificação de algumas propriedades

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem por objetivo familiarizar os alunos com a designação e algumas propriedades do ortocentro de um triângulo. Com vista a aprofundar o estudo deste ponto é sugerida a definição do triângulo órtico para sentir a necessidade de designar os pés das alturas, que posteriormente serão pontos importantes para a definição da circunferência dos nove pontos.

Conhecimentos prévios dos alunos: Conhecer o conceito de altura de um triângulo relativamente a um lado.

Materiais e recursos: A tarefa pode ser desenvolvida no ambiente de "Tarefas do GeoGebra" possibilitando a recolha das produções digitais dos alunos como recurso para desencadear a discussão final da tarefa em grande grupo. A atividade disponível em https://www.geogebra.org/m/vxnuh5ry pode ser copiada para ser adaptada ou para a criação imediata de uma tarefa a disponibilizar aos alunos.

Notas para o professor:

Nos casos em que os triângulos são obtusângulos, dois dos pés das alturas não estão sobre os lados dos triângulo, mas sobre as retas que contêm esses lados. Nestes casos, será necessário traçar estas retas e clarificar junto dos alunos esta necessidade. Esta dificuldade adicional não deve ser omitida, mas não é aconselhável que seja o foco da tarefa.

No item extra (Item 7.), a identificação de cada um dos pontos de interseção das alturas com a circunferência circunscrita, como transformados do ortocentro por uma reflexão relativamente a cada um dos lados pode não surgir facilmente para todos os alunos. Deve ser claro (também para os alunos) que este não é o objetivo essencial da tarefa. Durante a fase de exploração por parte dos alunos, se não houver nenhum tipo de progresso, o professor poderá sugerir algumas ações, como por exemplo, o traçado das retas que incluem o ortocentro e os pontos de interseção, como forma de facilitar o estabelecimento da conjetura pretendida.

Podem ainda ser sugeridas as medições das distâncias pés da perpendicular ao ortocentro e aos pontos de interseção das alturas do triângulo com a circunferência circunscrita, verificando-se que são iguais.

Tarefa 6

Pontos notáveis do triângulo

Abre o ficheiro do Geogebra em https://www.geogebra.org/m/hu5qkvrm ou através do QR Code seguinte.

1. Os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4, apresentados na construção, são pontos notáveis do triângulo. Faz corresponder cada um destes pontos com a respetiva designação (baricentro, circuncentro, incentro e ortocentro).

2. Três desses pontos notáveis são colineares. Quais? Que nome se dá à reta que passa por esses três pontos? Descobre o nome na Internet.

3. Alterando o triângulo anterior, conjetura sobre a localização dos pontos notáveis em triângulos equiláteros, isósceles, retângulos e obtusângulos, e assinala com um (☒) na tabela as propriedades que se verificam.

	Equilátero	Isósceles	Retângulo	Obtusângulo
O ortocentro coincide com um vértice				
Os quatro pontos notáveis são coincidentes				
Os quatro pontos notáveis são colineares e não coincidentes				
O circuncentro localiza-se no exterior do triângulo				
O ortocentro localiza-se no exterior do triângulo				
O circuncentro pertence a um dos lados do triângulo				

Tarefa 6

Pontos notáveis do triângulo

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem por objetivo levar os alunos a identificarem cada um dos pontos notáveis do triângulo, acessíveis numa construção dinâmica. A justificação das escolhas, deve ser o resultado das discussões em grupo, tendo em conta as propriedades de cada um dos pontos, valorizando assim a comunicação. Numa segunda fase, pretende-se que os alunos façam experiências que permitam fazer conjeturas, e justificá-las sempre que possível, sobre os pontos que verificam algumas propriedades, em casos que os triângulos assumem propriedades particulares.

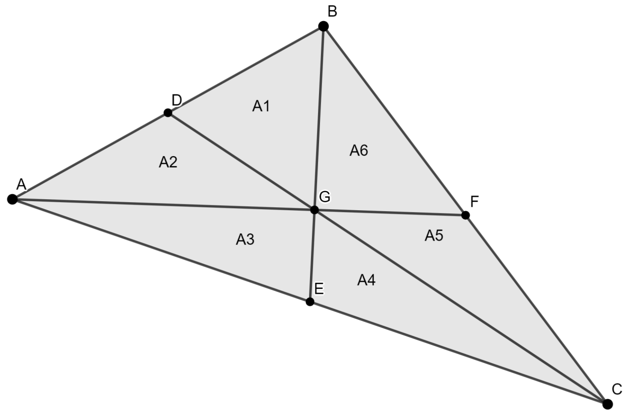
Conhecimentos prévios dos alunos: Conhecer as propriedades dos pontos notáveis de um triângulo - Incentro, Circuncentro, Baricentro e Ortocentro.

Materiais e recursos: A tarefa deve ser desenvolvida manipulando um recurso interativo, por exemplo, num telemóvel ou num computador.

Notas para o professor:
Os alunos podem apenas registar a identificação solicitada para cada caso. Assim, caberá ao professor desafiar cada grupo de alunos a produzir justificações válidas, com o nível de detalhe e rigor que for possível, e que devem ser partilhadas e validadas numa discussão em grande grupo.
A análise de respostas incorretas produzidas pelos alunos ou sugeridas pelo professor deve ser valorizada, explicitando o papel adequado dos contra-exemplos, do ponto de vista formal, para demonstrar a falsidade de uma conjetura.

Tarefa 7

Propriedades do baricentro (I)



Considera um triângulo $[ABC]$ e as suas três medianas. O triângulo $[ABC]$ fica dividido em seis triângulos.

Movimentando um qualquer vértice do triângulo inicial podes observar que as áreas dos seis triângulos se vão alterando. Haverá alguma relação entre as medidas dessas áreas?

Parte I - Exploração

Explora esta situação utilizando o Geogebra.

1. Abre o Geogebra e constrói um triângulo
2. Traça as três medianas do triângulo.
3. Altera o triângulo inicial e verifica que as três medianas se intersetam num único ponto. A esse ponto chamamos baricentro.
4. Determina as áreas dos 6 triângulos obtidos.
5. Estabelece uma relação entre essas áreas e verifica que essa relação se mantém para outros triângulos (alterando o triângulo inicial).

Parte II - Justificação

1. Justifica que cada mediana divide o triângulo em dois triângulos equivalentes.
2. Completa as seguintes igualdades, justificando:

   Nota: Na tua resposta utiliza a notação apresentada na figura para as seis áreas dos triângulos (A1, A2, A3, A4, A5 e A6).

   - A1+A2+A3=___________
   - A1=______
   - A3=______
   - A5=______

3. Substitui alguns destes resultados noutras equações e simplifica-as de modo a mostrar que as áreas dos seis triângulos são iguais, ou seja, que estes triângulos são equivalentes.

Tarefa 7

Propriedades do baricentro (I)

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem como objetivo que os alunos façam conjeturas e demonstrem relações métricas envolvendo os pontos notáveis do triângulo, nomeadamente que as três medianas dividem o triângulo em seis triângulos equivalentes.

Conhecimentos prévios dos alunos:

Os alunos devem saber construir, no GeoGebra, as medianas de um triângulo qualquer e medir a área de um polígono.

Materiais e recursos: A tarefa pode ser desenvolvida numa primeira fase com recurso ao GeoGebra e, posteriormente, no caderno, valorizando a qualidade dos registos produzidos.

Notas para o professor:

Como forma de acompanhar o processo de escrever uma demonstração completa, nesta tarefa é solicitado ao aluno que faça uma conjetura e depois acompanhe os passos da demonstração, justificando cada um deles.

Numa primeira fase é sugerido que os alunos recorram ao GeoGebra para conjeturar a relação visada. É esperado que a fluência e a autonomia dos alunos, na manipulação do Geogebra, seja suficiente para que consigam atingir o objetivo sem grande dificuldade ou a necessidade de indicações adicionais.

Relativamente à fase da demonstração, deve ser uma preocupação do professor durante a atividade dos alunos e, sobretudo, na discussão final, clarificar a ligação entre as diferentes etapas e identificar a globalidade e a complementaridade dos passos percorridos como uma atividade de demonstração, ou seja, de justificação o mais possível completa da conjetura efetuada.

É esperado que alguns alunos tenham dificuldades em avançar na questão 3, e pode ser necessário que o professor sugira a divisão inicial do triângulo segundo outra mediana para obter, por exemplo, a igualdade:

$$A1+A5+A6=A2+A3+A4$$

Esta sugestão deve ser suficiente para desbloquear impasses, mas não deve simplificar o desafio e a descoberta dos alunos durante a exploração da tarefa, cabendo ao professor a gestão da pertinência e da oportunidade de fazer este tipo de sugestões.
Deve também ser incentivado o registo não só das igualdades estabelecidas, mas também a referência explícita a igualdades já encontradas para justificar as novas igualdades.

Tarefa 8

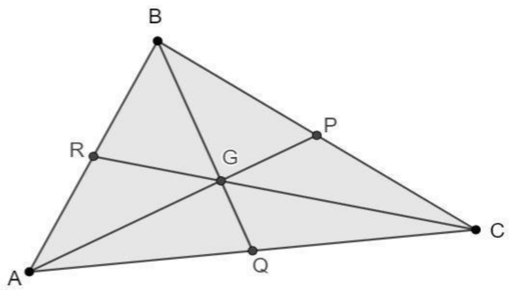
Propriedades do baricentro (II)

Parte I - Exploração

1. Abre o Geogebra e constrói um triângulo.
2. Traça as três medianas do triângulo.
3. Altera o triângulo inicial e verifica que as três medianas se intersetam num único ponto. A esse ponto chamamos baricentro.
4. Determina as distâncias:
   - do baricentro a um dos vértices;
   - do baricentro ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.
5. Estabelece uma relação entre essas duas distâncias.
6. Verifica se essa relação se mantém:
   - para as outras medianas;
   - para outros triângulos (alterando o triângulo inicial).

Parte II - Justificação

Na figura seguinte está representado o triângulo $[ABC]$, as suas três medianas e o baricentro.



1. Justifica que os segmentos de reta $[RP]$ e $[AC]$ são paralelos e que $\overline{AC} = 2\overline{RP}$.
2. Mostra que os triângulos $[RPG]$ e $[ACG]$ são semelhantes e indica qual é a respetiva razão de semelhança.
3. Qual é a relação entre $\overline{AG}$ e $\overline{GP}$?
4. Relaciona o comprimento de uma mediana de um triângulo com a distância do baricentro ao respetivo vértice.

Tarefa 8

Propriedades do baricentro (II)

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem como objetivo que os alunos façam conjeturas e demonstrem relações métricas entre os pontos notáveis do triângulo, em particular, que a distância do baricentro a um vértice é o dobro da distância do baricentro ao ponto médio do lado oposto ao vértice considerado.

Conhecimentos prévios dos alunos: os alunos devem saber construir no GeoGebra, o baricentro de um triângulo qualquer, medir comprimentos de segmentos de reta ou a distância entre dois pontos e identificar triângulos semelhantes.

Materiais e recursos: A tarefa pode ser desenvolvida numa primeira fase com recurso ao GeoGebra e, posteriormente, no caderno, valorizando a qualidade dos registos produzidos.

Notas para o professor:

Como forma de acompanhar o processo de escrever uma demonstração completa, nesta tarefa é solicitado ao aluno que faça uma conjetura e depois acompanhe os passos da demonstração, justificando cada um deles.

Numa primeira fase, é sugerido que os alunos recorram ao GeoGebra para conjeturar a relação pretendida. É esperado que a fluência e a autonomia dos alunos, na manipulação do Geogebra, sejam suficientes para que consigam atingir o objetivo sem grande dificuldade ou a necessidade de indicações adicionais.

Relativamente à fase da demonstração, deve ser uma preocupação do professor durante a atividade dos alunos e, sobretudo, na discussão final, clarificar a ligação entre as diferentes etapas e identificar a globalidade e a complementaridade dos passos percorridos como uma atividade de demonstração, ou seja, de justificação, o mais completa possível, da conjetura efetuada.

A profundidade da justificação é outro aspeto que merece atenção e que pode ser tratado de formas diferentes, em função das características dos alunos. Por exemplo, para mostrar que $[RP]$ e $[AC]$ são segmentos de reta paralelos, podemos começar por observar que $\angle ABC$ e $\angle RBP$ representam o mesmo ângulo e, como tal, têm a mesma amplitude. Como o ponto R é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, tem-se que o comprimento do segmento de reta $[BR]$ equivale a metade do comprimento do segmento de reta $[AB]$. Analogamente, tem-se que o comprimento do segmento de reta $[BP]$ equivale a metade do comprimento do segmento de reta $[BC]$. Dessa forma, conclui-se, pelo critério LAL de semelhança de triângulos, que os triângulos $[ABC]$ e $[BRP]$ são semelhantes de razão de semelhança $1/2$. Pelo facto de os triângulos serem semelhantes e terem dois pares de lados correspondentes contidos na mesma reta, então $[AC]$ é paralelo a $[RP]$.

Com os mesmos objetivos, poderá ser sugerido aos alunos que mobilizem a propriedade da tarefa 7 (relativa à igualdade da medida das áreas). Considerando essa propriedade, já demonstrada como uma justificação válida, pode-se provar que, relativamente às áreas dos triângulos $[BGC]$ e $[QGC]$, se tem que $A_{[BGC]} = 2 \times A_{[QGC]}$.

Como os dois triângulos têm a mesma altura relativa às bases $[BG]$ e $[GQ]$, então estas bases estão na proporção das áreas, ou seja $\overline{BG} = 2 \times \overline{GQ}$. Salienta-se que esta opção implica a reformulação escrita da tarefa, com outros passos, e a solicitação de outras justificações aos alunos.

Tarefa 9

Circunferência dos nove pontos

Parte I - A circunferência dos nove pontos e os pontos de Euler

1. Abre uma folha de trabalho no GeoGebra e desenha um triângulo $[ABC]$ que não seja retângulo.
2. Traça as retas que contêm cada um dos lados do triângulo $[ABC]$.
3. Marca as alturas do triângulo e o ortocentro. Designa-o por H.
4. Marca os pontos médios dos segmentos de reta que unem cada um dos vértices do triângulo ao ortocentro H. Estes pontos são designados por pontos de Euler.
5. Usando a ferramenta , traça a circunferência que contém os pontos de Euler.
6. Marca os pontos de intersecção das alturas com as retas que contêm os lados do triângulo, a que chamamos pés das alturas. O que observas?
7. Agora marca os pontos médios de cada um dos lados do triângulo. O que observas?
8. Experimenta mover os vértices do triângulo e faz uma conjetura sobre a circunferência que traçaste.

Parte II - A circunferência dos nove pontos num triângulo equilátero

1. Abre uma folha de trabalho no GeoGebra e desenha um triângulo equilátero, usando a ferramenta .
2. Traça os pontos médios de cada um dos lados do triângulo e a circunferência que os contém. O que observas?
3. Marca o ortocentro do triângulo e os seus pontos de Euler. O que observas?
4. Os três pés das alturas também são pontos da circunferência dos nove pontos. O que “aconteceu” a estes três pontos? Porquê?
5. Comenta a seguinte afirmação:

   “*A circunferência dos nove pontos de um triângulo equilátero é a circunferência inscrita*”.

Parte III - A circunferência dos nove pontos num triângulo retângulo

1. Abre uma folha de trabalho no Geogebra e desenha um triângulo retângulo.
2. O que podes afirmar sobre o ortocentro desse triângulo? E onde se situam os seus pontos de Euler?
3. Será que neste caso a circunferência dos nove pontos contém o ortocentro do triângulo? Porquê?
4. Marca a circunferência dos nove pontos com a ferramenta “Circunferência (Três Pontos)”. O que observas? Identifica a localização dos nove pontos da circunferência?
5. Marca a circunferência circunscrita. Compara os raios das duas circunferências. O que observas? Faz uma conjectura.

[Extra]

6. Mostra que o raio da circunferência circunscrita é igual ao diâmetro da circunferência dos nove pontos.
   Começa por justificar que entre os pontos de interseção da circunferência dos 9 pontos com o triângulo existem quatro que formam um retângulo.
7. Será que o raio da circunferência circunscrita é igual ao diâmetro da circunferência dos nove pontos num triângulo qualquer? Usa o GeoGebra para investigar esta relação.

Tarefa 9

Circunferência dos nove pontos

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:

Esta tarefa tem como objetivo que os alunos conheçam a circunferência dos nove pontos. Visa ainda identificar situações particulares onde alguns dos nove pontos coincidem, criando um contexto favorável à justificação da coincidência dos pontos a partir das propriedades dos triângulos considerados em cada situação particular.

Conhecimentos prévios dos alunos: Construir o ortocentro de um triângulo, construir triângulos equiláteros e retângulos.

Materiais e recursos: A tarefa pode ser desenvolvida no ambiente de "Tarefas do GeoGebra" possibilitando a recolha das produções digitais dos alunos como recurso para desencadear a discussão final da tarefa em grande grupo. A atividade disponível em https://www.geogebra.org/m/xjdzzchv pode ser copiada para ser adaptada ou para a criação imediata de uma tarefa a disponibilizar aos alunos.

Notas para o professor:

Na sequência do trabalho desenvolvido anteriormente, os alunos devem explorar, no GeoGebra, a construção da circunferência dos nove pontos , a partir dos pontos de Euler, e depois identificar os restantes seis pontos da circunferência.

Nas partes B) e C) pretende-se que os alunos sejam capazes de constatar que, no caso dos triângulos serem equiláteros ou retângulos, alguns dos nove pontos são coincidentes. Devem ainda ser criadas oportunidades para que os alunos justifiquem as suas constatações recorrendo às propriedades dos triângulos em causa e dos pontos que são coincidentes.

As últimas questões da parte C), com a indicação "Extra", nomeadamente a justificação de que 4 dos 9 pontos definem um retângulo pode constituir-se como uma tarefa complexa para os alunos, devendo o professor decidir sobre a adequabilidade e a pertinência de colocar este desafio a toda a turma. A atividade dos alunos pode resumir-se a conjeturar e descrever a relação dos raios da circunferência dos 9 pontos e da circunferência circunscrita, não havendo, neste caso, interesse especial no aprofundamento do caso particular do triângulo retângulo.

Tarefa 10

Relações métricas entre pontos notáveis do triângulo

Parte I - Exploração

1. Abre uma folha de trabalho GeoGebra e desenha um triângulo qualquer. Constrói o baricentro, o ortocentro e o circuncentro do triângulo.
2. Mede as distâncias entre o baricentro e o ortocentro e entre o baricentro e o circuncentro. Que relação te parece existir entre estas duas distâncias?

Parte II - Justificação

1. Abre a construção no seguinte link https://www.geogebra.org/classic/jkds3y7v, na qual estão representados o triângulo $[ABC]$ e o triângulo $[A'B'C']$ em que os vértices são os pontos médios dos lados do triângulo $[ABC]$. Estão ainda representados os pontos H, G e O, que são respetivamente o ortocentro, o baricentro e o circuncentro do triângulo $[ABC]$.
2. Observa os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ e verifica que são semelhantes. Porquê? Qual é a razão de semelhança?
3. Verifica, analogamente à tarefa 2, que G é o baricentro do triângulo $[ABC]$, mas também do triângulo $[A'B'C']$.
4. Traça agora mediatriz do segmento $[AB]$, e designa-a por r. Traça também a mediatriz do segmento $[AC]$ e designa-a por s. Observa que essas mediatrizes se intersetam no ponto O, circuncentro do triângulo $[ABC]$.
5. Qual é a posição relativa entre a reta r e o segmento $[A'B']$? Porquê? E qual é a posição relativa entre a reta s e o segmento $[A'C']$? Porquê?
6. Repara que as retas r e s passam, cada uma, por um vértice do triângulo $[A'B'C']$. Pensa nas respostas que deste à pergunta anterior, e justifica que o ponto O também é um ponto notável do triângulo $[A'B'C']$. Qual?
7. Sabendo que os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são semelhantes, as distâncias entre os pontos notáveis correspondentes estão à mesma razão de semelhança. Explica por que razão a distância entre G e H é o dobro da distância entre G e O.

Tarefa 10

Relações métricas entre pontos notáveis do triângulo

Notas pedagógicas para a ação do professor

Resumo:
Esta tarefa tem como objetivo que os alunos façam conjeturas e demonstrem relações métricas entre os pontos notáveis do triângulo, em particular que a distância do ortocentro ao baricentro é o dobro da distância do baricentro ao circuncentro.

Conhecimentos prévios dos alunos: os alunos devem saber construir o ortocentro, o circuncentro e o baricentro de um triângulo qualquer.

Materiais e recursos: A tarefa pode ser desenvolvida no ambiente de "Tarefas do GeoGebra" possibilitando a recolha das produções digitais dos alunos como recurso para desencadear a discussão final da tarefa em grande grupo. A atividade disponível em https://www.geogebra.org/m/eb6hs7r2 pode ser copiada para ser adaptada ou para a criação imediata de uma tarefa a disponibilizar aos alunos.

Notas para o professor:
Na sequência do trabalho desenvolvido anteriormente, os alunos devem conjeturar a relação com recurso a construções rigorosas e medições no GeoGebra. É expectável que a conjetura seja estabelecida com relativa facilidade. Ao acompanhar o trabalho dos alunos, pelos diferentes grupos de trabalho, o professor deve assegurar-se que é claro para os alunos a diferença entre conjeturar e demonstrar.
Na segunda parte da tarefa, os alunos devem conseguir justificar que a razão de semelhança entre os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ é 2 ($r = 2$), que o baricentro dos dois triângulos coincide ($G \equiv G'$) e que o ortocentro do triângulo $[A'B'C']$ coincide com o circuncentro do triângulo $[ABC]$ ($O \equiv H'$), podendo organizar a discussão final, conduzindo-a para um registo como o que a seguir se exemplifica:

$\overline{GH} = 2\,\overline{G'H'}$	Porque $r = 2$
$\overline{GH} = 2\,\overline{GH'}$	Porque $G \equiv G'$
$\overline{GH} = 2\,\overline{GO}$	Porque $O \equiv H'$

Naturalmente, na discussão, poderão surgir outras justificações que poderão sustentar estas ou outras conclusões, o que a tornará ainda mais rica e mais relevante para os alunos.