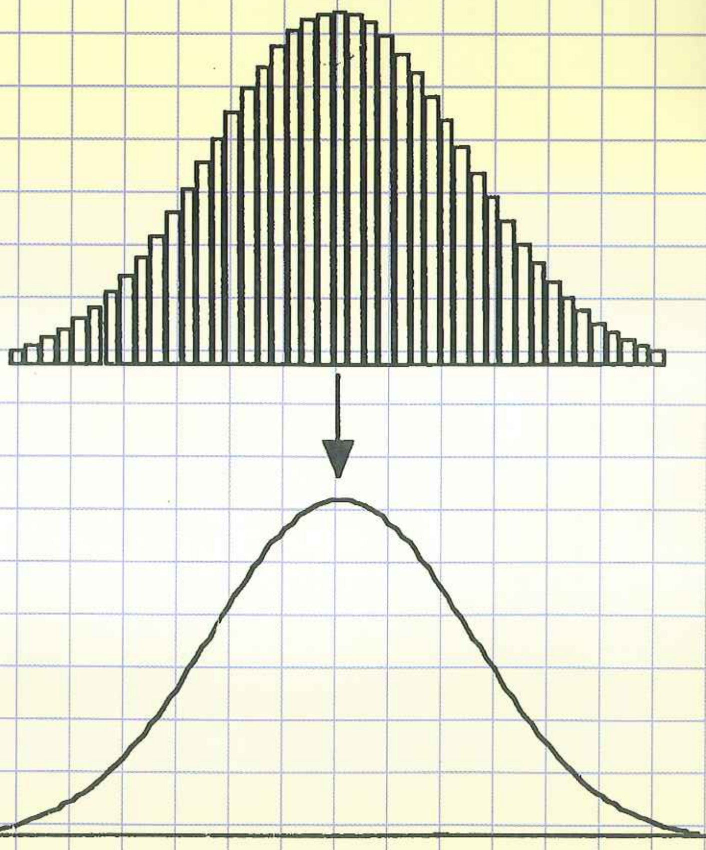
MATEMÁTICA

Ministério da Educação
Departamento do ***Ensino Secundário***

Probabilidades e Combinatória

12º ano de escolaridade

Maria Eugénia Graça Martins
Cecília Monteiro
José Paulo Viana
Maria Antónia Amaral Turkman



Índice

PREFÁCIO

Este guia tem por objectivo apoiar o professor de Matemática na leccionação da componente Probabilidades e Combinatória do programa do 12º ano.

Na elaboração deste manual deu-se prioridade à dimensão científica do tema dado que, para além de ser um assunto que muitos professores não chegaram a aprofundar durante a sua formação universitária, praticamente não existem no mercado português livros que o abordem de uma forma desenvolvida, mantendo simultaneamente a sua simplicidade. Assim, a par da exposição teórica dos conceitos e das ideias que são introduzidos de um modo tanto quanto possível rigoroso, vão sendo apresentados exemplos de aplicação para a sua ilustração e clarificação. Evidentemente, como este guia se destina a professores, as questões são abordadas aqui com mais profundidade e desenvolvimento do que o previsto no programa de 12º ano.

A componente didáctica não foi de modo algum esquecida. Assim, são feitas sugestões de actividades que os alunos podem desenvolver na sala de aula, quer individualmente, quer em grupo. Embora não formalmente separadas ao longo do texto, estas actividades não são todas da mesma natureza. Algumas são simples exercícios cujo intuito é o de ajudar o aluno a cimentar os conhecimentos que vai adquirindo. Outras, recorrendo quer à utilização de materiais lúdicos, quer da calculadora gráfica, têm como objectivo esclarecer os conceitos através da experimentação.

Nas propostas de actividades, pretendemos que os alunos modelem situações preparando e levando a cabo experiências ou simulações para determinar probabilidades de acontecimentos, modelem situações construindo um espaço de resultados, usem os modelos construídos para comparar os valores experimentais com os valores teóricos e, finalmente, façam previsões a partir das probabilidades obtidas.

Em certos casos, apresentam-se vários processos de resolução de um problema, reforçando a ideia de que não existe um modelo único para chegar à solução. É importante que, por vezes, professor e alunos comparem e discutam as várias formas de resolver um dado problema, apreciando as diferentes abordagens que se podem fazer dessa situação.

A estrutura desta brochura não segue fielmente a estrutura do programa. Sendo destinada a professores que dominam já os conceitos básicos de Probabilidades, preferiu-se que os assuntos fossem abordados por uma ordem que tenha a ver com os interesses e necessidades de quem aprofunda conhecimentos e não de quem aprende pela primeira vez. Por outro lado, a Análise Combinatória é apresentada sobretudo como instrumento de cálculo para as Probabilidades e não como unidade autónoma.

Decidimos ainda não incluir neste guia uma componente histórica da teoria matemática das Probabilidades, pois pensamos que este assunto se encontra acessível nomeadamente nas boas enciclopédias, de modo que qualquer resumo que pudéssemos fazer, tendo em conta a limitação no número de páginas, ficaria aquém daquilo que os interessados facilmente conseguem obter nos meios disponíveis (não esquecer a Internet).

Não consideramos, de modo nenhum, que esta obra seja definitiva. Contamos assim com a colaboração de todos os professores, para que nos façam chegar críticas e sugestões que possam contribuir para o seu melhoramento.

Os autores

Capítulo 1

O que é a Probabilidade?

1.1 – Introdução

A probabilidade, como acontece com muitas outras noções que usamos com frequência, é extremamente difícil de definir, a menos que estejamos em condições de recorrer a conceitos matemáticos precisos. No entanto sabemos usá-la com uma certa perícia, em muitas situações práticas, mesmo sem disso nos apercebermos. Qualquer um de nós, em face de um determinado acontecimento futuro, é capaz de fazer conjecturas sobre a probabilidade da sua realização. Quantas vezes nos ouvimos fazer afirmações do género "É muito provável que ...", "É pouco provável que...", "É mais provável que...". Por exemplo, a informação que temos, permite-nos afirmar que "actualmente a probabilidade de um indivíduo morrer de tuberculose é muito mais baixa do que a probabilidade de um indivíduo, no início do século, morrer com tuberculose". Mas, embora na maior parte das vezes só consigamos exprimir juízos probabilísticos em termos comparativos, há situações em que estamos preparados para atribuir um valor numérico à possibilidade da realização de um determinado acontecimento. Por exemplo, se nos perguntarem qual a probabilidade de existir um homem com três metros de altura, respondemos sem duvidar que essa probabilidade é zero, já que o nosso conhecimento nos faz acreditar que esse acontecimento é impossível. Por outro lado, se nos perguntarem qual a probabilidade de o sol nascer amanhã, não temos dúvida em afirmar que é um. Quantas vezes também quando se pretende decidir quem, entre duas pessoas deve fazer um determinado trabalho pouco apetitoso, se faz a escolha atirando uma moeda ao ar. Isto porque estamos implicitamente a aceitar que, procedendo deste modo, estamos a ser justos já que atribuímos probabilidades iguais (na escala de 0 a 1 corresponderia a 1/2) a cada um de poder vir a realizar o dito trabalho.

O que estamos então a fazer nas situações que aqui descrevemos, ou noutras semelhantes? Estamos a exprimir o nosso *grau de convicção* na realização de algum acontecimento. Podíamos então ser tentados a definir probabilidade de um determinado acontecimento como uma medida da convicção que temos na realização desse acontecimento. Mas claro, não nos podemos ficar por aqui. Este conceito tão simples só por si é demasiado precário para ser útil à Ciência. Há necessidade de ir muito mais longe, já que não havendo mais do que meras conjecturas e convicções, diferentes com certeza de indivíduo para indivíduo, e quantas vezes incoerentes, não é possível fazer teoria. Há por exemplo necessidade de saber como quantificar aquela "medida de convicção" relativamente a qualquer acontecimento. Se em certas situações (como a relacionada com o lançamento de uma moeda) não temos dificuldade, há outras em que isso já se não nos afigura simples, ou por falta de informação, ou por mera incapacidade devido, por exemplo, à própria complexidade de que o acontecimento se reveste. Sabemos, se não por convicção, pelo menos pela própria experiência, que a probabilidade de nos sair o totoloto na próxima vez que jogarmos é extremamente pequena. Mas, quantas pessoas que não tenham estudado cálculo das probabilidades são capazes de atribuir um número a essa probabilidade? Já em face de um dado equilibrado, somos levados a dizer que a probabilidade de sair um 6 num lançamento é 1/6. Porque é que fazemos tal afirmação? Somos, no entanto, capazes de ficar perplexos quando alguém, muito peremptoriamente nos afirma que estudos estatísticos indicam que a probabilidade de contrair cancro de pulmão, se se fumar mais de 20 cigarros por dia, é de 7%. Com que base é que se pode fazer uma afirmação desta natureza?

Digamos que, com os dois exemplos apresentados, quantificámos a probabilidade de um acontecimento por dois processos distintos. No segundo caso, a quantificação da probabilidade de contrair cancro de pulmão se se fumar mais de 20 cigarros, foi feita recorrendo à experiência, identificando empiricamente a probabilidade de um acontecimento com a frequência relativa com que esse acontecimento se observa numa amostra representativa da população em estudo. Em termos estatísticos "estimámos" a probabilidade (desconhecida) da realização de um acontecimento pela frequência relativa com que esse acontecimento se verifica. No primeiro caso, o do dado equilibrado, o raciocínio é feito com base no facto de haver uma possibilidade em 6 de ao lançar o dado uma vez se observar a face 6. Não precisámos da experiência para quantificar a probabilidade. Imaginemos, no entanto, que estávamos a jogar um determinado jogo que obrigava ao lançamento de um dado e que a saída da face 6 implicava um bónus. Depois de jogarmos um grande número de vezes descobríamos que a face 6 quase nunca saía. O nosso senso comum levava-nos a supor que "algo estava errado com o dado". Como poderíamos averiguar isso? Lançando o dado um grande número de vezes, digamos n, e calculando a frequência relativa da realização do acontecimento de interesse, isto é, "saída de um 6". Estimávamos assim a probabilidade de no lançamento daquele dado sair a face 6. A intuição diz-nos que se não houver nada de errado com o dado, este valor deve flutuar à volta de 1/6.

É costume identificar o "conceito" de probabilidade de um acontecimento com o processo usado para medir o "grau de convicção" na sua realização. Assim, o recurso à frequência relativa para medir a probabilidade, conduz-nos ao "conceito frequencista" de probabilidade. Este conceito está intimamente ligado à regularidade estatística, pelo que só faz sentido falar na probabilidade de acontecimentos que se possam repetir em condições idênticas, tantas vezes quantas quisermos, já que só nestas condições é que podemos calcular frequências. Tiago de Oliveira diz : " a frequência de um acontecimento deve entender-se como uma medição física de uma grandeza teórica – a probabilidade- associada a um acontecimento. A probabilidade, do ponto de vista físico, é a intensidade da realização de um fenómeno natural". Mais à frente aprofundaremos um pouco mais este assunto, ao falarmos das diferentes aproximações conceptuais para a Probabilidade

1.2 – Probabilidade e Estatística

A maior parte das situações em que é necessário utilizar técnicas estatísticas, envolve a necessidade de tirar conclusões gerais acerca de um grande conjunto de indivíduos, baseando-nos num número restrito desses indivíduos. Foi neste contexto que foram definidos os conceitos de População e Amostra no módulo da Estatística.

O conceito de Probabilidade, que nos propomos estudar neste texto, é o instrumento que permite ao estatístico utilizar a informação recolhida da amostra para descrever ou fazer inferências sobre a População de onde a amostra foi recolhida. Alguns exemplos ajudar-nos-ão a compreender melhor esta ideia.

Exemplo 1 – Suponha que tem uma moeda *equilibrada* e que lança a moeda uma série de vezes, registando em cada lançamento a face que fica voltada para cima. O resultado dos registos é uma sucessão de F e de C, onde utilizamos a letra F para designar cara (face) e a letra C para designar coroa. Como admitimos que a moeda é equilibrada, isto é, estamos a adoptar um <u>determinado modelo</u> probabilístico, esperamos que o número de F's seja aproximadamente metade do número de lançamentos efectuados. Se, por outro lado, considerarmos uma amostra de dimensão 1, isto é, fizermos unicamente um lançamento, dizemos que a probabilidade de obter F é 1/2, já que existe igual possibilidade de obter F ou C (ao dizer que a moeda é equilibrada estamos a atribuir igual probabilidade à saída de cara ou de coroa num lançamento).

Suponha agora que a sua moeda não era equilibrada. Neste caso quando procedemos a vários lançamentos já não sabemos qual a proporção de caras que esperamos obter, uma vez que a População não é perfeitamente conhecida – conhecemos os resultados possíveis em cada lançamento – cara ou coroa, mas o modelo não está completamente especificado, uma vez que as probabilidades associadas a esses resultados não são conhecidas (estamos a assumir que a moeda não é equilibrada). Então um modo possível de obter mais alguma informação sobre o modelo probabilístico é proceder a um certo número de lançamentos e calcular a frequência relativa da saída de cara, nos lançamentos efectuados. Este valor vai-nos servir para *estimar* a probabilidade da saída de cara. Por exemplo, se em 1000 lançamentos se obtiveram 324 caras, dizemos que um valor aproximado para a probabilidade de se verificar cara é 0.324 (ao fim de 1000 lançamentos verificou-se uma certa estabilidade à volta deste valor) e o valor aproximado para a probabilidade de sair coroa será 0.676.

Com este exemplo procuramos exemplificar o papel relativo da Probabilidade e da Estatística:

Enquanto que ao assumirmos um determinado modelo de probabilidade – População conhecida, o que foi feito ao admitir que a moeda era *equilibrada*, estamos aptos a raciocinar do geral para o particular, isto é, da População para a Amostra, quando a População não é conhecida utilizamos a Estatística para fazer raciocínios no sentido inverso, isto é, inferir para a População resultados observados na Amostra.

Para esclarecer melhor esta ideia, consideremos ainda o seguinte exemplo:

Exemplo 2 - O Dr. Américo, do partido X, que se candidatou a Presidente da Câmara de determinada cidade juntamente com outro candidato pelo partido Y, anuncia que vencerá as eleições por uma margem significativa de votos. A comissão de candidatura do candidato do partido Y está um pouco céptica relativamente àquele optimismo e recolhe uma pequena amostra de potenciais eleitores, tendo concluído que dos 50 inquiridos só 5 é que pensam votar no Dr. Américo. Estes resultados, altamente contraditórios com a afirmação do Dr. Américo que, a ser verdade, lhe daria uma probabilidade de vencer superior a 1/2, leva a concluir que o seu optimismo não tem razão de ser. Embora *não seja* *impossível*, a partir de uma População que vota maioritariamente no Dr. Américo, obter uma amostra aleatória de 50 eleitores em que só 5 votam a favor dele, é no entanto *bastante improvável* que isso aconteça. Assim, se tomarmos como hipótese que a probabilidade do Dr. Américo ganhar as eleições é superior a 1/2, o facto de obtermos um valor muito pequeno para a probabilidade de encontrarmos em 50 eleitores, só 5 a votarem nele, leva-nos a rejeitar o modelo proposto, isto é, de que o candidato em causa seria o vencedor. Estamos assim a utilizar os resultados da amostra para retirar conclusões para a População.

Sendo então a Probabilidade o instrumento utilizado para fazer inferências, é importante responder à questão que faz parte do título desta secção*: o que é a Probabilidade*?

O termo Probabilidade que foi utilizado anteriormente com alguma frequência, num contexto especial, como já vimos na secção anterior, é utilizado todos os dias de forma mais ou menos intuitiva, pois nos mais variados aspectos da nossa vida, está presente a <u>incerteza</u>:

- dizemos que existe uma pequena probabilidade de ganhar o totoloto;
- dizemos que existe uma grande probabilidade de chover num dia carregado de nuvens;
- o político interroga-se sobre qual a probabilidade de ganhar as próximas eleições;
- o aluno interroga-se sobre qual a probabilidade de obter positiva num teste de perguntas múltiplas, para o qual não estudou e responde sistematicamente ao acaso;
- o médico pretende saber se um medicamento novo tem maior probabilidade de cura que o medicamento habitual, para tratar determinada doença;
- o comerciante pretende saber se deve rejeitar um determinado carregamento de material, pois ao verificar um certo número de peças, encontrou uma determinada percentagem de defeituosas;
- o fabricante desejaria saber se um produto que pretende lançar no mercado, terá uma boa probabilidade de aceitação;
- o corretor da bolsa interroga-se sobre se será provável que umas acções que tem em vista, aumentem de cotação.

Todos estes exemplos têm uma característica comum, que é o facto de <u>não conseguirmos prever com exactidão e de antemão qual o resultado da situação</u> de incerteza. *Pe-*

rante as várias possibilidades que se nos apresentam, não sabemos qual a que se vai verificar. No entanto os métodos probabilísticos vão-nos permitir quantificar essa incerteza.

Para tentar formalizar o conceito de Probabilidade vamos introduzir alguma terminologia própria da linguagem das probabilidades.

1.3 - Experiência aleatória. Espaço de resultados. Acontecimentos.

Como sabemos o objectivo da Estatística é o estudo de Populações, isto é, conjuntos de indivíduos (não necessariamente pessoas) com características comuns que se pretendem estudar. A uma característica comum, que assume valores diferentes de indivíduo para indivíduo, chamamos *variável*. Ao processo que consiste em recolher uma observação de uma variável que se pretende estudar chamamos *experiência aleatória*.

Experiência aleatória – processo que conduz à obtenção de uma observação ou resultado, de entre um conjunto de resultados possíveis (método utilizado para aquisição de dados).

Da forma como definimos experiência aleatória ressaltam algumas características que a caracterizam:

- Pode-se realizar **repetidamente**, nas mesmas circunstâncias, e de forma independente de umas vezes para as outras.
- Dá um **resultado**, de entre um conjunto de resultados possíveis conhecidos antes da realização da experiência, conjunto esse a que se dá o nome de **espaço de resultados**.
- De entre os resultados possíveis, **não se tem conhecimento suficiente** de qual o resultado a ser obtido, de entre os resultados do espaço de resultados.

Espaço de resultados S – conjunto de resultados possíveis associados a uma experiência aleatória.

São exemplos de experiências aleatórias:

- contar o nº de carros estacionados, na rua, ao sairmos de manhã de casa;
- perguntar a uma pessoa ao acaso, da sua cidade, quantas são as pessoas do seu agregado familiar;
- perguntar a uma pessoa ao acaso, do seu bairro fiscal, qual o seu rendimento;
- perguntar a uma pessoa ao acaso, da sua rua, quantos anos tem;
- lançar uma moeda ao ar e ver o resultado que sai;
- lançar uma moeda ao ar 20 vezes e ver quantas caras saem;
- medir o tempo que de manhã levamos a chegar ao emprego;
- contar o nº de desastres que encontramos, em cada dia, na ida para o emprego.

As situações anteriores são exemplos de experiências aleatórias, pois além de envolverem aleatoriedade, o resultado da experiência está bem especificado. O mesmo não se passa com a seguinte situação: *ao acordar, de manhã, ir à janela*. Efectivamente, na situação anterior não se especificou qual o resultado possível, de modo a termos uma experiência aleatória. No entanto, associado à situação anterior são experiências aleatórias:

- *ao acordar, de manhã, ir à janela* e ver se chove;
- *ao acordar, de manhã, ir à janela* e contar o nº de carros encarnados, que passam num período de 5 minutos.

Relativamente a estas duas experiências aleatórias, os espaços de resultados associados são respectivamente {chove, não chove} e {0, 1, 2, 3, …}.

A definição correcta do espaço de resultados associados a uma experiência é um passo fundamental para posteriormente definirmos acontecimentos.

Acontecimento - Define-se acontecimento, como sendo um subconjunto do espaço de resultados S.

Os acontecimentos são representados pelas letras A, B, C, ….

Exemplo 3 - Considerando a experiência aleatória que consiste em perguntar a duas pessoas escolhidas ao acaso, de uma dada cidade, se são a favor ou contra a despenalização do aborto, o espaço de resultados é constituído pelos seguintes resultados:

S = {(Favor Favor), (Favor Contra), (Contra Favor), (Contra Contra)}

Alguns acontecimentos são:

- uma das pessoas é contra, que podemos representar por A= {Favor Contra, Contra Favor};
- pelo menos uma das pessoas é contra, que podemos representar por B= {Favor Contra, Contra Favor, Contra Contra };
- as duas pessoas são a favor, que podemos representar por C={ Favor Favor }.

Diz-se que se *realizou* o acontecimento A quando o resultado da experiência pertence a A.

Alguns acontecimentos são constituídos por um único resultado: chamam-se **acontecimentos elementares.** Os acontecimentos elementares de um espaço de resultados S são assim subconjuntos do espaço, que contêm um só elemento.

Exemplo 4 - Considere a experiência aleatória que consiste em lançar dois dados[1] e verificar as faces que ficam voltadas para cima. Identifique o espaço de resultados e os acontecimentos "o número de pintas é igual nos dois dados" e "a soma das pintas é 7".

Para descrever o espaço de resultados vamos considerar dois dados, um preto e um branco, para os distinguir. O espaço de resultados é constituído por todos os pares de dados considerados na figura a seguir. O número de elementos do espaço de resultados é $36 = 6 \times 6$.

O espaço anterior pode ser descrito de forma mais sintética considerando os pares ordenados (i,j), onde representamos por i o número de pintas do dado 1, ou seja do dado preto, e por j o número de pintas do dado 2, ou seja do dado branco:

[1] No texto, um dado é constituído por 6 faces, com 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 pintas, a menos que seja explicitamente referido o contrário.

S = {(i,j): i=1,2,...,6; j=1,2,...6}

Chamamos a atenção que, por exemplo, o par (1,3) não é o mesmo que o par (3,1). No par ordenado, o primeiro elemento refere-se a um dos dados (neste caso o dado preto) e o segundo elemento refere-se ao outro dado (o dado branco).

O acontecimento "o número de pintas é igual nos dois dados" é constituído pelos pares assinalados na figura seguinte, por uma linha a tracejado

ou em notação em termos dos pares ordenados

A = { (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}

Finalmente o acontecimento "a soma das pintas é 7" é constituído pelos pares assinalados na figura seguinte

ou em notação em termos dos pares ordenados

B = {(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}

Qual a diferença entre o espaço de resultados associado à experiência aleatória do lançamento de dois dados e a experiência que consiste no lançamento do mesmo dado duas vezes? Não existe diferença, o espaço de resultados é idêntico nas duas experiências.

Exemplo 5 - Se lançar 3 dados e verificar as faces que ficam voltadas para cima, como é constituído o espaço de resultados associado a esta experiência?

Utilizando uma generalização da notação do exemplo anterior, o espaço de resultados será constituído por todos os triplos (i, j, k), em que o i, j e k, podem assumir os valores de 1 a 6. O i refere-se a um dos dados, por exemplo o 1º a ser lançado, ou se os quisermos distinguir a um dado preto, o j refere-se ao 2º dado a ser lançado, ou a um dado branco e finalmente o k refere-se ao 3º dado a ser lançado, ou a um dado vermelho. O número de elementos do espaço de resultados, ou seja, o número de resultados possíveis é $216 = 6 \times 6 \times 6$.

Nota histórica (Statistics, 1991) - No século XVII, os jogadores italianos costumavam fazer apostas sobre o número total de pintas obtidas no lançamento de 3 dados. Acreditavam que a possibilidade de obter um total de 9 era igual à possibilidade de obter um total de 10. Por exemplo, diziam que uma combinação possível para dar um total de 9 seria

1 pinta num dos dados, 2 pintas num outro dado, 6 pintas no terceiro dado

Abreviando o resultado anterior para "1 2 6", todas as combinações para dar o 9 são:

1 2 6   1 3 5   1 4 4   2 3 4   2 2 5   3 3 3

Analogamente, obtinham 6 combinações para o 10:

1 4 5   1 3 6   2 2 6   2 3 5   2 4 4   3 3 4

Assim, os jogadores argumentavam que o 9 e o 10 deveriam ter a mesma possibilidade de se verificarem. Contudo, a experiência mostrava que o 10 aparecia com uma frequência um pouco superior ao 9. Pediram a Galileu que os ajudasse nesta contradição, tendo este realizado o seguinte raciocínio: Pinte-se um dos dados de branco, o outro de cinzento e o outro de preto. De quantas maneiras se podem apresentar os três dados depois de lançados? O dado branco pode apresentar 6 possibilidades diferentes. Para cada uma destas possibilidades o dado cinzento pode apresentar 6 possibilidades, obtendo-se 6×6 possibilidades para os dois dados. Correspondendo a cada uma destas possibilidades, o dado preto pode apresentar 6 possibilidades obtendo-se no total $6 \times 6 \times 6 = 216$ possibilidades. Galileu listou todas as 216 maneiras de 3 dados se apresentarem depois de lançados. Depois percorreu a lista e verificou que havia 25 maneiras de obter um total de 9 e 27 maneiras de obter um total de 10.

O raciocínio dos jogadores não entrava em linha de conta com as diferentes maneiras como os dados se podiam apresentar. Por exemplo o triplo "3 3 3", que dá o 9, corresponde unicamente a uma forma de os dados se apresentarem, mas o triplo "3 3 4" que dá o 10, corresponde a 3 maneiras diferentes:

pelo que o raciocínio dos jogadores deve ser corrigido de acordo com a tabela seguinte:

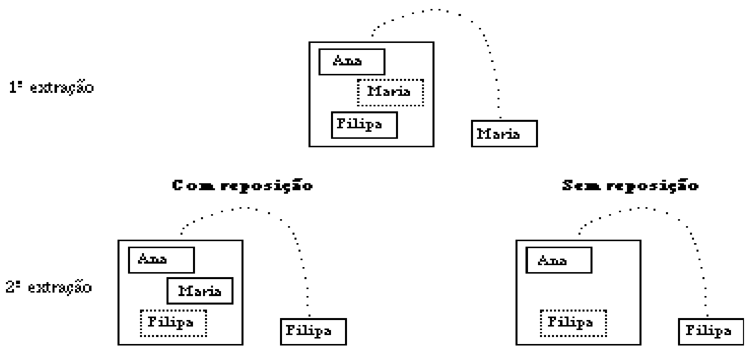
Triplos para o 9	Nº de maneiras de obter o triplo	Triplos para o 10	Nº de maneiras de obter o triplo
1 2 6	6	1 4 5	6
1 3 5	6	1 3 6	6
1 4 4	3	2 2 6	3

2	3	4	6	2	3	5	6
2	2	5	3	2	4	4	3
3	3	3	1	3	3	4	3
		Total	25			Total	27

Por vezes para definirmos o espaço de resultados associados com determinadas experiências, é necessário acrescentar algo sobre a metodologia da realização da experiência. Por exemplo se pretendermos obter o espaço de resultados associado à experiência aleatória que consiste em retirar duas bolas de uma urna contendo 4 bolas brancas e duas pretas, é necessário saber se após retirar a primeira bola ela é reposta ou não na urna.

Extracções com reposição e sem reposição

Colocaram-se (Graça Martins, et al, 1999) numa caixa 3 papéis com o nome de 3 meninas: Ana, Maria e Filipa. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar da caixa 2 papéis e verificar os nomes que saíram. Qual o espaço de resultados? Para responder a esta questão é necessário saber se a extracção se faz *com reposição*, isto é, se uma vez retirado um papel e verificado o nome se volta a colocar o papel na caixa, antes de proceder à extracção seguinte, ou se a extracção é feita *sem reposição*, isto é, uma vez retirado um papel, ele não é reposto antes de se proceder à próxima extracção. No esquema seguinte procuramos representar as duas situações.



Admitimos que na 1ª extracção saiu o papel com o nome da Maria. Na 2ª extracção, saiu o nome da Filipa nos dois casos, mas *na extracção com reposição* havia uma possibilidade em três de ele sair, tal como na 1ª extracção, enquanto que na *extracção sem reposição* havia uma possibilidade em duas de ele sair. Quer dizer que neste caso havia uma maior probabilidade de sair o nome da Filipa. Os espaços de resultados S_c e S_s correspondentes às duas situações com reposição e sem reposição, são respectivamente:

S_c = {(Ana, Ana), (Ana, Maria), (Ana, Filipa), (Maria, Ana), (Maria, Maria), (Maria, Filipa), (Filipa, Ana); (Filipa, Maria), (Filipa, Filipa)}

S_s = {(Ana, Maria), (Ana, Filipa), (Maria, Ana), (Maria, Filipa), (Filipa, Ana), (Filipa, Maria)}.

O acontecimento “saiu o nome da Maria” é constituído pelos seguintes resultados, considerando a extracção com reposição e sem reposição, respectivamente:

A_c= {(Ana, Maria), (Maria, Ana), (Maria, Maria), (Maria, Filipa), (Filipa, Maria)}

e A_s = {(Ana, Maria), (Maria, Ana), (Maria, Filipa), (Filipa, Maria)}.

Exemplo 6 - Considere a experiência aleatória que consiste em extrair 2 berlindes, de um saco com 3 berlindes vermelhos e 2 azuis. Qual é o espaço de resultados?

Para já é necessário saber se a extracção se faz com reposição ou sem reposição. Vamos considerar as duas situações. Para identificar o espaço de resultados será mais fácil numerar os berlindes, pelo que vamos numerar os berlindes vermelhos com 1, 2 e 3 e os azuis com 4 e 5.

Com reposição - Quando se retira um berlinde verifica-se a cor e torna-se a repor o berlinde no saco antes de extrair o próximo. O espaço de resultados é constituído por todos os resultados, em número de 25, do esquema seguinte:

Sem reposição - Neste caso o espaço de resultados é constituído por todos os resultados do espaço do esquema anterior, exceptuando os pares constituídos pelo mesmo berlinde:

O acontecimento “tirar 2 berlindes de cor diferente” é constituído pelos resultados {(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3)} tanto no esquema com reposição, como sem reposição.

A definição do espaço de resultados nem sempre está isenta de ambiguidades. No exemplo anterior, podemos assumir que o espaço de resultados associado com a experiência que consiste em retirar 2 berlindes de um saco com 3 berlindes vermelhos (V) e 2 azuis (A) é constituído pelos resultados elementares {VA, VV, AV, AA} quer a extracção se faça com ou sem reposição. Neste caso é-nos indiferente qual o berlinde seleccionado em cada tiragem, porque estamos interessados unicamente na cor.

Pode ainda acontecer que tenhamos de idealizar um modelo que não corresponde à realidade, mas para o qual não exista outra possibilidade de o definir. Por exemplo se pensarmos na experiência aleatória que consiste em averiguar o tempo de vida T de uma pessoa escolhida ao acaso, consideramos para espaço de resultados $S = \{T:T>0\}$. Será que uma pessoa pode ter 500 anos? E 400? E 200? Temos dificuldade em estabelecer um limite superior para o valor de T, pelo que temos de nos abstrair um pouco da realidade considerando aquele modelo para o espaço de resultados.

Diagramas de Venn

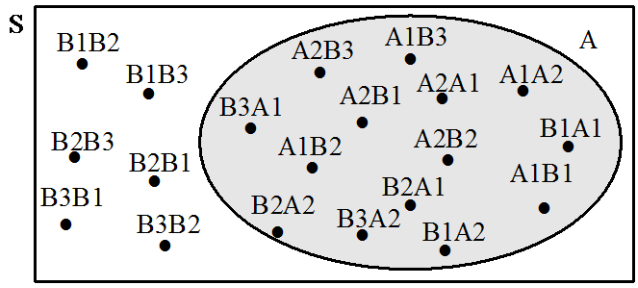
Uma técnica utilizada para visualizar o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória, consiste em utilizar figuras geométricas, tais como círculos, rectângulos ou quadrados para representar os acontecimentos.

Exemplo 7 – Considere a experiência aleatória que consiste em verificar o sexo dos filhos das famílias de 2 filhos. O espaço de resultados é constituído pelos resultados

S={MM, MF, FM, FF}. Seja A o acontecimento “pelo menos um dos filhos é do sexo masculino”. Representando num diagrama de Venn temos

Exemplo 8 – Considere a experiência aleatória que consiste em retirar 2 disquetes, de uma caixa de 5 disquetes, em que 2 estão avariadas. Represente, através de um diagrama de Venn, o espaço de resultados e o acontecimento A = {pelo menos uma disquete está avariada}.

Representando as disquetes boas por B1, B2 e B3 e as avariadas por A1 e A2, temos



onde representamos, por exemplo, por B1B2, a saída das disquetes boas B1 e B2.

Esta técnica, da representação de acontecimentos através de diagramas de Venn, vai ser utilizada a seguir, para exemplificar a terminologia própria utilizada nas operações com acontecimentos.

1.3.1 - Operações com acontecimentos

Existindo um paralelismo entre conjuntos e acontecimentos há, no entanto, uma terminologia própria para acontecimentos. Assim, representando os acontecimentos por A, B, C, ..., temos:

- Acontecimento **Complementar** do acontecimento **A**:

O acontecimento **complementar** do acontecimento A, representa-se por $\overline{A}$ ou $\mathbf{A^C}$ e é o acontecimento constituído por todos os resultados de S, que não estão em A.

Exemplo 9 – Considere a experiência aleatória que consiste em lançar um dado e verificar a face que sai, identificada pelo número de pintas. O acontecimento complementar do acontecimento A, "saída de face par" constituído pelos resultados A={2, 4, 6}, é o acontecimento $\overline{A}$, "saída de face ímpar", constituído pelos resultados $\overline{A}$ = {1, 3, 5}.

- Acontecimento **A implica B**

O acontecimento A **implica** a realização do acontecimento B, quando todo o resultado de A é um resultado de B; indica-se este facto escrevendo $\mathbf{A \subset B}$.

Exemplo 9 (cont) – O acontecimento C, "saída da face 2", implica a realização do acontecimento A, pelo que se escreve $\mathbf{C \subset A}$.

- Acontecimento **Intersecção**

Intersecção dos acontecimentos A e B, $\mathbf{A \cap B}$, ou (A **e** B) é o acontecimento que se realiza sse A e B se realizam simultaneamente.

Exemplo 10 – Considere a experiência aleatória que consiste em averiguar num grupo de 5 amigos, constituído pelo João, Manuel, Tiago, Tomás e David, se praticam algum desporto e se são casados ou não. Se soubermos que o João, o Tomás e o David são casados e que o Tiago e David praticam desporto, temos, representando por C o acontecimento “ser casado” e por N o acontecimento “não praticar desporto”:

$$C \cap N = \{\text{João, Tomás}\}$$

isto é, só o João e o Tomás é que são casados e não praticam desporto.

- Acontecimento **UniãoUnião** dos acontecimentos A e B, **A∪B** , ou (A **ou** B) é o acontecimento que se realiza sse A ou B se realizam.

Exemplo 10 (cont.) – O acontecimento união de C e N é

$$C \cup N = \{\text{João, Manuel, Tomás, David}\}$$

isto é, o João, o Manuel, o Tomás e o David ou são casados ou não praticam desporto.

- Acontecimentos **Disjuntos**

Acontecimentos **disjuntos** ou acontecimentos **mutuamente exclusivos** são acontecimentos em que a realização de um deles implica a não realização do outro.

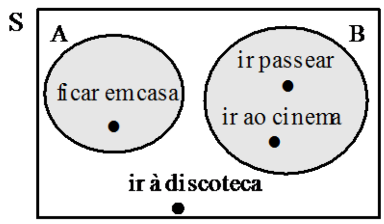
Exemplo 11 – Considere a experiência aleatória que consiste em verificar qual o número de carros que um “stand” de automóveis vende por dia. Sendo o espaço de resultados S={0, 1, 2, 3, …}, os acontecimentos “vende no máximo dois carros” e “vende pelo menos 3 carros”, representados respectivamente por A={0, 1, 2} e B= {3, 4, 5,…}, são disjuntos. Neste caso, os acontecimentos além de disjuntos são complementares, pois a sua união é o espaço de resultados.

- Acontecimento **Impossível**

Acontecimento **impossível** é o acontecimento que resulta da intersecção de acontecimentos mutuamente exclusivos. Analogamente ao que se passa na teoria dos conjuntos, representa-se por $\varnothing$ (símbolo do conjunto vazio, mas que aqui se lê acontecimento impossível e não acontecimento vazio). Então, com esta notação introduzida para o acontecimento impossível, temos:

Se dois acontecimentos são disjuntos, então $A \cap B = \varnothing$.

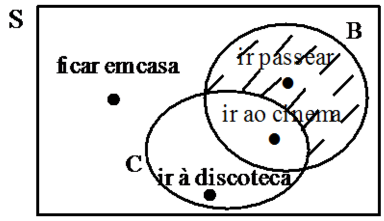
Exemplo 12 – Considere experiência que consiste em perguntar a um aluno da turma F1 do 12º ano da Escola Professor Herculano de Carvalho, o que fará no próximo sábado, à noite. Admitindo que o espaço de resultados é S = {ficar em casa, ir ao cinema, ir à discoteca, ir passear de carro}, os acontecimentos A = {ficar em casa} e B = {ir ao cinema, ir passear de carro} são disjuntos, pelo que a sua intersecção é o acontecimento impossível:



- Acontecimento **Diferença**

Acontecimento diferença entre A e B, **A-B**, é o acontecimento que se realiza sse A se realiza, sem que B se realize.

Exemplo 12 (cont.) – Representando por C = {ir ao cinema, ir à discoteca}, vem B-C = {ir passear}, representado no diagrama de Venn, a tracejado



Actividade

Numa determinada Universidade, verificou-se que, de entre os 115 alunos do 1º ano no ano lectivo de 98/99, em determinado curso com 3 disciplinas:

57 foram aprovados em Análise Infinitesimal

45 foram aprovados em Álgebra

87 foram aprovados em Probabilidades

28 foram aprovados em Análise e Álgebra

35 foram aprovados em Análise e Probabilidades

30 foram aprovados em Álgebra e Probabilidades

15 foram aprovados em Análise, Álgebra e Probabilidades

Represente num diagrama de Ven os acontecimentos anteriores:

O diagrama anterior permite ainda concluir que:

2 alunos só foram aprovados a Álgebra

9 alunos só foram aprovados a Análise

37 alunos só foram aprovados a Probabilidades

4 alunos não foram aprovados a nenhuma das 3 disciplinas

111 alunos foram aprovados a pelo menos uma disciplina

13 alunos só foram aprovados a Análise e Álgebra

20 alunos só foram aprovados a Análise e Probabilidades

15 alunos só foram aprovados a Álgebra e Probabilidades

Actividade

Suponha que vai a um supermercado e compra 5 iogurtes de marca “Bem Bom” e 3 de marca “Apetitoso”. Como ia com muita pressa nem reparou de que sabor eram os iogurtes. Considere a experiência aleatória que consiste em verificar quantos iogurtes, de cada uma das marcas, são de morango. Represente num diagrama de Venn os acontecimentos :

A - Só comprou um iogurte de morango;

B - Comprou no máximo 3 iogurtes de morango;

C - Comprou pelo menos 5 iogurtes de morango.

Resolução:

Representando pelo par (i,j) o acontecimento elementar que consiste em obter i iogurtes de morango da marca “Bem Bom” e j iogurtes de morango da marca “Apetitoso”, o espaço de resultados é constituído pelos seguintes resultados:

S = {(0,0),(0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (4,0), (4,1), (4,2), (4,3), (5,0), (5,1), (5,2), (5,3)}.

Os acontecimentos A, B e C serão:

A = {(0,1), (1,0)}

B = {{(0,0),(0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (3,0)}

C = {(2,3), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (5,0), (5,1), (5,2), (5,3)}.

Nota: De um modo geral os diagramas de Venn não são construídos à escala, pelo que a área ocupada com a figura utilizada para representar um acontecimento não é necessariamente proporcional à probabilidade de esse acontecimento se realizar.

1.4 - Modelos de Probabilidade

Um dos primeiros passos na definição de um *modelo de probabilidade* que descreva uma experiência aleatória é precisamente a definição do espaço de resultados associado. Posteriormente teremos de associar probabilidades a cada um dos elementos do espaço de resultados. Por exemplo, na experiência aleatória que consiste no lançamento de um dado e em verificar a face que fica voltada para cima, identificamos o espaço de resultados como S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Se além disso admitirmos que o dado é equilibrado, então é natural atribuir a cada um dos acontecimentos elementares a probabilidade 1/6, obtendo o modelo de probabilidade representado na seguinte tabela:

Acontecimento elementar	1	2	3	4	5	6
Probabilidade	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Analogamente, se considerarmos a experiência aleatória que consiste em lançar uma moeda *equilibrada* e em verificar a face que fica voltada para cima, é natural considerar como espaço de resultados S={Face, Coroa} e atribuir a cada dos acontecimentos elementares associados {Face} e {Coroa} a probabilidade 1/2. No entanto, pode acontecer ao lançar uma moeda ela ficar em pé! Assim, o espaço de resultados deveria ser S={Face, Coroa, em pé}. Porque é que então não se considera? O problema é que nós andamos à procura de um modelo que traduza o melhor possível a situação real, mas que por outro lado seja simples. Ora, ao assumirmos para esta experiência do lançamento da moeda este último espaço de resultados estaríamos a complicar demasiado o modelo, já que agora teríamos sérias dificuldades para atribuir probabilidades a cada um dos acontecimentos elementares, além de que ficaríamos com um modelo que acabava por desvirtuar a realidade da experiência em causa. O objectivo da escolha de um modelo é o de encontrar um que consiga apreender os aspectos importantes do fenómeno a estudar, associado à experiência aleatória em causa, mas que seja suficientemente simples para se conseguir trabalhar. O estatístico Georges Box afirmava que: *Todos os modelos são maus; alguns modelos são úteis*.

Suponhamos agora que sabíamos que a nossa moeda não era equilibrada. Considerando o espaço de resultados S={Face, Coroa}, como atribuir probabilidades a cada um dos acontecimentos elementares? Um processo será repetir a experiência um grande número de vezes e considerar como valor aproximado para a probabilidade de sair Face, a frequência relativa da saída de Face no número de provas realizado (proporção de vezes que se verificou Face). Se, por exemplo, em 10000 lançamentos se verificou a saída de Face 4815 vezes poderemos adoptar como modelo de probabilidade o seguinte:

Acont. elementar	Face	Coroa
Probabilidade	.48	.52

Consideremos ainda o seguinte exemplo, onde utilizamos o *diagrama em árvore*, que é uma técnica utilizada com frequência para ajudar a descrever resultados associados a experiências aleatórias que envolvam vários passos, assim como para ajudar a obter cálculos associados com os resultados referidos.

Exemplo 13 - Duas equipas de baseball, muito equilibradas, disputam um torneio de 4 jogos. Regista-se o resultado de cada jogo (não está previsto o empate).

a) Descreva o espaço de resultados associado à experiência aleatória que consiste em verificar quais os resultados da equipa 1 nos quatro jogos.

b) Seja A o acontecimento: A equipa 1 ganha exactamente 3 jogos. Quais os acontecimentos elementares que compõem A?

c) Atribua probabilidades aos acontecimentos elementares.

Resolução:

a) O espaço de resultados é constituído por todos os conjuntos de 4 elementos da figura seguinte, onde representamos por G e P respectivamente a equipa 1 ganha ou perde.

b) Os acontecimentos elementares que compõem A encontram-se assinalados com **.

c) Como admitimos que existe igual possibilidade da equipa ganhar ou perder em cada jogo, é natural esperar que cada resultado do espaço de resultados tenha a mesma probabilidade, ou seja 1/16.

1º jogo 2º jogo 3º jogo 4º jogo

Se temos um modelo de probabilidade bem definido será natural que se pretenda calcular a probabilidade de qualquer acontecimento relacionado com a experiência em causa, e que não seja um acontecimento elementar. A que será igual então a probabilidade do acontecimento A, que representamos por P(A)? Uma vez que este acontecimento é constituído por 4 acontecimentos elementares, existem 4 possibilidades em 16 de ele se realizar, de forma que $P(A) = 4/16 = 1/4$.

Pensemos agora na experiência aleatória que consiste em verificar qual o resultado do jogo Benfica-Sporting no próximo campeonato. O espaço de resultados é constituído pelos resultados S = {Benfica ganha, Benfica empata, Benfica perde}. Como atribuir probabilidades a estes acontecimentos elementares? Temos aqui uma situação em que temos dificuldade em considerar um modelo de probabilidade, pois quaisquer duas pessoas podem considerar modelos diferentes. Por exemplo, um indivíduo pode ter algumas razões que o levem a considerar o seguinte modelo:

Acontecimento	Benfica ganha	Benfica empata	Benfica perde
Probabilidade	.65	.25	.10

Outra pessoa qualquer não considerará o mesmo modelo, necessariamente.

Os exemplos anteriores ajudaram-nos a compreender como é que se pode atribuir um número para representar a Probabilidade de um acontecimento, que se pode definir como sendo uma medida da credibilidade da sua ocorrência, dando-nos ao mesmo tempo indicação de algumas regras básicas a que deve obedecer qualquer modelo.

Probabilidade de um acontecimento – é um número que mede a possibilidade de esse acontecimento se realizar.

Consideremos uma experiência aleatória que conduza a um espaço de resultados S *discreto*, isto é, que só assume um número finito ou infinito numerável de resultados distintos que representamos por E_1, E_2, E_3, ….. Então, qualquer que seja o modo de construir o modelo de probabilidade (isto é, obter as probabilidades associadas aos acontecimentos elementares que constituem o espaço de resultados), vamos fixar como regras básicas as seguintes:

<u>Regra 1</u> - A probabilidade de qualquer acontecimento elementar E_i é um número entre 0 e 1

$$0 \le P(E_i) \le 1$$

<u>Regra 2</u> - A soma das probabilidades dos acontecimentos elementares que compõem o espaço de resultados S = {E_1, E_2, E_3, …} é igual a 1

$$\sum P(E_i) = 1$$

Qualquer que seja o acontecimento A, associado ao espaço de resultados S, define-se:

A **probabilidade** P(A) do acontecimento A, é a soma das probabilidades dos acontecimentos elementares que compõem A.

1.5 – Aproximações conceptuais para a Probabilidade

Vamos apresentar de seguida algumas teorias que nos conduzem a processos de construir modelos de probabilidades, isto é, uma vez definido o espaço de resultados, indicam-nos o processo de obter valores para as probabilidades dos acontecimentos associados.

1.5.1 - Aproximação frequencista de Probabilidade

Retomemos a definição de experiência aleatória. Desta definição, vimos que uma das suas características consistia no facto de se poder *repetir*, nas mesmas circunstâncias. Vamos então repetir a experiência um grande número de vezes e registar a *frequência relativa* - proporção de vezes - com que um determinado resultado - acontecimento elementar - ocorreu.

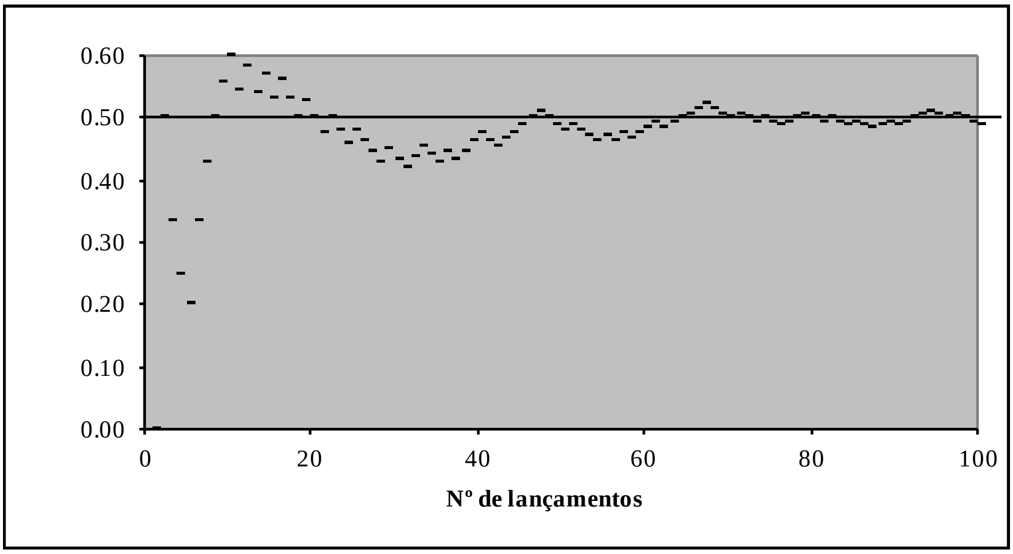
À medida que o número de repetições da experiência aleatória aumenta, a frequência relativa do acontecimento elementar tende a estabilizar para um valor entre 0 e 1. Este valor, é interpretado como sendo a **Probabilidade** desse acontecimento elementar se realizar.

Suponhamos, por exemplo, a experiência aleatória que consiste no lançamento de uma moeda ao ar e observar a face que fica virada para cima. Realizaram-se 100 lançamentos, tendo-se obtido os seguintes resultados:

1	cara	21	cara	41	cara	61	coroa	81	cara
2	coroa	22	coroa	42	cara	62	cara	82	coroa
3	cara	23	cara	43	coroa	63	coroa	83	cara
4	cara	24	cara	44	coroa	64	coroa	84	cara
5	cara	25	coroa	45	coroa	65	coroa	85	coroa
6	coroa	26	cara	46	coroa	66	coroa	86	cara
7	coroa	27	cara	47	coroa	67	coroa	87	cara
8	coroa	28	cara	48	cara	68	cara	88	coroa
9	coroa	29	coroa	49	cara	69	cara	89	coroa
10	coroa	30	cara	50	cara	70	cara	90	cara
11	cara	31	cara	51	coroa	71	coroa	91	coroa
12	coroa	32	coroa	52	cara	72	cara	92	coroa
13	cara	33	coroa	53	cara	73	cara	93	coroa
14	coroa	34	cara	54	cara	74	coroa	94	coroa
15	cara	35	cara	55	coroa	75	cara	95	cara
16	coroa	36	coroa	56	cara	76	cara	96	cara
17	cara	37	cara	57	coroa	77	coroa	97	coroa
18	cara	38	coroa	58	cara	78	coroa	98	cara
19	coroa	39	coroa	59	coroa	79	coroa	99	cara
20	cara	40	coroa	60	coroa	80	cara	100	cara

Se ao fim dos 100 lançamentos se verificaram 49 coroas, então a frequência relativa com que se verificou o acontecimento saída de coroa foi de 0.49. *O valor para que tende a frequência relativa da saída de coroa, ao fim de um grande número de lançamentos, é interpretado como a probabilidade do acontecimento saída de coroa*.

O gráfico obtido para a frequência relativa após cada lançamento, tem o seguinte aspecto:



A frequência relativa, à medida que o número de provas aumenta, tem tendência a estabilizar à volta do valor 0.5. Assim, dizemos que a probabilidade de sair coroa é 0.5.

Observação: Chamamos a atenção, ainda relativamente a este exemplo, para o seguinte: não é correcto dizer que à medida que o número de lançamentos aumenta, o número de coroas se aproxima de metade do número de lançamentos. A *regularidade a longo termo* significa que a *frequência relativa* da saída de coroa tende a estabilizar. Neste caso, ao fim de 100 lançamentos o número de coroas foi de 49; se continuássemos a fazer lançamentos poderia acontecer que ao fim de 500, 1000, 2000 e 3000 lançamentos, o número de coroas obtidas fosse respectivamente de 253, 495, 993 e 1510 como se apresenta na seguinte tabela:

Nº lança-mentos	Nº coroas obti-das x	Metade dos lanç. y	|y - x|	Freq. rela-tiva
100	49	50	1	0.49
500	253	250	3	0.51
1000	495	500	5	0.50
2000	993	1000	7	0.50
3000	1510	1500	10	0.50

Como se verifica, pode acontecer que o número de coroas obtidas se afaste de metade do número de lançamentos, não impedindo que a frequência relativa tenha tendência a estabilizar à volta do valor 0.50.

Define-se *probabilidade* (definição frequencista) de um acontecimento A e representa-se por P(A) como sendo o valor obtido para a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória.

Exemplo 14 - Suponha que lança um dado 1000 vezes e verifica a face que ficou voltada para cima, tendo obtido os seguintes resultados:

Face	Freq. abs.	Freq. rel.(%)
1	159	15.9%
2	163	16.3%
3	160	16.0%
4	161	16.1%
5	86	8.6%
6	271	27.1%

Perante os resultados anteriores somos levados a sugerir para o dado o seguinte modelo de probabilidade:

Face	Probabilidade
1	16%
2	16%
3	16%
4	16%
5	9%
6	27%

Os resultados anteriores levam-nos a concluir que estamos perante um dado “viciado”, pois as faces não têm todas a mesma probabilidade de saírem, como seria de esperar num dado “equilibrado”.

Exemplo 15 - Qual a probabilidade de ao retirar uma carta ao acaso de um baralho de 52 cartas, ela ser um Ás? Suponha que tem um baralho de cartas e pede a alguém para retirar uma carta; verifica se é Ás e repõe a carta novamente no baralho. Repete esta experiência 1000 vezes, tendo o cuidado de entre duas extracções sucessivas, embaralhar as cartas. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Nº repetições	Freq. abs. Ás	Freq. rel. Ás
1000	78	0.078

Perante os resultados anteriores sugere-se a probabilidade de 8% para a saída de Ás.

Actividade – Exemplo de como organizar uma experiência na sala de aula

Embora a noção frequencista de probabilidade seja elementar, para a interiorização deste conceito não basta normalmente o seu simples enunciado teórico. Para que o aluno apreenda integralmente a noção frequencista de probabilidade torna-se necessário que ele obtenha experimentalmente a probabilidade de vários acontecimentos.

A primeira questão que se põe ao professor é como organizar uma aula para se determinar a probabilidade de um acontecimento. Claro que tudo depende das características da turma e dos hábitos de trabalho que o professor tenha com os seus alunos. No entanto, atrevemo-nos a dar algumas sugestões.

1º Para que se possa ter alguma confiança no valor da frequência relativa como aproximação da probabilidade procurada, é preciso fazer muitas experiências. Ora, torna-se cansativo uma só pessoa fazer essas experiências todas. Interessa então que toda a turma faça experiências e se juntem depois os resultados de todos.

2º Na maior parte das vezes, os alunos podem estar agrupados aos pares. Um faz a experiência e o outro regista os resultados. Se se tratar de um jogo, jogam um contra o outro e vão registando quem vence.

3º Logo que um grupo termina o número de experiências proposto pelo professor, um dos seus elementos vai ao quadro registar quantas vezes fez a experiência e quantas vezes se verificou o acontecimento em estudo.

4º Previamente, o professor deve ter preparado no quadro uma tabela para que os alunos possam, sem ambiguidades, registar os resultados das suas experiências. Eis dois exemplos, um para o caso de se estar a analisar um jogo com dois jogadores A e B, outro para o caso de a experiência consistir em ver se um dado acontecimento se verifica.

Jogador A	Jogador B
18	12

Nº de experi.	Nº de êxitos
40	11

	15	15
	22	8
	...	...
Total	197	133

	40	14
	40	10
	...	...
Total	500	163

5º Depois de todos os grupos terem ido ao quadro registar os seus resultados, os alunos copiam a tabela para os seus cadernos, determinam os totais das várias colunas (que são escritos também na tabela do quadro), fazem os cálculos necessários e tiram conclusões.

Actividade A casa da "morte" no Jogo da Glória

No Jogo da Glória, cada jogador parte da casa de partida P e o objectivo é ser o primeiro a chegar à última casa do tabuleiro. Na sua vez de jogar, lança um dado e avança o correspondente número de casas. A casa onde vai parar pode dar direito a um prémio ou a um castigo.

Numa certa versão deste jogo, a casa nº 9 é a "casa da morte": quem lá cair é eliminado.

Qual é a probabilidade de um jogador ser eliminado?

Resolução:

O valor teórico da probabilidade pedida não é fácil de calcular com os conhecimentos que se têm neste nível de ensino. Então, o que há a fazer é usar um processo experimental para se obter um valor aproximado da probabilidade.

1º Processo – Experimentação directa

Cada aluno faz um desenho do tabuleiro e arranja uma marca e um dado.

Uma experiência consiste em colocar a marca na casa de partida, e ir lançando o dado e avançando a marca até que esta caia na casa 9 ou a ultrapasse.

Cada aluno faz umas 20 ou 30 experiências, registando sempre o resultado de cada uma. Quando acaba, vai ao quadro escrever o número total de experiências que fez e o número de vezes em que caiu na casa da morte.

Se a turma tiver 20 alunos, consegue-se assim o resultado de 400 a 600 experiências.

Calcula-se a frequência relativa dos casos em que o jogador foi eliminado. Esta frequência é uma boa estimativa da probabilidade.

2º Processo – Simulação com a calculadora

Em vez de usar dados e tabuleiros, podemos fazer uma simulação usando a calculadora.

A maneira mais simples é pôr a calculadora a funcionar como dado. Carregamos em MATH, vamos ao menu PRB (probabilidades) e escolhemos a opção 5:randInt(. Esta função da máquina gera números aleatórios inteiros dentro dos limites que indicarmos, separados por uma vírgula. No caso de um dado, os limites são evidentemente 1 e 6. Cada vez que teclarmos ENTER obtemos a simulação do lançamento do dado.

Depois, ou usamos um tabuleiro desenhado no papel e uma marca, ou vamos somando mentalmente os números saídos, verificando se caímos na casa 9 ou se a ultrapassamos. Após cada experiência, convém fazer CLEAR para que não haja confusão com os números saídos anteriormente.

3º Processo – Programa de simulação com a calculadora

É possível usar um programa muito simples que faça todo o trabalho anterior por nós. Em anexo neste livro está o programa GLORIA que faz precisamente isto. Chamamos o programa, indicamos quantas experiências queremos fazer e passado uns momentos a máquina indica-nos o número de experiências e a frequência relativa de resultados correspondentes a ter caído na casa 9.

O programa demora cerca de 18 segundos a fazer 100 experiências. O resultado foi uma frequência relativa de 0,27. Mas 100 experiências são poucas. O programa permite continuar a simulação, acrescentando mais experiências.

Ao fim de 500 experiências, a frequência relativa da queda na casa da morte foi de 0,276. Por curiosidade, fomos avançando até às 5000 experiências e a frequência relativa final foi aproximadamente 0,285. A verdadeira probabilidade deve ser muito próxima deste valor.

Actividade – Um jogo de cinco dados

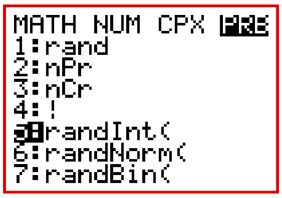
Lançam-se cinco dados. Para ganharmos tem de sair o número 5 mas não pode sair o 6. Qual é a probabilidade de ganhar?

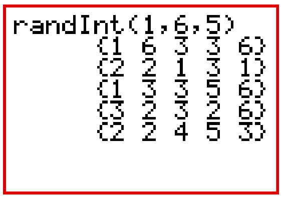
Numa fase inicial do estudo das probabilidades, os alunos ainda não têm conhecimentos que lhes permitam responder à pergunta com o valor exacto. No entanto, podem obter experimentalmente uma aproximação razoável.

Para isso, cada aluno arranja cinco dados, faz muitas experiências e regista os resultados. Se não houver dados que cheguem para todos ou se quisermos ser mais rápidos, podemos fazer uma **simulação** com a calculadora gráfica.

Na TI-83 carregamos na tecla MATH e em PRB escolhemos a instrução 5:randInt(. Depois escrevemos, separados por vírgulas, os limites entre os quais queremos que a máquina escolha números inteiros ao acaso: 1 e 6. Como queremos o resultado de cinco dados, acrescentamos mais uma vírgula e o número 5. Agora, cada vez que carregarmos em ENTER, aparecem os cinco valores dos dados.

ç ~ ~ ~ Õ Õ ....

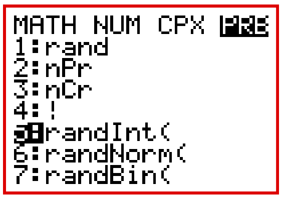


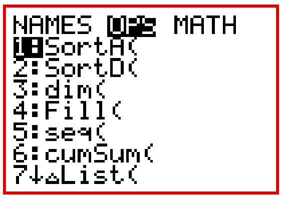


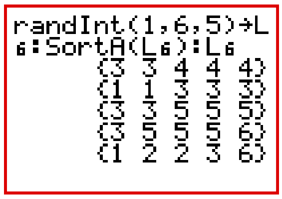
Temos de olhar para grupo de cinco dados e ver se tem um 5 e se não tem 6. Nas experiências que estão na figura anterior, perdemos as quatros primeiras jogadas e ganhámos na última.

Para ser mais fácil e evitar enganos, podemos dar três instrução simultâneas à máquina: guardar os cinco valores numa lista (L6, por exemplo), ordenar a lista e mostrá-la. Estas três instruções devem estar separadas por dois pontos.

ç ~ ~ ~ y LIST Õ Õ ....







Agora basta olhar para o número da direita em cada lista. Se for um 5 ganhamos, se não for perdemos. No exemplo anterior, nas cinco jogadas feitas, só ganhámos na terceira.

Se, numa turma, cada aluno fizer umas 50 experiências, registando o número de experiências e o número de vezes que ganhou, facilmente se conseguem 1000 resultados. Foi o que fizemos. Em 1000 experiências, ganharam-se 276 vezes, o que corresponde a uma frequência relativa de 0,276.

Podemos então prever que a probabilidade de ganhar numa jogada vai ser próxima deste valor, não longe dos 28%.

Claro que quantas mais experiências fizermos, mais confiança poderemos ter nos resultados. Por isso, juntámos os resultados de várias turmas até chegar às 10000 experiências. O número de vitórias foi de 2731. A frequência relativa é 0,2731 e portanto a probabilidade procurada deverá estar próxima dos 27%.

Mais adiante, iremos calcular o valor exacto desta probabilidade.

1.5.2 - Definição clássica de Probabilidade ou de Laplace

Voltando ainda ao exemplo do dado, suponhamos que este é equilibrado, isto é, em qualquer lançamento pode sair uma qualquer das seis faces com igual possibilidade. Então, por exemplo a probabilidade de sair a face 2 é de 1 em 6, ou seja 1/6. Analogamente para qualquer uma das outras faces.

Suponhamos agora que temos uma caixa com 5 berlindes, 3 vermelhos e 2 azuis, que se diferenciam unicamente pela cor. Se se meterem os berlindes num saco e se extrair um sem olhar para dentro do saco, qual a probabilidade de obter um berlinde azul? Como temos 5 berlindes, dos quais 2 azuis, temos uma possibilidade de 2 em 5 de tirar um berlinde azul, ou seja uma probabilidade igual a 2/5.

Se dado um baralho de cartas, pretendermos saber qual a probabilidade de sair o Ás de paus, como temos uma carta favorável para a nossa pretensão (Ás de paus) de entre 52 possíveis, então a probabilidade pretendida é 1/52.

Mais geralmente, se o espaço de resultados S é constituído por um número finito **n** de elementos – resultando assim em n acontecimentos elementares, todos eles *igualmente possíveis*, a **probabilidade** de cada acontecimento elementar é **1/n**.

Considerando de novo a experiência do lançamento do dado, qual a probabilidade de se realizar o acontecimento "sair uma face par"?

Neste momento temos 3 faces favoráveis, de entre 6 possíveis, pelo que a probabilidade pretendida é de 3/6 ou 1/6 + 1/6 +1/6, que é a soma das probabilidades dos acontecimentos elementares que conduzem à realização do acontecimento.

Definida intuitivamente a probabilidade de um acontecimento elementar, define-se **Probabilidade de um acontecimento A** e representa-se por **P(A)**, como sendo a soma das probabilidades dos acontecimentos elementares que compõem A.

É costume interpretar esta probabilidade como sendo a razão entre o número de resultados **favoráveis** a A (resultados que compõem A) - $\mathbf{n_A}$ e o número de resultados **possíveis** (resultados que constituem S) - **n**:

Dado o espaço de resultados S constituído por um número finito **n** de elementos, todos eles *igualmente possíveis*, define-se **Probabilidade de um acontecimento A** e representa-se por **P(A)**, como sendo a razão entre o número de resultados **favoráveis** a A (resultados que compõem A) - $\mathbf{n_A}$ e o número de resultados **possíveis** (resultados que constituem S) - **n**:

P(A) =

Exemplo 15 (cont) - Pretende- se saber qual a probabilidade de ao retirar uma carta de um baralho se obter um Ás. O número de casos favoráveis à realização do acontecimento "saída de um Ás" é 4, já que temos 4 ases. Como o número de casos possíveis é 52, então teremos para a probabilidade pretendida

$$\text{P(saída de Ás)} = \frac{4}{52} = 0.077 \approx 0.08$$

Exemplo 16 - De um grupo constituído por duas meninas e dois meninos, seleccionam-se ao acaso 2 crianças para realizarem um jogo de ténis. Qual a probabilidade de:

a) Serem os dois meninos?

b) Ser um menino e uma menina?

Resolução: Começando por identificar os dois meninos por M1 e M2 e as duas meninas por F1 e F2 vamos construir o espaço de resultados associado à experiência aleatória que consiste em seleccionar duas crianças ao acaso de entre as quatro:

S = {(M1, M2), (M1, F1), (M1, F2), (M2, M1), (M2, F1), (M2, F2),
(F1, M1), (F1, M2), (F1, F2), (F2, M1), (F2, M2), (F2, F1)}

Os acontecimentos de que pretendemos calcular as probabilidades são

"dois meninos" = {(M1, M2), (M2, M1)}

"menino e menina" = { (M1, F1), (M1, F2), (M2, F1), (M2, F2), (F1, M1), (F1, M2),
(F2, M1), (F2, M2)}

Assim, as probabilidades pretendidas são:

$$\text{P(dois meninos)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{menino e menina}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Observação: Obviamente que a selecção tem de ser feita sem reposição, pois são necessárias duas pessoas para o jogo!

Actividade - Um jogo com dois dados

Uma boa actividade introdutória ao estudo das probabilidades é apresentar este jogo aos alunos e perguntar-lhes se lhes parece que algum dos jogadores está em vantagem.

JOGO DOS DOIS DADOS

– Dois jogadores.

– Em cada jogada, cada jogador lança um dado e somam-se os pontos dos dois dados.

– O jogador **A** marca um ponto se a soma for 5, 6, 7 ou 8.

– O jogador **B** marca um ponto se a soma for 2, 3, 4, 9, 10, 11 ou 12.

– Ganha quem primeiro obtiver 20 pontos.

Depois de ouvir as opiniões dos alunos mas antes de as discutir, propor que eles façam alguns jogos. Para isso, devem organizar-se em grupos de dois, escolhendo entre si qual deles é o jogador A e qual é o B.

Uma boa parte dos alunos prefere ser o jogador B porque, das onze somas possíveis, há sete que fazem o jogador B ganhar e só quatro que o fazem perder. Um pouco apressadamente concluem que a probabilidade de ganhar seria $\frac{7}{11}$.

Depois de cada aluno receber um dado, cada grupo de alunos faz um jogo.

Se o professor não dispuser de dados suficientes, pode-se usar a calculadora gráfica para simular o lançamento dos dados.

Na TI-83 carregamos na tecla MATH e em PRB escolhemos 5:randInt(. Depois escrevemos, separados por vírgulas, os limites entre os quais queremos que a máquina escolha números inteiros ao acaso: 1 e 6. Como queremos o resultado de dois dados, acrescentamos mais uma vírgula e o número 2. Agora, cada vez que carregarmos em ENTER aparecem dois números correspondentes aos dois dados.

Somando os dois números, vemos se foi o jogador A ou o jogador B a ganhar. Neste exemplo, o jogador A marcou pontos no 2º, 3º e 6º lançamentos.

Terminado o jogo, cada grupo vai ao quadro registar o seu resultado numa tabela com o seguinte aspecto.

	Jogador A	Jogador B
	20	14
	19	20
	20	16
	...	...
Total	274	223

Normalmente, o jogador A ganhará a maior parte dos jogos. Isto faz-nos suspeitar que A está em vantagem. Além disso, a soma dos pontos de todos os jogos, é também maior para A. No exemplo que aqui apresentamos, vemos que A fez 274 pontos e B fez 223.

Houve 274 + 223 = 497 jogadas. Então, as frequências relativas das jogadas vitoriosas para cada jogador são:

$f_A = \dfrac{274}{497} \approx 0.551$ $\qquad$ $f_B = \dfrac{223}{497} \approx 0.449$

Em seguida, o professor pode propor aos alunos que procurem mostrar que realmente o jogador A está em vantagem. Se necessário, ir indicando pistas:

Será a soma "2" tão fácil de acontecer como a "7"? Só sai "2" se em ambos os dados sair 1, enquanto que "7" é possível de várias maneiras: 1+6 ou 2+5 ou 3+4 ou ...

Por outro lado, sair 3 num dado e 4 no outro é diferente de sair 4 no primeiro e 3 no segundo...

Pedir em seguida aos alunos que identifiquem os dados – por exemplo, dado azul e dado vermelho – e façam uma tabela de duas entradas com todos os casos possíveis.

	Dado Vermelho					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7

Dado	**2**	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
azul	**4**	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Vê-se então que há 36 casos elementares possíveis e organiza-se um quadro com o número de casos favoráveis para cada resultado.

Resultado	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Casos favoráveis	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Agora já podemos ver se algum jogador tem vantagem.

O jogador A ganha se sair 6, 7, 8 ou 9.

Os casos favoráveis a A são 5+6+5+4 = 20.

O jogador B ganha saindo 2, 3, 4, 5, 10, 11 ou 12.

Os casos favoráveis a B são 1+2+3+4+3+2+1 = 16.

Conclui-se então que o jogo é favorável ao jogador A, apesar de só lhe servirem quatro resultados. A probabilidade de ele ganhar uma jogada é $\frac{20}{36}$ ou 55.6%.

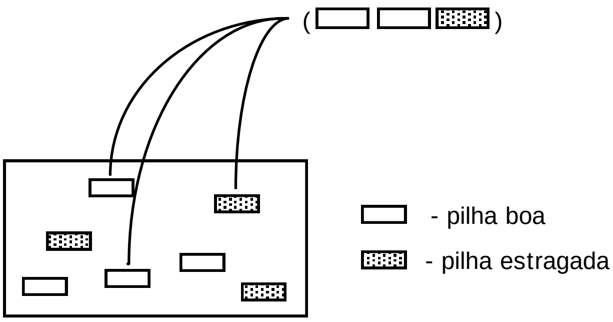
Para o jogador B, a probabilidade de ganhar é $\frac{16}{36}$ ou 44.4%.

Esta actividade pode ser formalmente apresentada da seguinte forma: Considere a experiência aleatória que consiste em lançar dois dados e em verificar a soma das pintas das faces que ficam viradas para cima. Qual a probabilidade de se obter um 6, 7, 8 ou 9? Como o espaço de resultados S associado a esta experiência é constituído por S = {(1,1), (1,2), …, (1,6), (2,1), (2,2),…, (2,6), (3,1), (3,2),…, (3,6), (4,1, (4,2),…, (4,6), (5,1), (5,2) …, (6,6), (6,1), (6,2), (6,6)}, todos eles igualmente possíveis, se os dados forem equilibrados, o acontecimento D, que faz com que a soma das pintas seja a pretendida, é constituído pelos resultados D = {(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1), (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2), (3,6), (4,5), (5,4), (6,3)}, pelo que a probabilidade pretendida é $\frac{20}{36}$.

Esta definição clássica de probabilidade, em que se atribui a mesma probabilidade a cada um dos acontecimentos elementares que constituem o espaço de resultados, finito, é quase sempre utilizada quando temos jogos com moedas, dados, cartas, etc, assim como em esquemas de amostragem, nomeadamente quando se recolhe uma amostra aleatória simples. Assim, o cálculo das probabilidades reduz-se normalmente a problemas de contagens, que podem ser facilitados com a existência de algumas regras de combinatória, que exemplificamos a seguir e que serão objecto de um capítulo posterior.

Exemplo 17 – Numa caixa estão 4 pilhas boas e 3 estragadas. Retiram-se 3 pilhas ao acaso. Qual a probabilidade de se obterem 2 pilhas boas e uma estragada?

Resolução:



O número de modos possíveis de retirar 3 pilhas da caixa = combinações de 7, 3 a 3, que é igual a $\frac{7!}{3!4!}$.

Destes resultados possíveis, nem todos são favoráveis, pois só nos interessam os que tenham 2 boas e 1 estragada. Os resultados favoráveis são dados pelas combinações de 4 pilhas 2 a 2, (2 pilhas boas) vezes combinações de 3 pilhas, 1 a 1 (1 pilha estragada) : $\frac{4!}{2!2!} \times \frac{3!}{1!2!}$.

A probabilidade pretendida vem igual a $\dfrac{\frac{4!}{2!2!} \times \frac{3!}{1!2!}}{\frac{7!}{3!4!}} = 0.51$.

Actividade – Soma maior que 13

Num certo jogo, lançam-se três dados normais e ganha-se quando a soma das pintas é maior que 13. Qual é a probabilidade de ganhar?

Há vários processos de descobrir esta probabilidade, uns experimentais, outros teóricos. Quando o cálculo teórico é muito trabalhoso, difícil ou mesmo impossível, recorre-se aos métodos experimentais para obter um valor aproximado. Vamos ver aqui vários desses processos e no fim determinaremos o valor exacto

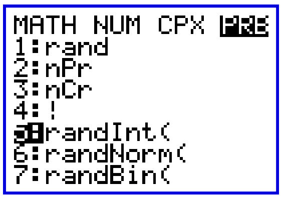
1º Processo – Experimentação directa

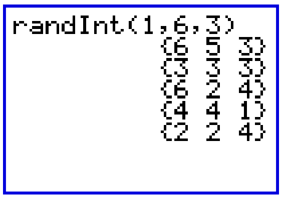
Pegam-se em três dados, lançam-se muitas vezes e de cada vez regista-se o resultado da soma. Ao fim de muitas experiências (que podem ir sendo feitas simultaneamente por várias pessoas diferentes), calcula-se a frequência relativa dos resultados maiores que 13. Se o número de experiências for suficientemente grande, esta frequência é uma boa estimativa da probabilidade.

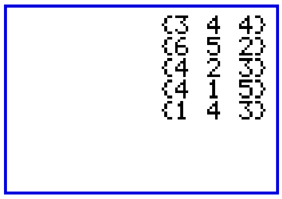
2º Processo – Simulação com a calculadora

Em vez de usar os dados, podemos fazer uma simulação com a calculadora, pedindo para ela gerar um conjunto de três números aleatórios entre 1 e 6, inclusive. Cada um destes números corresponde a um dado. Cada vez que carregarmos em ENTER aparece-nos um conjunto de três números que temos de somar para ver se o resultado é maior que 13.

ç

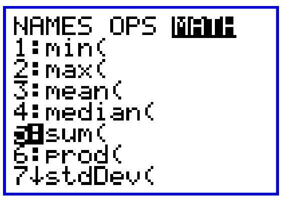


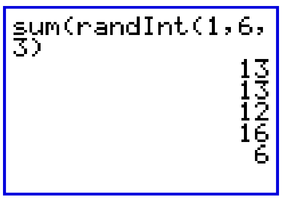




Podemos evitar o trabalho de somar os três números. Com a instrução sum(, a máquina efectua imediatamente a soma dos três números da lista, embora assim deixemos de saber que números saíram efectivamente nos dados.

y LIST ë



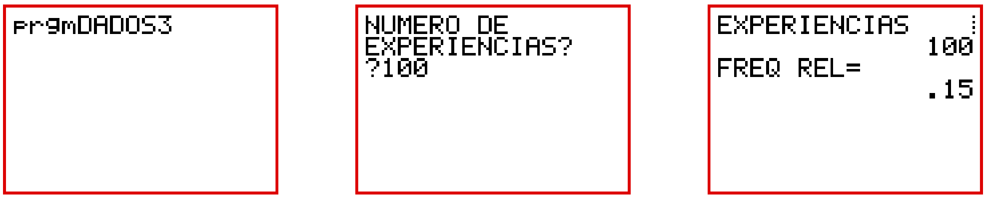


Cada vez que carregamos em ENTER obtemos um número entre 3 e 18. Para evitar enganos e maior facilidade da contagem, é aconselhável fazer aparecer cinco resultados de cada vez. Depois de registar os resultados, faz-se CLEAR, obtêm-se mais cinco resultados, e assim sucessivamente. Na figura anterior temos os resultados de 10 experiências, em que só uma vez a soma foi maior que 13.

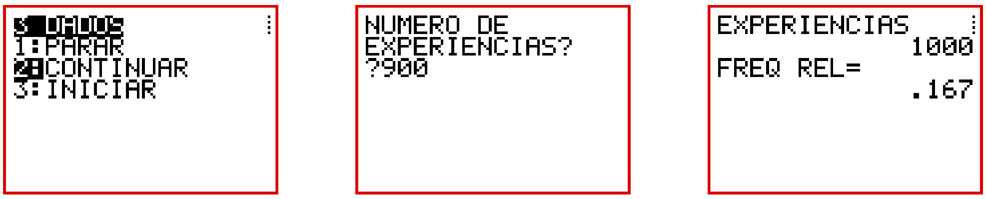
Se houver um grupo de alunos a fazer isto simultaneamente, rapidamente se consegue um grande número de experiências.

3º Processo – Programa de simulação com a calculadora

É possível usar um programa muito simples que faça todo o trabalho anterior por nós. Em anexo neste livro está o programa DADOS3 que faz precisamente isto. Chamamos o programa, indicamos quantas experiências queremos fazer e passado uns momentos a máquina indica-nos o número de experiências e a frequência relativa de resultados maiores que 13



Começámos com 100 experiências e a frequência é de 0,15. Mas este número de experiências é demasiado pequeno para podermos ter confiança no resultado. Então, carregando em ENTER, aparece um menu que permite continuar a simulação. Acrescentamos mais 900 experiências, para que o total passe a ser 1000.



Nesta simulação, a frequência foi de 0,167. É de esperar que a probabilidade de ganhar neste jogo seja um valor bastante próximo deste.

É de referir que este programa faz cerca de 500 experiências num minuto.

Prolongámos a simulação até às 10000 experiências e a frequência foi de 0,1651.

4º Processo – Cálculo teórico

Os processos anteriores só nos dão valores aproximados da probabilidade pedida, valores esses tanto mais fiáveis quanto maior tiver sido o número de experiências feito.

No entanto, podemos obter o valor exacto da probabilidade fazendo o cálculo teórico. Para isso temos de calcular o número de casos possíveis quando se lançam três dados e o de casos favoráveis, que correspondem a somas maiores que 13.

$$\text{Casos possíveis} = 6^3 = 216$$

Antes de contabilizar os casos favoráveis, convém contar o número de maneiras diferentes com que pode aparecer um conjunto de três números:

1) Números todos iguais (por exemplo 5-5-5)
   só há uma maneira: 5-5-5.

2) Dois iguais e um diferente (por exemplo 6-6-5)
   três maneiras: 6-6-5, 6-5-6, 5-6-6.

3) Todos diferentes (por exemplo 6-5-4)
   seis maneiras: 6-5-4, 6-4-5, 5-6-4, 5-4-6, 4-6-5, 4-5-6.

Façamos um quadro para as várias somas maiores ou iguais a 14.

Soma	Tipo	Nº de casos
18	6 - 6 - 6	1
17	6 - 6 - 5	3
16	6 - 6 - 4	3
	6 - 5 - 5	3
15	6 - 6 - 3	3
	6 - 5 - 4	6
	5 - 5 - 5	1
14	6 - 6 - 2	3
	6 - 5 - 3	6
	6 - 4 - 4	3
	5 - 5 - 4	3
	Total	35

Agora já podemos determinar a probabilidade:

$$P(\text{soma} > 13) = \frac{35}{216} \approx 0.162$$

1.5.3 – Aproximação subjectiva da Probabilidade

Muitas vezes as experiências aleatórias em que estamos interessados não conduzem a espaços de resultados com resultados igualmente possíveis, nem tão pouco é possível repetir a experiência para obtermos uma aproximação da probabilidade segundo a teoria frequencista. Por exemplo, suponhamos que estamos interessados em conhecer a:

a) Probabilidade do FCP vencer o campeonato português de futebol em 1999;
b) Probabilidade de que a Maria passe no exame da cadeira de Probabilidades, que esteve a frequentar neste semestre.

Estamos perante acontecimentos em que nenhuma das aproximações consideradas anteriormente, para a obtenção das probabilidades, pode ser aplicada. Mas se por exemplo pensarmos no acontecimento "o FCP vai ganhar o campeonato em 1999" somos capazes (admitindo a neutralidade!) de lhe atribuir uma probabilidade igual elevada, pois temos a informação de que, neste momento, é o primeiro da tabela! Também relativamente ao terceiro exemplo considerado, a Maria pode atribuir uma probabilidade de 0.80, porque 80% dos alunos passaram no exame anterior, enquanto que o seu professor, muito consciente das falhas da Maria, pode atribuir ao mesmo acontecimento uma probabilidade bastante inferior. A esta forma de atribuir probabilidades, em que fazemos o nosso próprio julgamento sobre o acontecimento, chamamos teoria subjectivista da probabilidade.

1.6 – Definição axiomática de Probabilidade

As teorias apresentadas anteriormente conduzem-nos à obtenção do valor da probabilidade atribuído a certos acontecimentos. Gostaríamos, no entanto, de desenvolver uma teoria que permitisse definir Probabilidade como uma função de todos os acontecimentos associados a um espaço de resultados. Isso é feito à custa da definição axiomática de Probabilidade, que permite construir todo o edifício das Probabilidades à custa de 3 axiomas, em que se consideram como noções primitivas as de espaço de resultados e acontecimentos. Podemos estabelecer um paralelismo com o que se passa na Geometria, onde à custa da axiomática de Euclides, e considerando como noções primitivas as de ponto, recta e plano, se constrói toda uma teoria com coerência.

Considere-se um espaço de resultados **S**, finito, e um conjunto W de subconjuntos de S (acontecimentos) que satisfaçam as seguintes condições:

a) Se um acontecimento A está em W, então o seu complementar $\overline{A}$ também está em W.
b) Se dois acontecimentos estão em W, então a sua união também está em W.

Dado o par **(S, W**), a que chamamos *espaço de acontecimentos*, a cada elemento **A**εW, associa-se um número que se chama **Probabilidade** e se representa por **P(A)**. As probabilidades associadas aos elementos de um espaço de acontecimentos satisfazem as seguintes condições ou **axiomas**:

1º axioma - A probabilidade de qualquer acontecimento é sempre maior ou igual a zero

$$P(A) \geq 0$$

2º axioma - A probabilidade do acontecimento certo - S, é 1

$$P(S) = 1$$

3º axioma - Dados *dois acontecimentos disjuntos*, a probabilidade da sua união é igual à soma das probabilidades de cada um

$$\text{Se } A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

A Probabilidade segundo a definição clássica ou de Laplace é uma Probabilidade segundo a definição axiomática

Vimos que segundo a definição clássica ou de Laplace de probabilidade, se define probabilidade de um acontecimento A como sendo a razão entre o nº de resultados favoráveis a A e o nº de resultados do espaço de resultados. Esta definição pressupunha que o espaço de resultados S fosse finito e que todos os resultados fossem igualmente possíveis. Assim, se for m o número de resultados de S a probabilidade de qualquer acontecimento elementar E_i, i=1,…,m, é igual a 1/m.

Representando por #A, o número de elementos de A ou cardinal de A, temos

$$P(A) = \frac{\# A}{\# S}$$

Vejamos então que P verifica os axiomas :

1º axioma: $P(A) \geq 0$, pois é o quociente entre um número não negativo e um número positivo.

2º axioma: $P(S) = 1$, pois é o quociente entre dois números iguais.

3º axioma: Se A e B são disjuntos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, pois se A e B são disjuntos $\#(A \cup B) = \#A + \#B$, e então

$$P(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\# S} = \frac{\# A + \# B}{\# S} = \frac{\# A}{\# S} + \frac{\# B}{\# S} = P(A) + P(B)$$

Observação: Verifique que a aproximação de Probabilidade dada pela *teoria frequencista* também verifica os 3 axiomas, sendo portanto uma *probabilidade* segundo a definição axiomática.

O resultado e a observação anteriores permitem-nos concluir da utilidade da axiomática introduzida anteriormente, pois temos dois modelos, com grande utilização, que a verificam.

1.6.1 - Propriedades da Probabilidade

Com a ajuda de diagramas de Venn, e tendo em consideração os axiomas das Probabilidades, facilmente se mostram as seguintes propriedades para a Probabilidade:

1 - $P(\emptyset) = 0$

2 - $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

3 - Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$

4 - Qualquer que seja o acontecimento A, $0 \leq P(A) \leq 1$

Corolário do resultado anterior.

5 - Quaisquer que sejam os acontecimentos A e B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Para obter o resultado anterior basta ter em consideração que se pode exprimir a união dos acontecimentos A e B em termos de acontecimentos disjuntos, para então se aplicar o axioma 3:

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$

tendo ainda em conta que $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Actividade

Dados os acontecimentos A, B e C, mostre que

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Resolução:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Este resultado pode ser generalizado do seguinte modo:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Demonstração (utilizando o método da indução):

1º passo – Tendo em conta a propriedade 5, tem-se:

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$, pelo que a propriedade é verdadeira para n=2.

2º passo – Admitamos que a propriedade é verdadeira para n, isto é,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

3º passo – Pretende-se mostrar que é verdadeira para n+1

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) -$$

$$-P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap A_{n+1})\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) -$$

$$- \left[\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_{n+1}) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}) + \dots + (-1)^{n+1} P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \quad - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+2} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Nota - Um problema clássico para cuja resolução entramos com a generalização do resultado anterior, é o seguinte: Suponha que uma secretária distraída escreve n cartas e n envelopes e coloca aleatoriamente cada carta num envelope. Qual a probabilidade de haver pelo menos uma carta no envelope certo?

Resolução: Seja A_i o conjunto de todas as permutações dos n objectos que deixam o iésimo objecto no sítio certo:

x	x	…	i	x	…	x	x
1	**2**	**…**	**i**		**…**		**n**

$$P(A_i) = \frac{n^o \text{ permutações favoráveis}}{n^o \text{ permutações possíveis}} = \frac{(n-1)!}{n!}$$

Então $A_i \cap A_j$ será o conjunto de permutações que deixam o iésimo e o jésimo objectos nos sítios certos:

x	x	…	i	x	j	x	x
1	**2**	**…**	**i**	**…**	**j**	**…**	**n**

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{n^o \text{ permutações favoráveis}}{n^o \text{ permutações possíveis}} = \frac{(n-2)!}{n!}$$

Analogamente se obteria a probabilidade de se obterem 3 dados objectos no sítio certo, etc.

O acontecimento $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ é o conjunto de permutações com pelo menos um objecto no sítio certo e

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

donde

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \binom{n}{1}\frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + \binom{n}{3}\frac{(n-3)!}{n!} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} \approx 1 - \frac{1}{e}$$

A partir da probabilidade anterior obtém-se que

P(não haver nenhum objecto no sítio certo) $\approx e^{-1}$

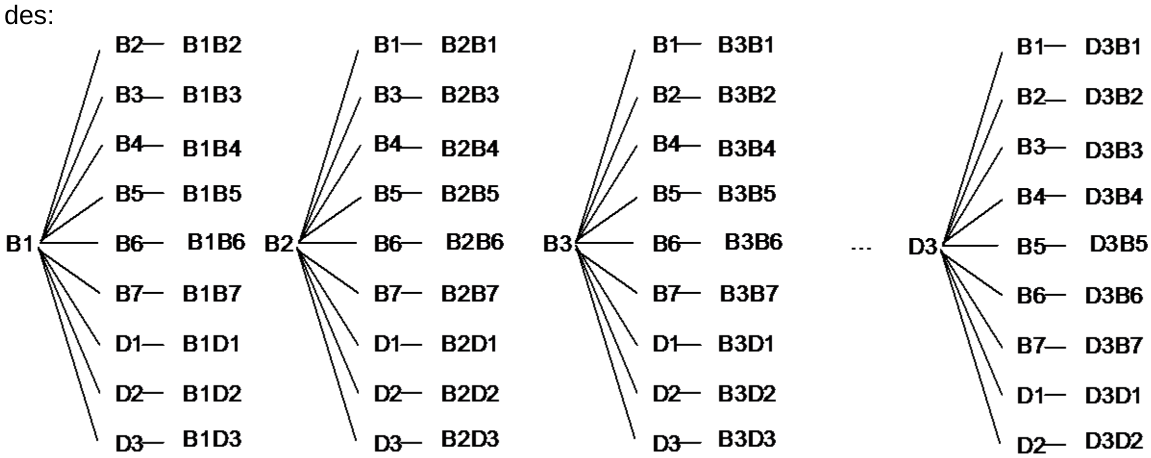
Vamos seguidamente considerar alguns exemplos do cálculo de probabilidades e da aplicação das suas propriedades, para consolidar as noções anteriormente introduzidas.

Actividade

Uma caixa de disquetes tem 10 disquetes, das quais 3 são defeituosas. Retiram-se aleatoriamente 2 disquetes da caixa (extracção sem reposição). Calcule a probabilidade dos acontecimentos:

A - Obter uma só defeituosa;B - Pelo menos uma defeituosa;C - Nenhuma defeituosa.

Resolução:Vamos começar por obter o espaço dos resultados, que é constituído por todas as extracções possíveis de 2 das 10 disquetes que tem a caixa. Para obter todas as maneiras possíveis vamos ter que arranjar cada possibilidade correspondente à 1ª extracção, com cada possibilidade correspondente à 2ª extracção, pelo que um processo simples é construir uma árvore de probabilidades:



No esquema anterior representámos por B1, B2, …, B7 as disquetes boas, e por D1, D2, D3 as defeituosas. Quando se extraem 2 disquetes simultaneamente, é o mesmo que retirar uma disquete e em seguida retirar outra, sem repor a primeira. Assim, a primeira disquete a sair pode ser qualquer das 10 existentes na caixa, enquanto que a segunda disquete pode ser uma qualquer, diferente da primeira. Temos 90 possibilidades diferentes de extrairmos as 2 disquetes da caixa. Qualquer destas possibilidades tem a mesma probabilidade de se verificar, pelo que o espaço de resultados associado a esta experiência é constituído por 90 resultados todos eles igualmente possíveis. Para calcular as probabilidades pretendidas, basta ver quantos são os resultados favoráveis aos acontecimentos em causa.Seja A o acontecimento "obter uma só defeituosa". Este acontecimento é constituído por 42 resultados pelo que P(A)=42/90=7/15.O número de resultados do acontecimento B, "pelo menos uma defeituosa" é 48, pelo que a probabilidade pretendida é P(B)=48/90=24/35.Repare-se que o acontecimento C, "nenhuma defeituosa" é o complementar de "pelo menos uma defeituosa" pelo que P(C)= 1-24/35=11/35.

Actividade

Suponha que vai a um restaurante e está indeciso sobre qual a ementa a escolher pelo que resolve escolher ao acaso a entrada, o prato e a sobremesa. A bebida é grátis. Pode escolher 2 entradas a 450$00 e 600$00, respectivamente, 3 pratos a 1000$00, 1100$00, e 1250$00, cada um e ainda 2 sobremesas a 250$00 ou 300$00. Qual a probabilidade de 1900$00 serem suficientes para pagar a refeição?Resolução: Temos aqui outro exemplo onde o diagrama em árvore pode dar uma grande ajuda na construção do espaço de resultados:

O espaço de resultados é constituído por 12 resultados igualmente possíveis, dos quais

6 são favoráveis, por serem refeições que não ultrapassam o preço de 1900$00. Assim a probabilidade pretendida é 6/12=1/2.

Actividade

Numa loja de hamburgers, o gerente verificou que em cada 100 hamburgers vendidos 45 têm queijo e 15 também têm cebola. Registos anteriores permitem também concluir que a probabilidade de um cliente pedir um hamburger com cebola é .35. Qual a probabilidade de um cliente pedir um hamburger:a) Com queijo ou cebola b) Sem cebola nem queijoc) Só com cebola (além da carne…) Resolução: Para representar os vários acontecimentos envolvidos, vamos utilizar um diagrama de Venn, onde representamos por Q o acontecimento “presença de queijo” e por C o acontecimento “presença de cebola”

a) $P(Q \cup C) = P(Q)+P(C) - P(Q \cap C)$

$= .45 + .35 - .15 = .65$

b) $P(\overline{Q \cup C}) = 1 - P(Q \cup C)$

$= 1 - .65 = .35$

c) $P(C \cap \overline{Q}) = P(C) - P(Q \cap C)$

$= .35 - .15 = .20$

Actividade

Num estudo sobre sexo, estado civil e habilitações literárias de um grupo de 1000 leitores de determinada revista, obtiveram-se os seguintes dados: 312 são do sexo masculino, 470 são casados, 525 têm o liceu, 42 homens têm o liceu, 147 casados têm o liceu, 86 homens são casados, e 25 homens casados têm o liceu. Verifique que estes dados não são consistentes.

Resolução:

Representando por M – sexo masculino; C – casado; L – liceu, temos

$P(M) = 0.312$; $P(C) = 0.470$; $P(L) = 0.525$;

$P(M \cap L) = 0.042$; $P(C \cap L) = 0.147$; $P(M \cap C) = 0.086$;

$P(M \cap C \cap L) = 0.025$

donde

$P(M \cup C \cup L) = P(M) + P(C) + P(L) - P(M \cap L) - P(C \cap L) - P(M \cap C) + P(M \cap C \cap L)$

$P(M \cup C \cup L) = 0.312 + 0.470 + 0.525 - 0.042 - 0.147 - 0.086 + 0.025$

$$= 1.057$$

Este resultado é impossível pois o valor para a probabilidade não pode ser superior a 1.

1.7 - Probabilidade Condicional e independência

Um dos conceitos mais importantes da Teoria das Probabilidades é o *de probabilidade condicional*, que está relacionado com o facto de em muitas situações em que se pretende calcular a probabilidade de um acontecimento, já se dispor de alguma informação sobre o resultado da experiência, a qual permite actualizar a atribuição de probabilidades a esse acontecimento.

Consideremos, por exemplo, a experiência aleatória que consiste em lançar um dado e verificar o número de pintas que sai. A probabilidade do acontecimento A, sair "1 ou 3 pintas" é 2/6, já que o nosso espaço de resultados S, é constituído por 6 casos igualmente possíveis, dos quais 2 são favoráveis à realização de A. Se no entanto pretendermos a probabilidade desse mesmo acontecimento, sabendo de antemão que saiu um número de pintas ímpar, neste momento já o espaço de resultados S', é constituído por 3 resultados, igualmente possíveis, dos quais 2 são favoráveis, pelo que a probabilidade pretendida é 2/3, o dobro da obtida anteriormente, quando não tínhamos nenhuma informação. Exemplificando com um diagrama de Venn

Vejamos ainda uma outra situação. Suponhamos, por exemplo, a experiência aleatória que consiste em retirar 2 bolas sem reposição, de uma caixa contendo 4 bolas brancas B1, B2, B3 e B4 e 3 bolas pretas P1, P2, P3. Os **N** diferentes resultados obtidos na realização da experiência são:

B1B2	B1B3	B1B4	B1P1	B1P2	B1P3
B2B1	B2B3	B2B4	B2P1	B2P2	B2P3
B3B1	B3B2	B3B4	B3P1	B3P2	B3P3
B4B1	B4B2	B4B3	B4P1	B4P2	B4P3
P1B1	P1B2	P1B3	P1B4	P1P2	P1P3
P2B1	P2B2	P2B3	P2B4	P2P1	P2P3
P3B1	P3B2	P3B3	P3B4	P3P1	P3P2

Representando por n(Branca1) e n(Branca2), respectivamente, o número de vezes em que se verificou o acontecimento Branca1 – "saiu bola branca na 1ª extracção" e o número de vezes que se realizou o acontecimento Branca2 – "saiu bola branca na 2ª extracção", e por n(Branca1$\cap$Branca2) o número de vezes que se realizou o acontecimento Branca1$\cap$Branca2 – "saiu branca na 1ª e 2ª extracções", temos,

P(Branca1) = 24/42, P(Branca2) = 24/42, P(Branca1$\cap$Branca2) = 12/42

Suponhamos, no entanto, que sabíamos que tinha saído branca na 1ª extracção, isto é, que se tinha verificado o acontecimento Branca1. Qual a probabilidade de sair branca na 2ª extracção, isto é de se verificar o acontecimento Branca2, tendo em conta esta informação adicional? Neste momento o espaço de resultados foi substancialmente reduzido, pois o número de resultados possíveis é 24 (ter saído branca na 1ª extracção), dos quais só 12 é que são favoráveis, pelo que

P(Branca2 sabendo que Branca1) = 12/24

À probabilidade anterior chamamos *probabilidade condicional* do acontecimento Branca2, sabendo que (ou dado que) se realizou o acontecimento Branca1, e representamos por P(Branca2|Branca1).

Repare-se que

$$\text{P(Branca2|Branca1)} = \frac{\text{n(Branca1} \cap \text{Branca2)}}{\text{n(Branca1)}} = \frac{\frac{\text{n(Branca1} \cap \text{Branca2)}}{\text{N}}}{\frac{\text{n(Branca1)}}{\text{N}}} = \frac{\text{P(Branca1} \cap \text{Branca2)}}{\text{P(Branca1)}}$$

ou seja
$$\text{P(Branca2|Branca1)} = \frac{\text{P(Branca1} \cap \text{Branca2)}}{\text{P(Branca1)}}$$

Assim, a *probabilidade condicional* de se realizar o acontecimento Branca2, sabendo que se realizou Branca1, é o quociente entre a probabilidade da realização de Branca1 e Branca2, e a probabilidade da realização de Branca1. Esta probabilidade condicional só tem sentido se P(Branca1) for superior a zero.

Dados os acontecimentos A e B, com P(A)>0, define-se probabilidade condicional de B sabendo que A ocorreu e representa-se por P(B|A), como sendo

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Se P(B)>0, define-se de forma análoga a probabilidade condicional de A, dado que B se realizou

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ao falarmos em probabilidade condicional, nomeadamente probabilidade do acontecimento A dado B, estamos a dizer explicitamente que o espaço de resultados em que estamos a trabalhar é o definido pelo acontecimento B. Ao omitir aquela informação, estamos a admitir que o espaço de resultados é o espaço S, que se assume por defeito. Efectivamente a probabilidade de qualquer acontecimento A, P(A) não é mais do que a probabilidade condicional do acontecimento A, dado S, P(A|S).

Exemplo 18 (Parzen 1960) – Consideremos uma família com dois filhos e que existe igual probabilidade de cada filho ser rapaz ou rapariga. Qual a probabilidade de que ambos os filhos sejam rapazes dado que: (i) o filho mais velho é um rapaz, (ii) pelo menos um dos filhos é rapaz.

O espaço de resultados associado ao fenómeno em estudo, isto é, uma família ter dois filhos é S = {MM, MF, FM, FF}. Todos estes resultados são igualmente possíveis tendo em consideração o facto de ser igualmente provável um filho ser rapaz (M) ou rapariga (F). Pretende-se a probabilidade de ambos serem rapazes, sabendo que (i) o filho mais velho é rapaz – este condicionamento provoca que o espaço de resultados se reduza a S' = {MM, MF}, donde P(MM) = 1/2. Condicionando agora no acontecimento (ii) pelo menos um dos filhos é rapaz, já o espaço de resultados é S'' = {MM, MF, FM} pelo que a probabilidade pretendida é P(MM) = 1/3.

Nota: Repare-se que a probabilidade de que "ambos os filhos são rapazes" é diferente consoante nada se saiba sobre o sexo dos filhos ou haja conhecimento parcial sobre o sexo de um dos filhos. No primeiro caso a probabilidade é 1/4.

Exemplo 19 (Siegel et al, 1988) -. Consideremos a experiência aleatória que consiste em observar, numa dada multinacional, a impressão causada (boa ou má) na entrevista dos candidatos a um emprego, assim como se conseguem ou não o emprego. Pensemos nos acontecimentos B – "o candidato causa boa impressão" e E – "o candidato consegue o emprego”. Suponhamos que os acontecimentos anteriores estão representados num diagrama de Venn e que se conhecem as probabilidades assinaladas:

No diagrama de Venn os números indicados representam:

$P(B–E) = 0.28$

$P(E–B) = 0.08$

$P(B \cap E) = 0.12$

A partir do diagrama anterior sabemos que

$$P(\text{“Conseguir emprego”}) = 0.12 + 0.08 = 0.20$$

o que significa que 20% dos candidatos, que vão à entrevista, conseguem o emprego. Será que o facto de causar boa impressão, aumenta as possibilidades de ser bem sucedido, na obtenção do emprego? Isto é, será que a informação adicional de que "um candidato causou boa impressão" tem efeito na probabilidade de obter o emprego? Para responder a esta questão, temos de nos cingir unicamente aos candidatos que causam boa impressão, em vez de considerarmos todos os candidatos. A dimensão deste grupo é 40% de todos os candidatos, já que

$$P(\text{"Causar boa impressão"}) = 0.28 + 0.12 = 0.40$$

Dentro deste grupo, quantos conseguem o emprego? A resposta obtém-se restringindo este grupo aos que conseguem o emprego

$$P(\text{"Causar boa impressão } \mathbf{e} \text{ Conseguir o emprego"}) = 0.12$$

Finalmente podemos calcular a probabilidade de uma pessoa que causou boa impressão, conseguir o emprego. Esta probabilidade é dada pela resposta à seguinte questão " 0.12 que percentagem é de 0.40"? , resposta esta que se obtém dividindo 0.12 por 0.40, como aliás se deduz da definição anteriormente dada de probabilidade condicional:

$$P(\text{"Conseguir o emprego"} \mathbin{\boldsymbol{|}} \text{"Causou boa impressão"}) = \qquad = 0.30$$

Vemos que a probabilidade de conseguir o emprego aumentou de 20% para 30%, com a informação adicional disponível. Isto significa que 30% dos candidatos que causam boa impressão, conseguem o emprego, comparados com unicamente 20% dos candidatos em geral (causando ou não boa impressão). Intuitivamente esperávamos que o facto de um candidato causar boa impressão, aumentasse as suas possibilidades de sucesso, e o que acabamos de medir foi precisamente quão grande é esse efeito.

Probabilidade da intersecção de acontecimentos ou probabilidade conjunta dos acontecimentos A e B

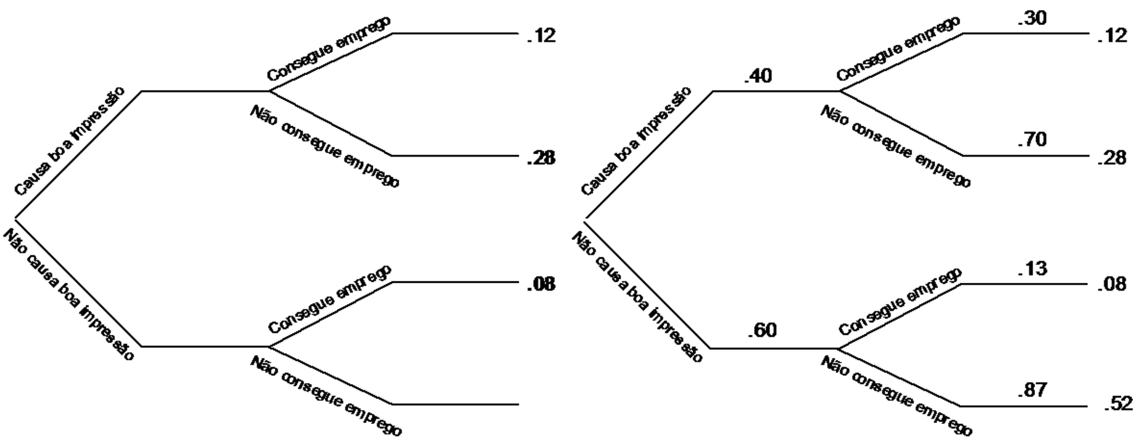
Atendendo à definição de probabilidade condicional, vem imediatamente

$$P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B) \quad \text{ou} \quad P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A)$$

Observação: A intersecção de acontecimentos por vezes é representada por “e”, assim como a união é representada por “ou”.

Um outro processo de visualizar as probabilidades condicionais é através da construção de uma árvore de probabilidades, que já vimos ser uma técnica útil quando pretendemos calcular probabilidades de acontecimentos associados a experiências aleatórias que envolvam vários passos. Por exemplo se num primeiro passo se puderem verificar um de dois acontecimentos A1 ou A2 e num segundo passo um dos dois acontecimentos B1 ou B2, podemos construir a seguinte árvore de probabilidades:

Exemplo 19 (cont.) – Representando num diagrama em árvore as probabilidades apresentadas no diagrama de Venn, obtemos a árvore da esquerda no esquema seguinte:



A partir da árvore da esquerda conseguimos facilmente completar a árvore da direita, utilizando a seguinte metodologia: inscrevemos na árvore o valor 0.40 que corresponde à probabilidade de "causar boa impressão", seguindo-se o valor 0.60, que corresponde à probabilidade de "não causar boa impressão". Uma vez colocado este valor, coloca-se o valor 0.52, que corresponde à probabilidade de "não causar boa impressão e não conseguir o emprego". Finalmente preenchem-se os ramos correspondentes às probabilidades condicionais, dividindo cada valor no extremo da árvore pelo valor do ramo anterior.

Observação : Da representação anterior verifica-se que

P("Cons. o emprego"**|**"Causou boa imp.") + P("Não cons. o emprego"**|**"Causou boa imp.")=1, ou em termos dos acontecimentos B e E,

$$P(E|B) + P(\bar{E}\,|B) = 1$$

Analogamente

$$P(E|\bar{B}\,) + P(\bar{E}\,|\bar{B}\,) = 1$$

Estes resultados resultam de uma propriedade mais geral da probabilidade condicional, enunciada a seguir.

A probabilidade condicional é uma probabilidade, no espaço de resultados S, segundo a definição axiomática

Dados os acontecimentos A e B do mesmo espaço de resultados S, com P(B)>0, qualquer que seja o acontecimento A defina-se $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Então P(A|B) é uma Probabilidade, isto é, satisfaz os 3 axiomas da teoria das Probabilidades, enunciados na secção anterior.

Vejamos que assim é:

1º axioma – Dado qualquer acontecimento A, $P(A|B) \geq 0$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Como P(B)>0 por hipótese e $P(A \cap B) \geq 0$, pelo 1º axioma das probabilidades, vem $P(A|B) \geq 0$.

2º axioma – Dado o acontecimento certo S, P(S|B) = 1

$P(S|B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$, ficando demonstrado que S, $P_B(S) = 1$.

3º axioma – Dados 2 acontecimentos C e D, disjuntos, $C \cap D = \emptyset$,

$$P(C \cup D|B) = P(C|B) + P(D|B)$$

$$P(C \cup D|B) = \frac{P((C \cup D) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((C \cap B) \cup (D \cap B))}{P(B)} = \frac{P(C \cap B) + P(D \cap B)}{P(B)}$$

$$= P(C|B) + P(D|B).$$

No raciocínio feito anteriormente entrámos com o facto de que se Ce D são disjuntos, então $(C \cap B)$ e $(D \cap B)$ também são disjuntos, pelo que pelo 3º axioma das probabilidades a probabilidade da sua união é igual à soma das probabilidades de cada um.

Actividade

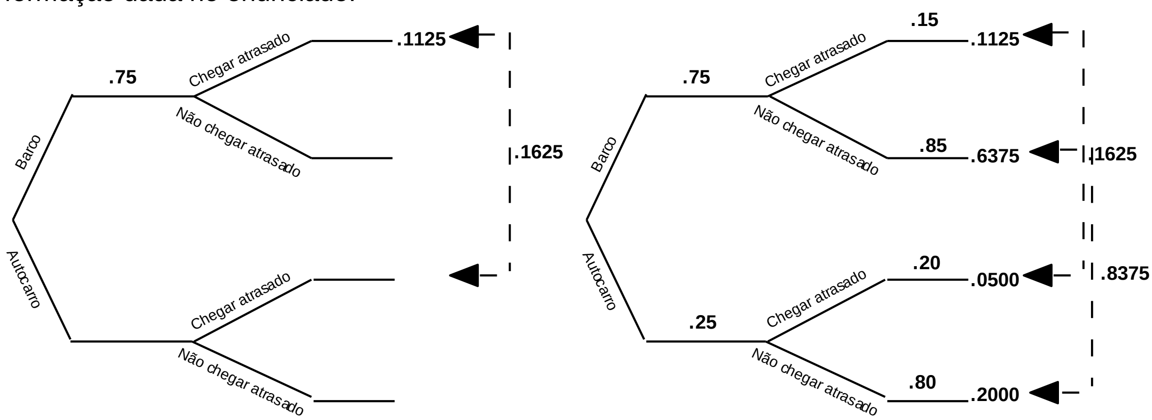
Dados quaisquer acontecimentos A, B e C, com P(B)>0, mostre que:

a) $P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B)$.

b) $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$

Exemplo 20 (Graça Martins, 1998)- Um indivíduo que trabalha em Lisboa, mas reside na margem Sul do Tejo, tem diariamente duas possibilidades para se dirigir ao trabalho: o barco ou o autocarro. Ele gosta muito de ir de barco, pelo que escolhe o barco 75% das vezes. A probabilidade de chegar atrasado ao trabalho é 16.25%. sabe-se ainda que a probabilidade de ir de barco e chegar atrasado é 11.25%. Qual a probabilidade de chegar atrasado, sabendo que veio de barco?

Começámos por construir a árvore do lado esquerdo do esquema seguinte, com a informação dada no enunciado:



A partir da árvore dessa árvore fomos completando a árvore do lado direito, a pouco e pouco, por um processo análogo ao descrito no exemplo anterior. Nomeadamente para calcular a probabilidade de “chegar atrasado **dado** que veio de barco” considerámos:

$$P(\text{"chegar atrasado"} \mid \text{"veio de barco"}) = \frac{P(\text{"vir de barco e chegar atrasado"})}{P(\text{"vir de barco"})}$$

$$= \frac{.1125}{.75}$$

$$= .15$$

Exemplo 21 – Numa linha de produção de uma fábrica de componentes electrónicas, 1% das componentes produzidas são defeituosas. Foi desenvolvido um teste rápido, mas não completamente fiável, já que em 90% dos casos detecta que a componente é defeituosa, quando ela é efectivamente defeituosa, enquanto que em 99% dos casos detecta que a componente é boa, quando ela é boa. Qual a probabilidade de uma componente escolhida ao acaso ser defeituosa, quando o teste indica que ela é defeituosa?

Indicámos na árvore anterior, a carregado, as probabilidades que eram dadas no enunciado. A partir daí completámos a árvore, a qual nos vai permitir calcular a probabilidade pretendida. Como sabemos que o teste indica defeituosa, temos de nos cingir aos resultados que satisfaçam esta condição e que são “Defeituosa e teste indica defeituosa” e “Boa e teste indica defeituosa”, cujas probabilidades são respectivamente .0090 e .0099. Então a proporção de vezes que o teste dá a indicação de defeituosa é .0090+.0099 = .0189. Destas vezes só nos interessam aquelas em que a componente é defeituosa, pelo que a probabilidade pretendida é .0090/.0189= .476,

$$P(\text{Defeituosa}|\text{teste indica defeituosa}) = .476.$$

A partir do resultado anterior verifica-se que

$$P(\text{Boa}|\text{teste indica defeituosa}) = 1 - .476 = .534$$

o que pode parecer bastante estranho pois é mais provável a componente ser boa quando o teste indica que é defeituosa, do que ser efectivamente defeituosa. Neste exemplo deve notar-se que a probabilidade de uma peça ser boa é muito elevada (0.99). O conhecimento de que o teste resultou na indicação de a peça ser defeituosa, baixa a probabilidade da peça ser boa para apenas 0.534.

Nota: Um tipo de questões relacionadas com o exemplo apresentado anteriormente é muito importante pois há em geral uma grande confusão e tendência para identificar as probabilidades P(Defeituosa|teste indica defeituosa) e P(Teste indica defeituosa|Defeituosa), ou de um modo geral as probabilidades P(A|B) e P(B|A). É aliás conhecida a “falácia do Procurador” – Em análise forense, por exemplo, há interesse em considerar duas probabilidades condicionais relacionadas com a evidência fornecida pela análise do AND. Por um lado, interessa considerar a probabilidade do perfil do AND do réu coincidir com o das amostras recolhidas no local do crime (A), dado que o réu está inocente (B). A outra probabilidade, de interesse em tribunal, é a de o réu estar inocente (B) dado que o perfil do seu AND coincide com o do encontrado no local do crime (A). A "falácia do Procurador" consiste em confundir estas duas probabilidades. Usa a primeira probabilidade, que em geral é extremamente pequena (1 em 3 milhões, digamos) como se fosse a segunda e daí infere que a probabilidade do réu ser culpado é praticamente 1, pedindo portanto a acusação com base nessa evidência! No entanto P(A) é também muito pequena, podendo acontecer que se tenha, por exemplo, P(A) = 0.000004. Neste caso, viria

$P(B|A) = 0.75 \times P(B)$ $\left(P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A|B)P(B)}{P(A)} = \dfrac{0.000003}{0.000004}P(B)\right.$, valor este que pode ser bastante elevado, favorecendo claramente a inocência do réu.

Exemplo 22 – Suponha uma caixa com 4 bolas brancas e 3 pretas, da qual retira 2 bolas. Qual a probabilidade de tirar bola branca na 2ª extracção dado que na 1ª extracção tirou bola branca? No início do estudo da probabilidade condicional apresentámos este exemplo e vimos que, se a extracção se fizer sem reposição, essa probabilidade é igual a 21/42, enquanto que a probabilidade de se obter bola branca na 2ª extracção é 24/42. Verificamos assim que

$$P(\text{Branca2}) \neq P(\text{Branca2}|\text{Branca1})$$

Suponhamos, no entanto, que a extracção se faz com reposição. Neste caso facilmente se verifica que

$$P(\text{Branca2}) = P(\text{Branca2}|\text{Branca1}) = 4/7$$

pelo que o facto de dispormos de alguma informação não altera a probabilidade da realização do acontecimento Branca2, isto é, este acontecimento é independente do acontecimento Branca1.

Na definição de probabilidade condicional, pode acontecer que o acontecimento que está a condicionar seja a intersecção de dois acontecimentos. Por exemplo

$$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B)P(B|C)}$$

donde

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C) \qquad \text{ou} \qquad P(A \cap B \cap C)=P(A)P(B|A)P(C|A \cap B)$$

De um modo geral, dados n acontecimentos A_1, A_2, …, A_n, com probabilidade positiva, tem-se

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Exemplo 17 (cont) – Neste exemplo considerámos uma caixa com 4 pilhas boas e 3 estragadas e pretendíamos calcular a probabilidade de numa extracção de 3 pilhas, sem reposição, obter 2 pilhas boas e 1 estragada, ou seja, representando por B uma pilha boa e por E uma pilha estragada,

$$P\{(BBE) \cup (BEB) \cup (EBB)\} = P(BBE)+P(BEB)+P(EBB)$$

onde o i-ésimo elemento do triplo representa a i-ésima pilha a ser retirada e onde omitimos o símbolo de intersecção entre as sucessivas tiragens. Então

$$P(BBE) = P(B)P(B|B)P(E|BB) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5}$$

Analogamente

$$P(BEB) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \qquad \text{e} \qquad P(EBB) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{5}$$

donde

$$P\{(BBE) \cup (BEB) \cup (EBB)\} = 0.51$$

O exemplo seguinte mostra a utilidade da probabilidade condicional, quando utilizada no sentido inverso do utilizado nos exemplos anteriores.

Exemplo 23 (Graça Martins, 1998) – Numa cervejaria trabalham 3 empregados: o António, o Bernardo e o Miguel. O António serve 40% dos clientes e os outros dois empregados dividem entre si a restante clientela. Ao pedir uma cerveja, o acompanhamento desta por tremoços é deixada ao critério do empregado. O António é sócio da cervejaria, pelo que apenas traz tremoços em 10% das vezes. O Bernardo oferece tremoços em 40% dos casos, enquanto que o Miguel oferece tremoços a 20% dos clientes. Ao pedir uma cerveja, calcule a probabilidade de que esta venha acompanhada de tremoços.

Resolução:

Representando por António, Bernardo e Miguel, respectivamente os acontecimentos "o António serve o cliente", "o Bernardo serve o cliente", ou "o Miguel serve o cliente", temos

P(António) = 0.40; P(Bernardo) = 0.30; P(Miguel) = 0.30

P(Tremoços|António)=0.10; P(Tremoços|Bernardo)=0.40; P(Tremoços|Miguel)=0.20

Pretende-se P(Tremoços), onde representamos por "Tremoços" o acontecimento a

"A cerveja ser acompanhada por tremoços". Mas o acontecimento Tremoços pode ser considerado como a união dos seguintes acontecimentos:

Tremoços $\equiv$ (António$\cap$Tremoços) $\cup$ (Bernardo$\cap$Tremoços) $\cup$(Miguel$\cap$Tremoços), pois para se ser servido de tremoços, tem de se ser servido por algum dos 3 empregados. Então

P(Tremoços) = P(António$\cap$Tremoços) + P(Bernardo$\cap$Tremoços) + P(Miguel$\cap$Tremoços) (acontecimentos disjuntos)

= P(António) P(Tremoços|António) + P(Bernardo) P(Tremoços|Bernardo) + P(Miguel) P(Tremoços|Miguel)

de onde

P(Tremoços) = 0.40x0.10 + 0.30x0.40 + 0.30x0.20 = 0.22

Para resolver o problema anterior considerámos o espaço de resultados dividido em 3 partes disjuntas e exaustivas, pois uma pessoa para ser servida teria de o ser por um dos 3 empregados e só por um deles.

1.7.1 - Acontecimentos independentes

O conceito de probabilidade condicional permite-nos definir acontecimentos independentes, como sendo aqueles em que a informação acerca da realização de um dos acontecimentos não altera a probabilidade da realização de outro acontecimento. De forma mais rigorosa, dados os acontecimentos A e B, com P(A)>0 e P(B)>0,

O acontecimento A é independente do acontecimento B, com P(A)>0 e P(B)>0, se a probabilidade de A se verificar, é igual à probabilidade condicional de A se realizar, dado que B se realizou

$$P(A) = P(A|B)$$

Se A é independente de B, então B é independente de A?

Efectivamente assim é! Repare-se que

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A\,|\,B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A)}{P(A)} = P(B)$$

Outra definição de independência de acontecimentos

Dois acontecimentos A e B são **independentes** se a probabilidade conjunta é igual ao produto das probabilidades de cada um deles

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\,P(B)}$$

Actividade

Mostrar que as duas definições de independência são equivalentes, se nesta última definição exigirmos que $P(A)>0$ e $P(B)>0$, para que a probabilidade condicional possa estar definida.

Dois acontecimentos que não sejam independentes dizem-se *não independentes*.

Acontecimentos mutuamente exclusivos e acontecimentos independentes

O conceito de acontecimentos mutuamente exclusivos não tem nada a ver com a probabilidade a eles associada, ao contrário da noção de independência de acontecimentos que se define à custa da probabilidade. No entanto estas noções confundem-se muitas vezes. Será que acontecimentos mutuamente exclusivos podem ser independentes? Se A e B são disjuntos ou mutuamente exclusivos, então $A \cap B = \emptyset$, pelo que $P(A \cap B) = 0$, donde pela 2ª definição de independência, $P(A)P(B) = 0$ e A e B são independentes se e só se $P(A)=0$ ou $P(B)=0$. Assim, se utilizarmos como definição de independência a introduzida à custa da probabilidade condicional, podemos dizer que dois acontecimentos disjuntos não podem ser independentes.

Exemplo 22 (Cont.) – Considerando ainda a experiência aleatória que consiste em retirar 2 bolas, sem reposição, de uma caixa com 4 bolas brancas e 3 pretas, seja A o acontecimento "saiu exactamente uma bola branca" e B o acontecimento "saíram 2 bolas brancas". Estes acontecimentos são disjuntos, o que implica $P(A \cap B)=0$, e não são independentes, pois $P(A) = 24/42$ e $P(B) = 12/42$, pelo que $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$.

Actividade (Teaching Statistics, vol16, nº 2)

Tendo dois dados de 12 faces, em que cada um tem 7 faces vermelhas e 5 brancas, perguntou-se a 40 estudantes qual dos acontecimentos era mais provável, no lançamento dos dois dados:

i) Sair 2 faces vermelhas, ou

ii) Sair1 face vermelha e 1 branca.

Trinta e seis estudantes responderam que era mais provável sair 2 faces vermelhas. Está de acordo? Justifique.

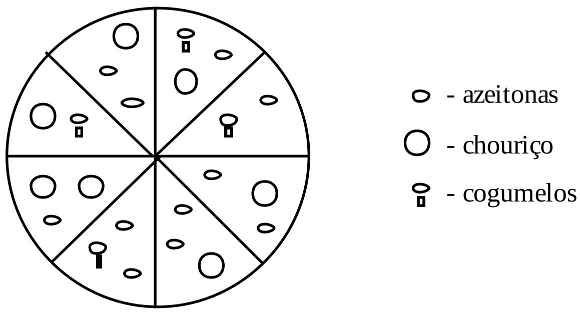
Aos mesmos estudantes, mostraram-se 3 dados de 4 faces, cada um com 3 faces vermelhas e uma branca. No lançamento dos 3 dados, qual o acontecimento mais provável:

i) Sair 3 faces vermelhas, ou

ii) Sair 2 faces vermelhas e 1 branca?

Todos os estudantes responderam que o acontecimento i) era o mais provável. Está de acordo? Justifique.

Exemplo 24 (Sugerido pelo artigo de Bradley and al, Journal of Statistics Education, vol 6, nº1) – Suponha que vai a uma Pizaria com um amigo e encomendam uma piza que além do queijo e do tomate, tem rodelas de chouriço, azeitonas e cogumelos. Trazem a piza partida em 8 fatias, com o seguinte aspecto:



Escolhe uma fatia ao acaso. Qual a probabilidade de:

a) Ter cogumelos?

b) Ter azeitonas?

c) Ter cogumelos e azeitonas?

d) Ter cogumelos, sabendo que tem azeitonas?

e) Não ter cogumelos, sabendo que tem azeitonas?

f) Ter cogumelos, sabendo que não tem azeitonas?

Resolução:

a) P(Ter cogumelos) = 4/8

b) P(Ter azeitonas) = 7/8

c) P(Ter cogumelos e azeitonas) = 3/8

d) P(Ter cogumelos| Tem azeitonas) = 3/7

ou P(Ter cogumelos| Tem azeitonas) = $\frac{\text{P(Ter cogumelos e azeitonas)}}{\text{P(Ter azeitonas)}}$ = 3/7

e) P(Não ter cogumelos|Tem azeitonas) = 4/7 ou por d) P(Não ter cogumelos|Tem azeitonas) = 1 - 3/7=4/7

f) P(Ter cogumelos|Não tem azeitonas) = 1

Capítulo 2

Distribuições de probabilidade

2.1 – Introdução

Já sabemos que o objectivo da Estatística é o estudo de Populações, isto é, conjuntos de indivíduos (não necessariamente pessoas) com características comuns que se pretendem estudar. A uma característica comum, que assume valores diferentes de indivíduo para indivíduo, chamámos *variável* e ao processo que consiste em recolher uma observação de uma variável demos o nome de *experiência aleatória*. Podemos então identificar População com a variável que pretendemos estudar. Por exemplo, suponhamos que pretendíamos estudar a seguinte variável - nota a Português dos alunos do 12º ano da Escola Professor Herculano de Carvalho, no ano lectivo de 1998/99. Podemos dizer que a nossa população é constituída pelas notas dos referidos alunos. Recolher uma amostra de dimensão 26, não é mais do que realizar 26 vezes a experiência aleatória que consiste em seleccionar aleatoriamente 1 aluno e perguntar-lhe a nota, ou ir às pautas de Português e seleccionar aleatoriamente 26 números da *população* constituída pelas notas existentes nessas pautas.

Quando na Estatística definimos variáveis, vimos que estas podiam ser de tipo qualitativo ou quantitativo. Assim, o resultado de uma experiência aleatória não dá necessariamente um resultado numérico. No entanto, em Estatística, estamos de um modo geral interessados em estudar resultados numéricos. Por exemplo, consideremos a experiência aleatória que consiste em lançar 3 moedas e verificar as faces que ficam voltadas para cima. Associada com esta experiência, uma variável que pode ter interesse estudar é o número de caras que saem no lançamento das 3 moedas. Se o resultado de um lançamento for CFF, então a variável assume o valor 2. Sabemos que os valores possíveis para esta variável são 0, 1, 2 ou 3, mas em cada repetição da experiência não sabemos qual o resultado que se vai verificar (característica da experiência aleatória), pelo que à variável chamamos *variável aleatória*.

Variável aleatória – Uma variável aleatória, é uma variável cujo valor é um resultado numérico associado ao resultado de uma experiência aleatória.

As variáveis aleatórias são representadas por letras maiúsculas X, Y, Z, ….

Vimos também no módulo da Estatística que as variáveis quantitativas ainda podiam ser de dois tipos: discretas ou contínuas. A mesma classificação é dada para as variáveis aleatórias.

Exemplo 1 – Consideremos a variável aleatória X que representa o número de faces que se obtêm no lançamento de 1 moeda 3 vezes (equivalente a lançar 3 moedas uma vez). Esta variável pode assumir os valores 0, 1, 2 ou 3. Para ver quais as probabilidades de assumir esses valores podemos pensar no espaço de resultados associado à experiência aleatória que consiste em lançar 3 vezes a moeda:

A atribuição de probabilidades aos valores que a variável aleatória assume, faz-se por intermédio dos acontecimentos que lhe estão associados:

$$P(X = 3) = P\{(FFF)\} = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 2) = P\{(FFC), (FCF), (CFF)\} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 1) = P\{(FCC), (CFC), (CCF)\} = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 0) = P\{(CCC)\} = \frac{1}{8}$$

Repare-se que se tem:

- A probabilidade da variável aleatória assumir qualquer um dos seus valores admissíveis está entre 0 e 1.
- A soma das probabilidades da variável aleatória assumir qualquer um dos seus valores é igual a 1.

Estas propriedades resultam das regras enunciadas na secção 1.4, relativamente às probabilidades associadas aos acontecimentos de um espaço de acontecimentos.

Como acabámos de ver com o exemplo anterior, um modelo de probabilidade associado a um espaço de resultados, *induz* numa variável aleatória associada um modelo de probabilidade.

Exemplo 2 – Seja Y a variável aleatória que representa o número de pontos que se obtém quando se lança um dado. Um modelo de probabilidade (distribuição de probabilidade) para Y obtém-se considerando os valores admissíveis para Y e as respectivas probabilidades, como se apresentam na tabela seguinte:

$Y=y_i$	1	2	3	4	5	6
$P(Y=y_i)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Exemplo 3 – Seja Z a variável aleatória que representa a soma das pintas no lançamento de dois dados. Tendo em consideração a actividade considerada na secção 1.5.2, imediatamente de conclui que o modelo de probabilidade para Z é dado pela tabela:

Z=zi	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(Z=zi)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

2.2 – Distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta

Uma variável aleatória diz-se *discreta* se só assume um número finito ou infinito numerável de valores distintos. No que se segue trataremos unicamente de variáveis aleatórias discretas assumindo um número finito de valores distintos.

Dada uma variável aleatória *discreta* X, que assume um número finito de valores distintos x_1, x_2, …, x_i, …, x_N, então as probabilidades $p_i=P(X=x_i)$, i=1,…,N, devem satisfazer as seguintes condições:

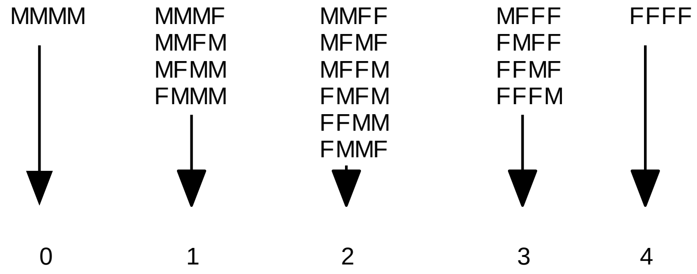
i) $0 \le p_i \le 1$, i =1,…,N

ii)

Os valores (xi, p_i) constituem a *distribuição de probabilidade*s de X

Exemplo 3 (Cont.) – Representando graficamente a distribuição de probabilidades da variável Z, obtém-se um gráfico com o seguinte aspecto:

Exemplo 4 – Seja X a variável aleatória que representa o número de raparigas nas famílias de 4 filhos. Obtenha a distribuição de probabilidade de X, admitindo que a probabilidade de ser rapaz é igual à de ser rapariga.Resolução: Os valores possíveis para X são 0, 1, 2, 3 e 4. Representando por um F – rapariga e um M – rapaz, temos



donde:

$$P(X=0) = 1/2^4 \quad P(X=1) = 4 \times 1/2^4 \quad P(X=2) = 6 \times 1/2^4 \quad P(X=3) = 4 \times 1/2^4 \quad P(X=4) = 1/2^4$$

Distribuição de probabilidades de X

X=xi	0	1	2	3	4
P(X=xi)=pi	$1/2^4$	$4 \times 1/2^4$	$6 \times 1/2^4$	$4 \times 1/2^4$	$1/2^4$

Nota: À distribuição de probabilidades de uma variável aleatória (discreta) também é usual chamar função massa de probabilidade.

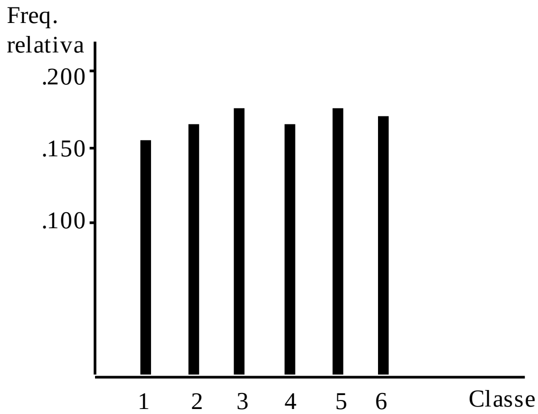
2.2.1 – Distribuição de frequências versus distribuição de probabilidades

Vimos no módulo da Estatística que quando pretendemos resumir a informação contida num conjunto de dados discretos - observações de uma variável discreta, uma representação gráfica adequada é o diagrama de barras, também chamado distribuição de frequências. Suponhamos então que pretendíamos estudar a distribuição de probabilidades da variável aleatória que representa o número de pintas que se obtém no lançamento de um dado, que não temos a certeza de ser equilibrado. Para estudar esta População[1], constituída pelos valores que se podem obter no lançamento do dado, vamos recolher uma amostra de dimensão 1200, isto é vamos repetir a experiência de lançar o dado 1200 vezes. Suponhamos que os valores obtidos deram origem à seguinte tabela de frequências, onde representamos por n_i as frequências absolutas e por f_i as relativas, a partir da qual construímos o diagrama de barras:

Classe	n_i	f_i
1	185	0.154
2	198	0.165
3	208	0.173
4	195	0.163
5	209	0.174
6	205	0.171

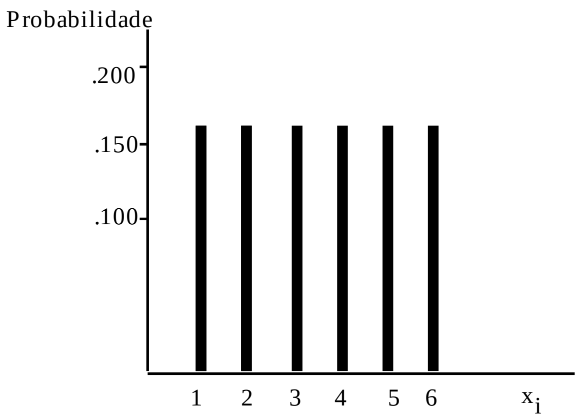
[1] Passamos a identificar População com espaço de resultados

Total	1200	1.00



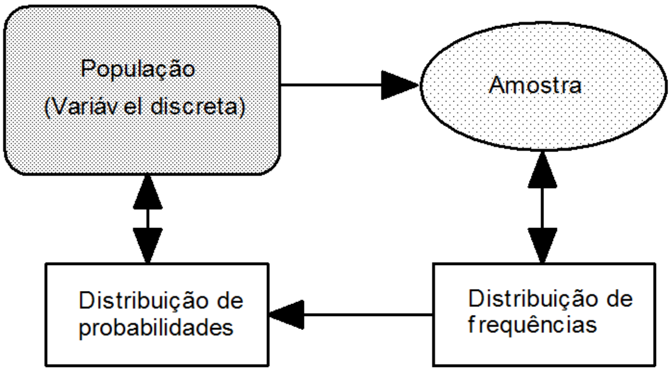
Tendo em consideração a aproximação frequencista da probabilidade, em que vimos que se a dimensão da amostra for suficientemente grande, as frequências relativas podem ser interpretadas como valores aproximados para as probabilidades, o diagrama de barras sugere-nos que a hipótese do dado ser equilibrado é uma hipótese admissível e que poderemos admitir a seguinte distribuição de probabilidades para a variável aleatória X em estudo:

$X=x_i$	$P(X=x_i)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6
Total	1



No processo anterior inferimos para a População um modelo de probabilidade sugerido pelas propriedades verificadas na amostra. Estamos assim no âmbito da Inferência Estatística ou Estatística Indutiva, que não se fica, no entanto, por aqui. Seria agora necessário testar a adequabilidade do modelo proposto, o que se faz utilizando a Probabilidade, isto é, admitindo para a População o modelo sugerido pelo estudo da amostra, temos processos de medir, em termos de Probabilidade, o erro que se pode cometer. Por sair fora do programa, não entraremos em mais detalhes.

De um modo geral podemos resumir no seguinte esquema o processo descrito anteriormente:



Quando se pretende estudar uma População de dados discretos - variável aleatória discreta, isto é, conhecer a sua distribuição de probabilidade, recolhe-se uma amostra de dimensão suficientemente grande, dessa População, constrói-se a *distribuição das frequências*, que nos dá uma ideia aproximada da *distribuição de probabilidades*. Enquanto que a distribuição de frequências se obtém a partir de alguns elementos da População, a distribuição de probabilidades obtém-se a partir da população toda.

2.2.2- Média versus valor médio

Além das tabelas e gráficos vimos também que outro processo de resumir a informação contida nos dados da amostra, consistia em utilizar *estatísticas* - medidas calculadas a partir dos dados. Destas medidas destacámos as medidas de localização - que localizam alguns pontos importantes, nomeadamente o centro da amostra, e as medidas de dispersão - que medem a variabilidade existente nos dados. Será que existem para a População algumas características populacionais, equivalentes a estas características amostrais?

Voltemos de novo ao exemplo considerado anteriormente. A partir da tabela de frequências calculámos a média da amostra, utilizando a expressão da média para dados agrupados, que neste caso dá o valor exacto da média, por se tratar de uma amostra de dados discretos (as classes são os valores que surgem na amostra):

$$\bar{x} = 1 \text{ x } .154 + 2 \text{ x } .165 + 3 \text{ x } .173 + 4 \text{ x } .163 + 5 \text{ x } .174 + 6 \text{ x } .171 \quad = 3.551$$

Se na expressão anterior substituirmos as frequências relativas pelos valores das probabilidades sugeridas para a distribuição de probabilidade da População de onde retirámos a amostra, vem

0.165 0.154 0.173 0.163 0.174 0.171

$$\mathbf{1 \text{ x } 0.167 + 2 \text{ x } 0.167 + 3 \text{ x } 0.167 + 4 \text{ x } 0.167 + 5 \text{ x } 0.167 + 6 \text{ x } 0.167 = 3.5}$$

Ao substituirmos as frequências relativas pelas probabilidades obtemos uma característica análoga à média, mas agora relativa à variável aleatória, a que damos o nome de *valor médio*, embora seja corrente utilizar-se também o termo de média. Repare-se que estamos perante duas quantidades de natureza diferente - enquanto que o valor médio é uma característica da população, fixa, embora na maior parte das vezes desconhecida, a média é uma característica da amostra e portanto o seu valor varia de amostra para amostra, sendo calculado, e portanto conhecido, para cada amostra.

Está na altura de recordar o que foi dito no módulo de Estatística, onde se falou de parâmetros e de estatísticas. Efectivamente a média é uma *estatística* que se calcula a partir da amostra, que fornece informação sobre o *parâmetro* valor médio, da característica da População em estudo, de onde se retirou a amostra. No exemplo anterior obtivemos o valor de 3.55 para a média, o que nos permitiria avançar que o valor médio da característica da População subjacente à amostra andaria à volta deste valor.

Define-se *valor médio*, μ, de uma distribuição de probabilidades,

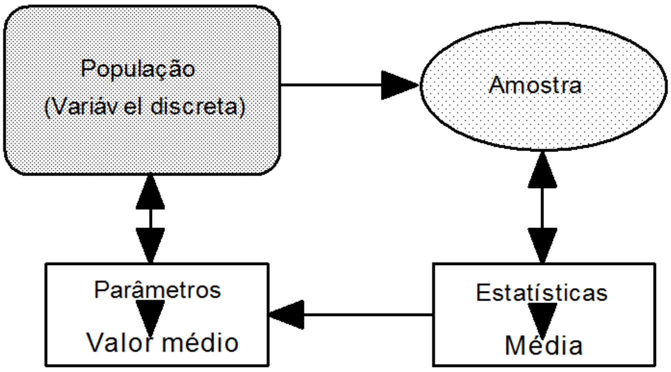
$$(x_i, p_i), \quad i=1, 2, \ldots, N$$

como sendo o valor que se obtém multiplicando cada valor x_i pela respectiva probabilidade e adicionando os resultados obtidos:

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i$$

Ao valor médio também se costuma chamar *valor esperado* e daí a notação E(X), frequentemente utilizada para o representar.

Mais uma vez podemos estabelecer o paralelismo entre População e Amostra, apresentando o seguinte esquema:



Exemplo 3 (cont.) – Qual o número médio da soma das pintas obtidas no lançamento de dois dados?

Resolução:

Pretende-se o valor médio da variável Z. Se fizermos os cálculos obteremos o valor 7. De notar, no entanto, que não é necessário fazer quaisquer cálculos pois a distribuição de probabilidades é simétrica relativamente ao valor 7. Assim, basta ter presente que o valor médio é o <u>parâmetro de localização</u> do centro da distribuição de probabilidades.

Exemplo 5 - O Sr. José quando chegou a casa, vindo do teatro, deparou-se com a falta de luz, pelo que não conseguia ver qual das 4 chaves que tinha no bolso era a da porta. Então resolveu tirar uma ao acaso e experimentar se abria a porta. Se não fosse a chave correcta punha-a de lado e experimentava uma outra. Seja X a variável que representa o número de tentativas que o Sr. José terá de fazer até conseguir abrir a porta. Obtenha a distribuição de probabilidade de X. Qual o número esperado de tentativas que o Sr. José terá de fazer até conseguir abrir a porta?

Resolução:

A variável X pode tomar os valores 1, 2, 3 ou 4.

> P(X=1) = P(escolher a chave certa à 1ª vez) = 1/4
>
> P(X=2) = P(escolher uma chave errada à 1ªvez e escolher a chave certa à 2ª vez) = 3/4 x 1/3 = 1/4

P(X=3) = P(escolher uma chave errada à 1ª vez e escolher uma chave errada à 2ª vez e escolher a chave certa à 3ª vez) = 3/4 x 2/3 x 1/2 = 1/4

P(X=4) = P(escolher uma chave errada à 1ª vez e uma chave errada à 2ª vez e uma chave errada à 3ª vez e a chave certa à 4ª vez) = 3/4 x 2/3 x 1/2 x 1 = 1/4

X=x	1	2	3	4
P(X=x)	1/4	1/4	1/4	1/4

Valor médio de X:

$$1\text{x}1/4 + 2\text{x}1/4 + 3\text{x}1/4 + 4\text{x}1/4 = 2.5$$

Nota: O valor médio não tem que ser um valor admissível para a variável aleatória. Já o mesmo acontecia com a média, que não tinha que ser um dos elementos da amostra.

Exemplo 5 (cont.) - Suponha que o Sr. José depois de sair do teatro e antes de ir para casa ainda passou num bar, onde bebeu uns copitos. Chegou a casa um pouco toldado, de forma que à medida que ia experimentando as chaves, se elas não serviam, juntava-as novamente no bolso, juntamente com as outras. Descreva a variável X, para esta nova situação.

Resolução:

A variável X pode agora tomar qualquer valor inteiro e tem-se:

$P(X=1) = 1/4$

$P(X=2) = 3/4\text{x}1/4$

$P(X=3) = (3/4)^2\text{x}1/4$

$P(X=4) = (3/4)^3\text{x}1/4$

$P(X=5) = (3/4)^4\text{x}1/4$

…

$P(X=k) = (3/4)^{k-1}\text{x}1/4$

…

Podemos confirmar que temos uma distribuição de probabilidades verificando que a soma das probabilidades é igual a 1:

$$1/4 + 3/4\text{x}1/4 + (3/4)^2\text{x}1/4 + (3/4)^3\text{x}1/4 + (3/4)^4\text{x}1/4 + \ldots = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 1$$

Pode-se ainda mostrar que, neste caso, o número esperado de tentativas necessárias para abrir a porta é igual a 4.

Actividade - Distribuição de frequências e distribuição de probabilidades

Seja X a variável aleatória que representa o número de caras que saem no lançamento de 4 moedas. Obtenha uma aproximação para a distribuição de probabilidades de X e uma aproximação para o seu valor médio.

Resolução: Começamos por obter a distribuição de probabilidades de X e de seguida obtemos a aproximação, por intermédio da distribuição de frequências, comparando ainda os resultados obtidos.

1 . Distribuição de probabilidades

A experiência aleatória que consiste em verificar o número de faces que saem no lançamento de 4 moedas é idêntica à que consiste em verificar o número de filhas dos casais de 4 filhos, se admitirmos que a probabilidade de nascer rapaz é igual à de nascer rapariga, ou seja 1/2. Então o modelo para a variável aleatória X já foi obtido no exemplo 4

Distribuição de probabilidades de X

$X=x_i$	0	1	2	3	4
$p_i=P(X=x_i)$	0.0625	0.250	0.375	0.250	0.0625

O número médio de faces que saem no lançamento das 4 moedas é

$$0 \times 0.0625 + 1 \times 0.250 + 2 \times 0.375 + 3 \times 0.250 + 4 \times 0.0625 = 2$$

O cálculo anterior era escusado, já que a distribuição de probabilidades é simétrica relativamente ao valor 2, concluindo-se imediatamente que é este o valor médio.

2 . Distribuição de frequências

Numa turma de 14 alunos pede-se a cada aluno que repita 20 vezes a experiência de lançar as 4 moedas e que registe o número de faces obtidas em cada lançamento. Uma vez realizadas as experiências cada aluno indica os resultados que obteve, de forma a preencher uma tabela com 14 colunas:

Aluno

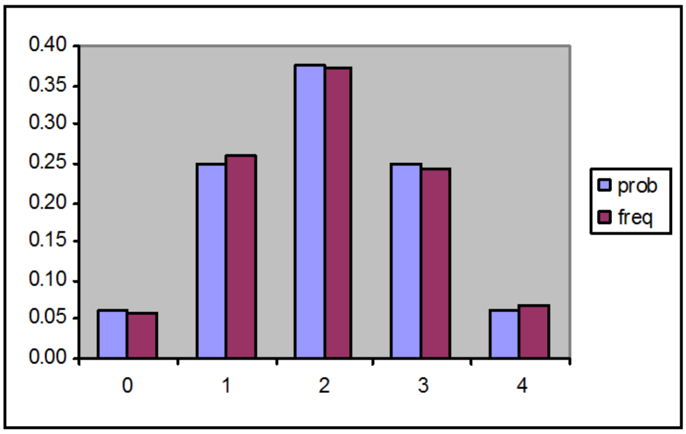
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	1	1	4	0	0	1	2	1	1	1	2	1
2	1	1	0	2	0	3	1	2	2	3	3	1	3
4	1	2	3	2	2	2	3	1	3	3	2	0	1
2	3	2	2	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1
3	2	3	2	3	1	2	1	3	2	4	4	3	2
2	0	1	1	1	3	2	1	2	2	3	3	3	3
0	3	1	1	2	3	2	3	1	0	2	2	3	1
4	2	3	3	2	3	1	1	2	2	4	1	3	2
4	3	3	2	2	3	2	2	3	2	2	3	3	2
2	2	1	3	1	3	3	4	2	1	1	2	3	4
0	1	2	1	1	2	1	2	1	2	3	2	2	1
2	3	0	2	2	2	3	2	2	1	1	3	2	3
1	1	2	2	2	3	2	3	1	2	2	2	4	0
1	2	3	2	0	3	1	3	2	0	3	2	2	2
1	1	3	1	2	2	1	4	2	1	2	1	3	3
2	3	1	2	2	3	2	2	1	3	1	2	4	1
3	3	4	3	3	0	4	1	4	2	2	2	0	4
4	3	1	3	2	1	1	2	2	4	3	3	1	1
1	3	2	2	1	2	2	3	1	2	3	2	2	2
2	2	3	1	0	3	2	2	2	3	1	2	4	1

A partir da tabela anterior constrói-se a tabela de frequências relativas

Distribuição das frequências relativas

nº faces	0	1	2	3	4
freq. relat.	0,057	0,261	0,371	0,243	0,068

A seguir apresentamos uma representação gráfica conjunta da distribuição de frequências (diagrama de barras) e da distribuição de probabilidades, onde se pode verificar como a distribuição de frequências é uma boa aproximação para a distribuição de probabilidades e portanto o modelo proposto parece ser adequado:



Para obter uma aproximação para o valor médio calculámos a média

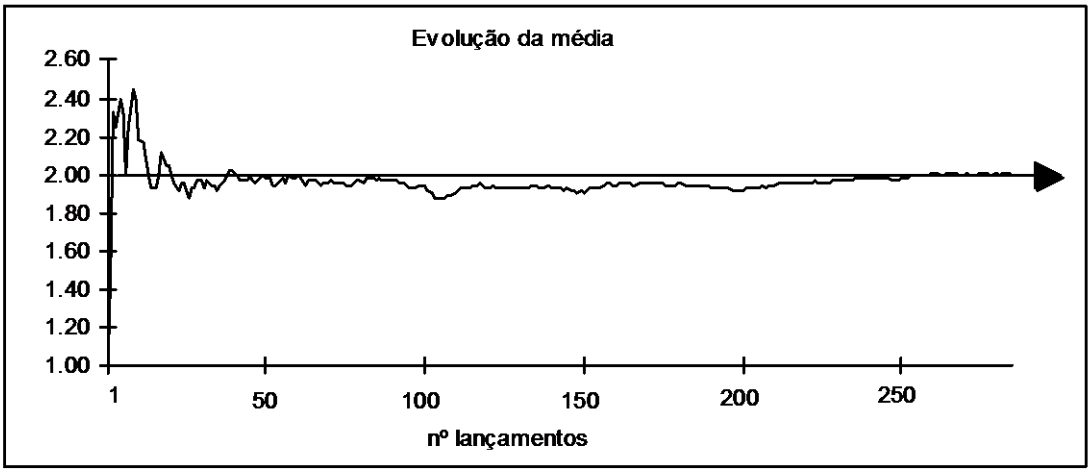
$$0 \times 0.057 + 1 \times 0.261 + 2 \times 0.371 + 3 \times 0.243 + 4 \times 0.068 = 2.004$$

que, como vemos, fornece uma boa estimativa para o valor médio.

Actividade – Comportamento da média à medida que se vai aumentando a dimensão da amostra

Continuando com a experiência da actividade anterior, vamos estudar a forma como se comporta a média, à medida que se vai aumentando o número de lançamentos. Assim, após o 1º lançamento em que se verificou uma cara, a média é 1; ao fim do 2º lançamento em que se verificaram 2 caras, a média é 1.5, e assim sucessivamente até se calcularem as 280 médias. Como se verifica pela representação gráfica seguinte, a média evolui de forma errática, oscilando com desvios cada vez mais pequenos em torno do valor 2, que é o valor médio da variável aleatória que representa o nº de faces observadas no lançamento das 4 moedas, quando se assume o modelo da equiprobabilidade.

Mais uma vez se verifica que, à medida que o número de provas aumenta, os resultados observados na amostra se aproximam dos valores esperados para a população. Neste caso verificamos que a média, calculada para um número suficientemente grande de observações, dá uma boa aproximação - estimativa, do valor médio.



Processo para simular números (pseudo) aleatórios com uma determinada distribuição de probabilidades:

Suponhamos que se pretende simular uma experiência aleatória, em que em cada realização da experiência se pode obter um de k resultados possíveis, x_1, x_2, …, x_k, com probabilidades p_1, p_2, …, p_k, em que $p_1+p_2+…+p_k = 1$.

1º passo:
Dividir o intervalo (0,1) em k intervalos $[0, p_1[$, $[p_1, p_1+p_2[$, $[p_1+p_2, p_1+p_2+p_3[$, …, $[p_1+p_2+…+p_{k-1}, 1[$

2º passo
Utilizando a máquina de calcular e a função RAND, gerar tantos números aleatórios quantos os que se pretendem obter com a distribuição de probabilidades dada. Sejam r_1, r_2, … , r_n os números obtidos.

3º passo
Para cada número r_i obtido no passo anterior faz-se o seguinte teste:

Se	r_i ε $[o, p_1[$	o resultado da experiência é o	x_1
Se	r_i ε $[p_1, p_1+p_2[$	o resultado da experiência é o	x_2
Se	r_i ε $[p_1+p_2, p_1+p_2+p_3[$	o resultado da experiência é o	x_3
…			
Se	r_i ε $[p_1+p_2+…+_{pk-1}, 1[$	o resultado da experiência é o	x_k

No caso do exemplo anterior dividimos o intervalo (0,1) nos 5 intervalos [0, 0.0625[, [0.0625, 0.3125[, [0.3125, 0.6875[, [0.6875, 0.9375[, [0.9375, 1[de amplitudes 0.0625, 0.250, 0.375, 0.250, 0.0625, respectivamente. Geramos 280 números aleatórios r_i e para cada número obtido fizemos o seguinte teste:

Se r_i e [0, 0.0625[	considera-se	**0** faces no lançamento das 4 moedas
Se r_i e [0.0625, 0.3125[	considera -se	**1** face no lançamento das 4 moedas
Se r_i e [0.3125, 0.6875[	considera -se	**2** faces no lançamento das 4 moedas
Se r_i e [0.6875, 0.9375[	considera -se	**3** faces no lançamento das 4 moedas
Se r_i e [0.9375, 1)[	considera -se	**4** faces no lançamento das 4 moedas

Actividade – A lotaria do jogo do galo

Resolvi organizar um jogo do galo especial para os meus amigos e conhecidos. Arranjei um tabuleiro de 9 casas numeradas e um saco com 9 fichas com os números de 1 a 9.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Quem quiser jogar, paga 1000 escudos e pode escolher entre duas opções de jogo:

A – Tira 3 fichas ao acaso e ganha se elas corresponderem a três números situados na mesma fila, na mesma coluna ou na mesma diagonal. Neste caso, recebe os 1000 escudos de volta mais um prémio de 8 contos.

B – Tira 4 fichas ao acaso e ganha se 3 delas corresponderem a números situados na mesma fila, na mesma coluna ou na mesma diagonal. Neste caso, recebe os 1000 escudos de volta mais outros 1000 escudos de prémio.

Será que irei ter lucros se tudo correr normalmente?
Em média qual vai ser o meu lucro ou o meu prejuízo?

(Desafios, *Público* - 13.Jun.99)

Em cada caso, vamos colocar-nos no ponto de vista do organizador do jogo, calcular a distribuição de probabilidade e determinar o seu valor médio.

A – Há 84 maneiras diferentes de extrair 3 fichas de um grupo de 9. Este número corresponde às combinações de 9, 3 a 3.

Destes 84 casos, há 8 que dão prémio:

1-2-3   4-5-6   7-8-9   1-4-7   2-5-8   3-6-9   1-5-9   3-5-7

P(pagar prémio) = $\frac{8}{84}$

P(não pagar prémio) = 1 – $\frac{8}{84}$ = $\frac{76}{84}$

O organizador tem um lucro de 1000 escudos quando não paga prémio e um prejuízo de 8000 quando paga. Então o valor médio é:

$\mu = 1000 \text{ x } \frac{76}{84} - 8000 \text{ x} \frac{8}{84} \approx 143$ escudos

Outra hipótese de resolução seria considerar a contabilidade, do ponto de vista do organizador. Em média, em 84 jogadas:

Receitas: 76 × 1 = 76 contos

Despesas: 8 × 8 = 64 contos

O lucro é então de 12 contos em 84 jogadas, ou de cerca de 143 escudos por jogada.

B – Os casos possíveis são C_4^9 = 126, que correspondem às diferentes possibilidades de extrair 4 fichas do saco com 9.

Destes 126 casos, temos de ver quais são os que dão prémio. Pode-se ganhar, por exemplo, se sairem as fichas 1-2-3 associadas a uma das seis restantes fichas. Há seis maneiras diferentes de ganhar com as fichas 1-2-3. O mesmo se passa com as restantes combinações ganhadoras. Assim, os casos que dão prémio são no total de

8 × 6 = 48

P(pagar prémio) = $\frac{48}{126}$

P(não pagar prémio) = 1 – $\frac{48}{126}$ = $\frac{78}{126}$

$\mu = 1000 \times \frac{78}{126} - 1000 \times \frac{48}{126} = \frac{30000}{126} \approx 238$ escudos

Ou seja, em média, em 126 jogadas a organização perde 48 e ganha 78, o que corresponde a 48 contos de despesas e 78 de receitas. O lucro é de 30 contos, ou de cerca de 238 escudos por jogada.

Conclusão: em média, o organizador tem lucro em qualquer das hipóteses de jogo.

2.2.3- Variância amostral versus variância populacional

Como já dissemos, ao resumir a informação contida na amostra, além das medidas de localização, de que a média é o exemplo mais conhecido, temos as medidas de dispersão ou variabilidade, com relevo para o desvio padrão.

Então, voltando ao exemplo do dado que temos vindo a estudar, a variância da amostra obtida a partir da expressão considerada quando os dados se apresentam agrupados, é:

$s^2 = (1 - 3.551)^2 \times 0.154 + (2 - 3.551)^2 \times 0.165 + (3 - 3.551)^2 \times 0.173 + (4 - 3.551)^2 \times 0.163 + (5 - 3.551)^2 \times 0.174 + (6 - 3.551)^2 \times 0.171 = 2.875$

donde se obtém para o desvio padrão o valor

$$s = 1.696$$

Procedendo de forma análoga ao que fizemos anteriormente, em que substituímos as frequências relativas pelas probabilidades, e substituindo também a média pelo valor médio, obtemos o desvio padrão da população subjacente à amostra, a que chamamos desvio padrão populacional, e representamos por σ, para distinguir do desvio padrão amostral, calculado a partir da amostra:

$$\sigma = 1.71$$

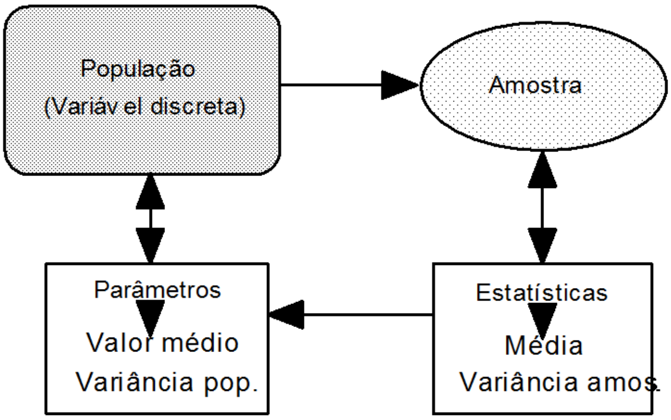
Define-se *variância populacional*, σ^2, de uma distribuição de probabilidades,

$$(x_i, p_i), \quad i=1, 2, \ldots, N$$

como sendo o valor que se obtém multiplicando cada resultado $(x_i - \mu)^2$ pela probabilidade $p_i = P(X=x_i)$, i=1, 2, …, N e adicionando os resultados obtidos:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 \, p_i$$

Assim, no esquema anterior podemos acrescentar mais uma estatística e o parâmetro correspondente:



Exemplo 6 - O João pergunta ao Miguel o que é que ele prefere: ganhar 5 contos, qualquer que seja o resultado observado no lançamento de uma moeda, ou ganhar 15 contos se no lançamento da moeda sair face, e perder 5 contos se sair coroa? O Miguel fica indeciso e pede-lhe um conselho. O que é que lhe aconselharia?

Resolução:

Na 1ªhipótese ganha sempre 5 contos, pelo que o lucro esperado é 5 contos.

Na 2ª hipótese temos uma variável que assume os valores –5 contos (perda) e 15 contos (ganho) com probabilidade 1/2:

Valor	-5 contos	15 contos
Probabilidade	0.5	0.5

O valor médio desta variável é

$$-5 \text{ contos} \times 0.5 + 15 \text{ contos} \times 0.5 = 5 \text{ contos}$$

Aparentemente as duas hipóteses são equivalentes pois em média dariam o mesmo ganho. O que é que então nos pode levar a decidir por uma ou outra das hipóteses? Vejamos o que se passa com a variabilidade: no 1º caso a variabilidade é igual a zero, pois temos um acontecimento certo, enquanto que no 2º caso a variância é igual a

$$(-5 \text{ contos} - 5 \text{ contos})^2 \times 0.5 + (15 \text{ contos} - 5 \text{ contos})^2 \times 0.5 = (10 \text{ contos})^2$$

pelo que o desvio padrão é igual 10 contos. Isto significa que, embora em média, as duas hipóteses sejam equivalentes, na 2º hipótese corre-se um grande risco, pois se numa jogada se pode ganhar 15 contos, também se pode perder 5 contos!

Exemplo 7 - Seja Y a variável aleatória que representa o número de vezes, por semana, que um indivíduo vai ao multibanco. Suponhamos que o modelo de probabilidade para Y é o seguinte:

Y=y	0	1	2	3
P(Y=y)	0.15	0.30	0.45	0.10

a) Qual o número médio de vezes que o indivíduo vai ao multibanco?

b) Qual a probabilidade de ir 2 ou menos vezes ao multibanco por semana?

c) Qual a distribuição de probabilidades do nº de vezes que um indivíduo vai ao multibanco em duas semanas, admitindo que as idas de semana para semana são independentes umas das outras?

Resolução:

a) Valor médio = 0 x 0.15 + 1 x 0.30 + 2 x 0.45 + 3 x 0.10 = 1.5

b) $P(Y \leq 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) = 0.90$

c) Para calcular a distribuição de probabilidades da variável aleatória X, que representa o nº de vezes que o indivíduo vai ao multibanco em duas semanas, consideremos o seguinte quadro:

2ª semana

1ª semana	0	1	2	3
0	0.15x0.15	0.15x0.30	0.15x0.45	0.15x0.10
1	0.30x0.15	0.30x0.30	0.30x0.45	0.30x0.10
2	0.45x0.15	0.45x0.30	0.45x0.45	0.45x0.10
3	0.10x0.15	0.10x0.30	0.10x0.45	0.10x0.10

O quadro anterior vai-nos servir para calcular as probabilidades da variável aleatória assumir os seus valores. Por exemplo, para calcular a probabilidade de X=0, consideramos o acontecimento (0,0), que significa "ir 0 vezes ao multibanco na 1ª semana e ir 0 vezes ao multibanco na 2ª semana". Como este acontecimento é a intersecção de dois acontecimentos independentes, vem que a sua probabilidade é igual ao produto das probabilidades. Assim:

P(X=0) = 0.15x0.15 = 0.0225

P(X=1) = 0.15x0.30 + 0.30x0.15 =.0.0900

P(X=2) = 0.15x0.45 + 0.30x0.30 + 0.45x0.15 = 0.2250

P(X=3) = 0.15x0.10 + 0.30x0.45 + 0.45x0.30 + 0.10x0.15 = 0.3000

P(X=4) = 0.30x010 + 0.45x0.45 + 0.10x0.30 = 0.2625

P(X=5) = 0.45x0.10 + 0.10x0.45 = 0.0900

P(X=6) = 0.10x0.10 = 0.0100

X=x	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidade	0.0225	0.0900	0.2250	0.3000	0.2625	0.0900	0.0100

Há algumas distribuições de probabilidades de variáveis aleatórias discretas que são úteis, por fornecerem bons modelos para as distribuições de frequência de muitos situações que se observam na vida real. Um dos modelos mais simples é o *modelo uniforme*, de que a variável aleatória que representa o número de pintas da face que fica virada para cima no lançamento do dado, é um exemplo. Como o nome sugere, é uma distribuição em que a variável assume um número finito N de valores distintos, cada um com probabilidade 1/N. Outro modelo que surge com grande frequência nas aplicações é o *modelo Binomial*, que apresentamos a seguir.

2.3 - Modelo Binomial

Consideremos as seguinte situações:

1 - Suponha que está interessado em estudar o número X de caras que saem em 20 lançamentos de uma moeda equilibrada. Esta experiência é constituída por 20 observações, em que em cada observação se pode verificar a saída de cara, a que chamamos sucesso, ou a saída de coroa, a que chamamos insucesso. As observações são independentes, e em cada uma a probabilidade de sucesso é constante e igual a 1/2.

2 - Suponha que está interessado em estudar o número Y de peças defeituosas, num lote de 100 peças, produzidas por uma máquina que fabrica 10% de peças defeituosas. Esta experiência é constituída por 100 observações, em que cada observação consiste em verificar se a peça é defeituosa - sucesso, ou não defeituosa - insucesso. O resultado das observações é independente de peça para peça, e a probabilidade de obtermos uma peça defeituosa é constante e igual a 10%.

3 - Suponha que está interessado em estudar o número Z de bebés do sexo masculino que nascem nos próximos 25 nascimentos da maternidade Alfredo da Costa, em Lisboa. Admite-se que a probabilidade de nascer rapaz é 0.51. Esta experiência é constituída por 25 observações, em que em cada observação se pode verificar o nascimento de um rapaz - sucesso, ou de uma rapariga - insucesso. As observações são independentes, e em cada uma a probabilidade de sucesso é constante e igual a 0.51.

4 - Suponha que está interessado em conhecer o número U de donas de casa, que numa rua com 18 casas são contra os toiros de morte, em Portugal. Esta experiência é constituída por 18 observações, em que em cada observação se pode receber a resposta SIM (contra os toiros de morte) - sucesso, ou a resposta NÃO - insucesso. As observações são independentes, e em cada uma a probabilidade de sucesso é constante e igual a p (desconhecido se não se souber qual a percentagem de donas de casa contra os toiros de morte em Portugal).

5 - Suponha que numa escola com 2200 alunos, 56% são raparigas. Escolhe-se ao acaso uma comissão de festas constituída por 12 alunos e estamos interessados em estudar o número V de alunas pertencentes à dita comissão. Esta experiência é constituída por 12 observações, em que cada observação consiste em verificar se o aluno é rapariga - sucesso, ou rapaz - insucesso. As observações são independentes, e em cada uma a probabilidade de sucesso é constante (aproximadamente) e igual a .56.

6 - Suponha que está interessado em estudar o número T de alunos que, numa amostra de 15 alunos do 1º ano de determinado curso de uma Universidade, não passaram de ano no ano lectivo de 97/98. Esta experiência é constituída por 15 observações, em que em cada observação consiste em verificar se o aluno não passou de ano - sucesso, ou passou de ano - insucesso. As observações são independentes, e em cada uma a probabilidade de sucesso é constante (aproximadamente)e igual a p.

Todas as situações anteriores são idênticas nos seguintes aspectos:

i) Considera-se à partida um número fixo n de observações, a que é usual chamar provas;
ii) As observações são independentes umas das outras;
iii) Em cada observação pode-se obter um de dois resultados possíveis, a que chamamos sucesso ou insucesso;
iv) A probabilidade de sucesso p, é constante de observação para observação.

À variável X, que representa o número de sucessos nas n provas chama-se variável aleatória com distribuição Binomial de parâmetros n e p.

Os valores que esta variável pode assumir são

$$0, 1, 2, \ldots, n$$

Qual a probabilidade de X assumir cada um daqueles valores?

Antes de obtermos o modelo geral, vamos começar por estudar o seguinte exemplo:

Exemplo 8 - Uma senhora comprou 4 bolbos de narcisos, tendo-lhe o florista garantido que havia uma probabilidade de 75% de cada um florescer para a primavera seguinte. Estude a variável X que representa o número de narcisos que a senhora irá obter.
Resolução:
O número X de bolbos que florescem pode ser igual a 0, 1, 2, 3 ou 4.

P(X=0)=P(0 bolbos florescerem e 4 bolbos não florescerem) = $0.75^0 \times (1-0.75)^4$

P(X=1)=P(1 bolbo florescer e 3 não florescerem) = 4 x 0.75^1 x $(1-0.75)^3$ (o coeficiente 4 corresponde ao número de maneiras de escolher o bolbo que floresce, de entre os 4)

P(X=2)=P(2 bolbos florescerem e 2 não florescerem) = 6 x 0.75^2 x $(1-0.75)^2$ (o coeficiente 6 corresponde ao número de maneiras de escolher os 2 bolbos que florescem, de entre os 4)

P(X=3)=P(3 bolbos florescerem e 1 não florescer) = 4 x 0.75^3 x $(1-0.75)^1$ (o coeficiente 4 corresponde ao número de maneiras de escolher os 3 bolbos que florescem, de entre os 4)

P(X=4)=P(4 bolbos florescerem e 0 não florescer) = 1 x 0.75^4 x $(1-0.75)^0$

Como veremos mais à frente, no capítulo dedicado ao cálculo combinatório, o número de maneiras possíveis de escolher k sucessos de entre n observações é dado pelo coeficiente binomial $C_k^n \equiv \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$

Com esta notação P(X=k) = C_k^4 x 0.75^k x $(1-0.75)^{4-k}$, com k=0, 1, 2, 3 ou 4.

De um modo geral, se X tem distribuição Binomial de parâmetros **n** e **p**,

$$P(X=k) = C_k^n \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

para k = 0,1,2,…, n.

Exemplo 9 - Sabe-se que numa determinada escola 70% dos estudantes votaram a favor da Associação de Estudantes eleita, 5% votaram contra e 25% abstiveram-se. Qual a probabilidade de num grupo de 8 alunos, escolhidos ao acaso (i) 5 terem votado? (ii) 2 terem-se abstido? (iii) 5 terem votado a favor?

Resolução :

(i) P(5 votarem) = C_5^8 x 0.75^5 x 0.25^3 ≈ 0.21

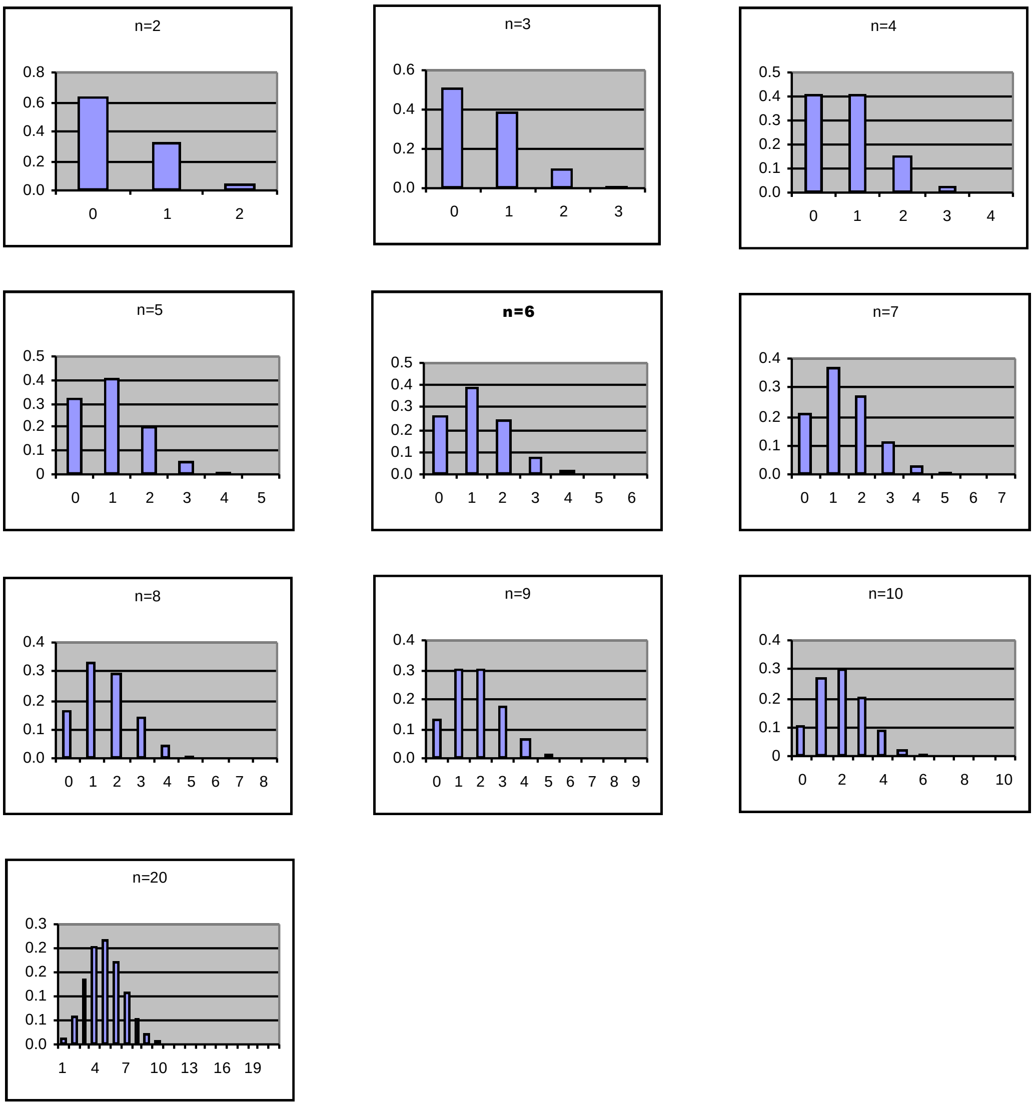
(ii) P(2 absterem-se) = C_2^8 x 0.25^2 x 0.75^6 ≈ 0.31

(iii) P(5 votarem favor) = C_5^8 x 0.70^5 x $.30^3$ ≈ 0.25

Actividade

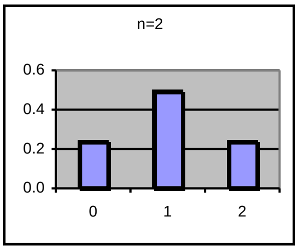
Represente a distribuição de probabilidades de uma variável aleatória binomial, para n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 20 e p=0.2, 0.5.

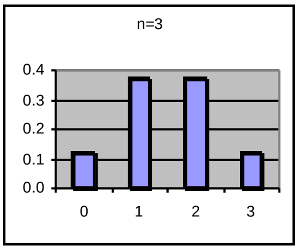
1º caso: p= 0.2

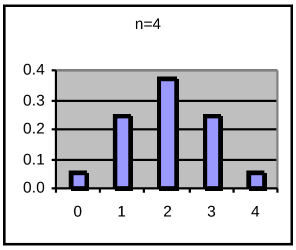


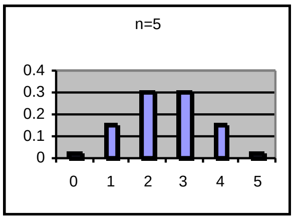
Comentário: As representações anteriores mostram-nos que à medida que o número n de provas aumenta, a distribuição de probabilidades começa a apresentar uma certa simetria, mesmo quando à partida partimos de uma distribuição assimétrica.

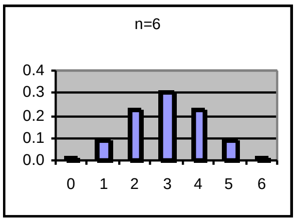
2º caso: p=0.5

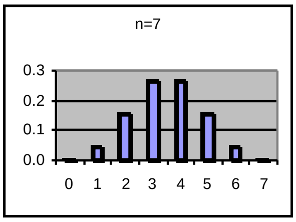


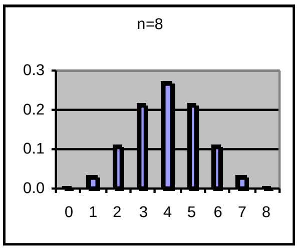


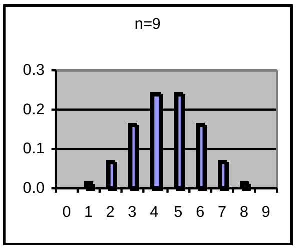


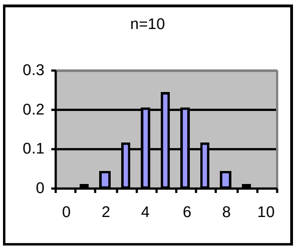


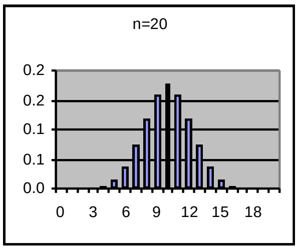












Comentário: A distribuição de probabilidades é simétrica, qualquer que seja o valor de n, e à medida que o valor de n aumenta começa a esboçar-se a forma de um sino, que faz lembrar uma das distribuições mais utilizadas – a distribuição Normal, de que falamos na secção seguinte.

Ver em anexo o programa **BINOM**, que mostra como evolui o gráfico da distribuição Binomial para uma dada probabilidade p de sucesso.

Aplicação do modelo Binomial

Na vida real surgem-nos com frequência situações que podem ser bem modeladas pelo modelo Binomial. Por exemplo, suponhamos que recolhemos uma amostra aleatória de 15 alunos de uma universidade com 10000 alunos, onde sabemos que a percentagem de raparigas é 51%. Qual a distribuição da variável aleatória que representa o número de raparigas na amostra seleccionada? Será que estamos numa situação em que se aplica o modelo Binomial? Não, se pensarmos estritamente nas condições que nos conduzem a este modelo, nomeadamente no facto de ser constante a percentagem de sucessos, quando se realizam as sucessivas provas (selecção dos alunos). No caso presente, se ao seleccionarmos o primeiro aluno dos 10000 alunos, retirarmos uma rapariga, ficamos com 5099 raparigas, pelo que a probabilidade de sucesso para a prova seguinte será de 509/9999 = 0.509950995…: se pelo contrário o aluno seleccionado for rapaz, a probabilidade de sucesso para a prova seguinte será 510/9999 = 0.510051005…. No entanto, estes valores são tão próximas de 0.51, que em termos práticos podemos dizer que o facto de termos retirado um elemento da população, não alterou a sua composição. O mesmo raciocínio pode ser feito para as provas seguintes. Assim, podemos dizer que a variável aleatória que representa o número de raparigas (sucessos) na amostra de 15 alunos, pose ser aproximadamente modelada por uma distribuição Binomial de parâmetros n=15 e p=0.51.

Quando o número de elementos de uma população é substancialmente maior que a dimensão n de uma amostra aleatória simples retirada dessa população, então o número de sucessos obtidos na amostra pode ser aproximadamente modelado pela distribuição Binomial, com parâmetros n e p, sendo p a proporção de sucessos na população. A aproximação é tanto melhor, quanto maior for a dimensão da população, quando comparada com a da amostra.

Nota: Os exemplos 5 e 6 apresentados na introdução ao modelo Binomial, são exemplos da situação descrita anteriormente.

Valor médio e variância da distribuição Binomial

O valor médio ou valor esperado de uma variável aleatória X com distribuição Binomial é um valor que surge muito naturalmente, sem nos apercebermos sequer que temos subjacente um modelo Binomial. Suponhamos, por exemplo, que pretendemos saber qual o número esperado de raparigas, numa amostra de 10 jovens, em que a probabilidade de ser rapariga é 20%? A nossa intuição diz-nos que esperamos obter 2 raparigas, valor obtido ao multiplicar 10 por 0.2.

O valor médio ou valor esperado de uma variável aleatória X com distribuição Binomial de parâmetros n e p, é

$$m = np$$

Nota: O resultado anterior obtém-se facilmente a partir da definição de valor médio. Efectivamente se X tem distribuição Binomial de parâmetros n e p, então

$$m = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k}(1-p)^{n-k} = np$$

Pode-se mostrar que a variância da variável aleatória X é s^2 = np(1-p).**Distribuição de Bernoulli**

Um caso particular da variável aleatória Binomial é o que se verifica quando n=1, obtendo-se a chamada variável de

Nº sucessos – k	0	1
P(X=k)	1-p	p

Calcule o valor médio e a variância desta variável aleatória e verifique que são iguais, respectivamente a p e a p(1-p).

A Distribuição Binomial e a Calculadora

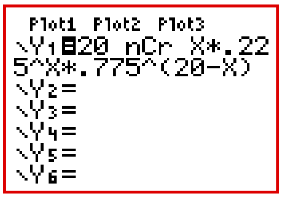
Na Lotaria Instantânea, mais conhecida por *Raspadinha*, a probabilidade de obter um prémio quando se compra um bilhete é de 0.225.

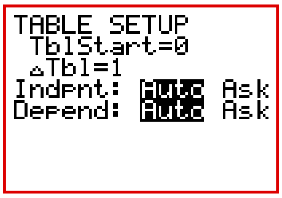
Se comprarmos 20 bilhetes, qual é a probabilidade de não ter nenhum prémio?
E de ter apenas 1? E de ter 2? E 3? E...?

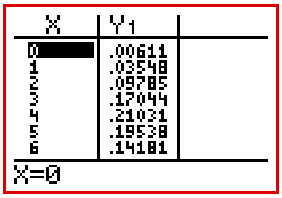
Estamos perante uma distribuição binomial em que o número de ensaios ou provas é 20 e a probabilidade de sucesso é 0.225. Então

$$P(X = k) = C_k^{20} \times 0.225^k \times 0.775^{20-k}$$

Para obter as probabilidades pedidas, o mais fácil é colocar esta expressão no editor de funções e pedir a tabela para valores da variável a partir de 0.



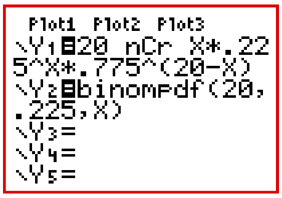


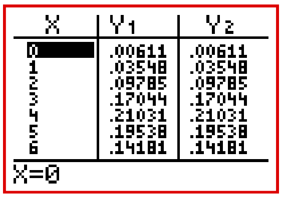


Certas calculadoras permitem obter directamente os valores das distribuições binomiais de uma forma mais fácil. Na TI-83 usa-se a instrução *binompdf* que está em DISTR.

binompdf(*nº de ensaios*, *probabilidade de sucesso*,,*nº de sucessos*)

Se colocarmos a função binomial em Y2 podemos comparar os valores da tabela e vermos que são iguais:

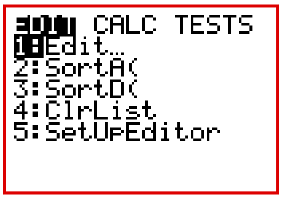


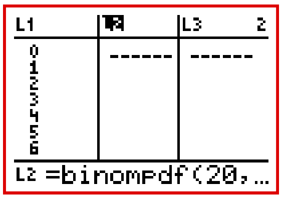


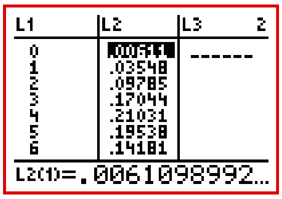
A probabilidade de não ter nenhum prémio é 0.6%, a de ter um só prémio é de 3.5%, a de ter 2 é 9.8%, etc. O caso mais provável é ter 4 prémios: 21%.

Podemos também construir o gráfico de barras para esta distribuição. Para isso, vamos a STAT 1:Edit..., colocamos os números de 0 a 20 em L1 e fazemos

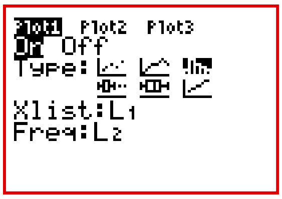
L2 = binompdf(20, 0.225, L1)

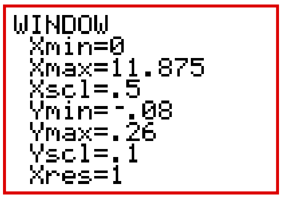


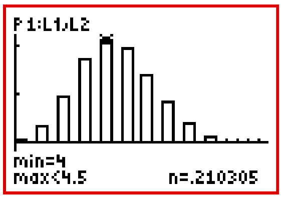




Depois, pedimos o gráfico estatístico correspondente, escolhendo uma janela adequada. Neste caso, como as probabilidades acima de 11 sucessos são muito pequenas, escusamos de ir até 20.





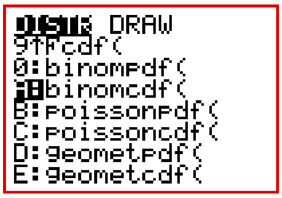


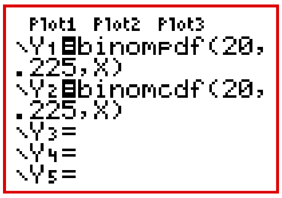
Qual é a probabilidade de obtermos mais de 5 prémios?

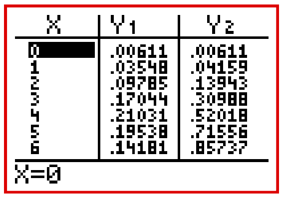
Para responder a esta pergunta teríamos de somar as probabilidades de todos os valores desde 6 até 20. Ou então, de 0 até 5 e subtrair a 1. Em qualquer dos casos teríamos algum trabalho.

Podemos aproveitar o facto de a calculadora ter também a função binomial acumulada *binomcdf*, que dá imediatamente as probabilidades acumuladas:

binomcdf(*nº de ensaios*, *probabilidade de sucesso*,,*nº de sucessos*)







Observando a tabela, podemos concluir que a probabilidade de obter 5 prémios ou menos é de cerca de 71.6%. Logo, a probabilidade de ter mais de 5 prémios é

1 – 0.716 = 0.284.

2.4 - Lei dos grandes números

Consideremos uma experiência aleatória verificando as seguintes condições: (i) Em cada realização da experiência pode verificar-se um de dois resultados possíveis: ou se realiza o acontecimento A – a que chamamos sucesso, ou não se realiza A – caso em que temos um insucesso (ii) A probabilidade de se obter sucesso em cada realização da experiência é constante e igual a p. (iii) A experiência pode realizar-se as vezes que se quiser nas mesmas condições e as realizações – a que se costumam chamar provas, são independentes umas das outras. A provas com estas características chamam-se *provas de Bernoulli*. Tendo em atenção a aproximação frequencista de probabilidade, podemos interpretar p como a frequência relativa do sucesso numa série indefinidamente prolongada de provas, sendo este processo utilizado para estimar p. A questão que se põe (Parzen, 1960) é a de saber se este processo poderá ser legitimado com base na teoria matemática da probabilidade, que como também vimos, é construída a partir de um conjunto de axiomas. Efectivamente assim é, pois Bernoulli em 1713, na sua obra *Ars conjectandi*, apresenta uma primeira versão da lei dos grandes números, também referida por lei dos grandes números de Bernoulli, onde estabelece e prova o seguinte:

Lei dos grandes números de Bernoulli (Parzen, 1960): Seja S_n o número de sucessos observados em n provas de Bernoulli, com probabilidade p de sucesso em cada prova. Representemos por $f_n = \frac{S_n}{n}$, a frequência relativa de sucesso nas n provas. Então qualquer que seja ε>0, tão pequeno quanto se queira,

$$\lim_{n\to\infty} P[|f_n - p|] \leq \varepsilon] = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} P[|f_n - p|] > \varepsilon] = 0$$

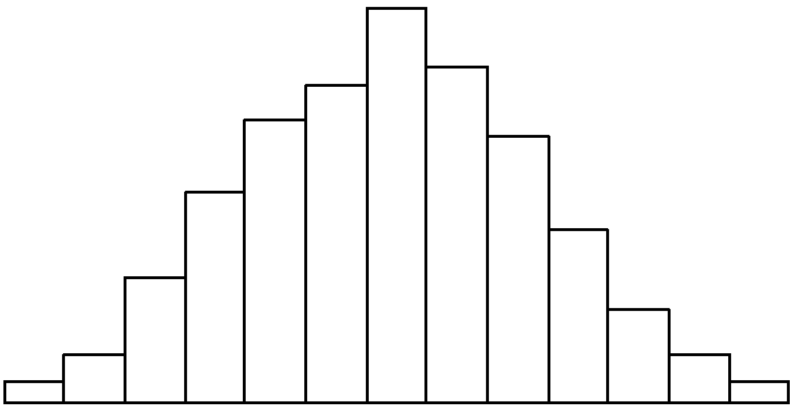
A expressão anterior tem a seguinte interpretação: À medida que n aumenta, a probabilidade da frequência relativa de sucesso se desviar de p, mais do que uma quantidade fixada ε, tende para zero. Podemos dizer que esta é a justificação “teórica” para a utilização da aproximação frequencista da probabilidade.

Observação (Graça Martins, 1998): Na secção 1.5.1 em que introduzimos a aproximação frequencista de probabilidade considerámos o exemplo do lançamento de uma moeda 100 vezes e pretendíamos obter um valor aproximado para a probabilidade de se verificar coroa. Se ao fim dos 100 lançamentos se verificaram 49 coroas, então a frequência relativa com que se verificou coroa foi de 0.49 e *o limite para que tende a frequência relativa da saída de coroa, ao fim de um grande número de lançamentos, é interpretado como a probabilidade de saída de coroa*. Chamamos a atenção para a observação feita nesta secção sobre a interpretação a dar a este caso.

2.5 - O modelo Normal

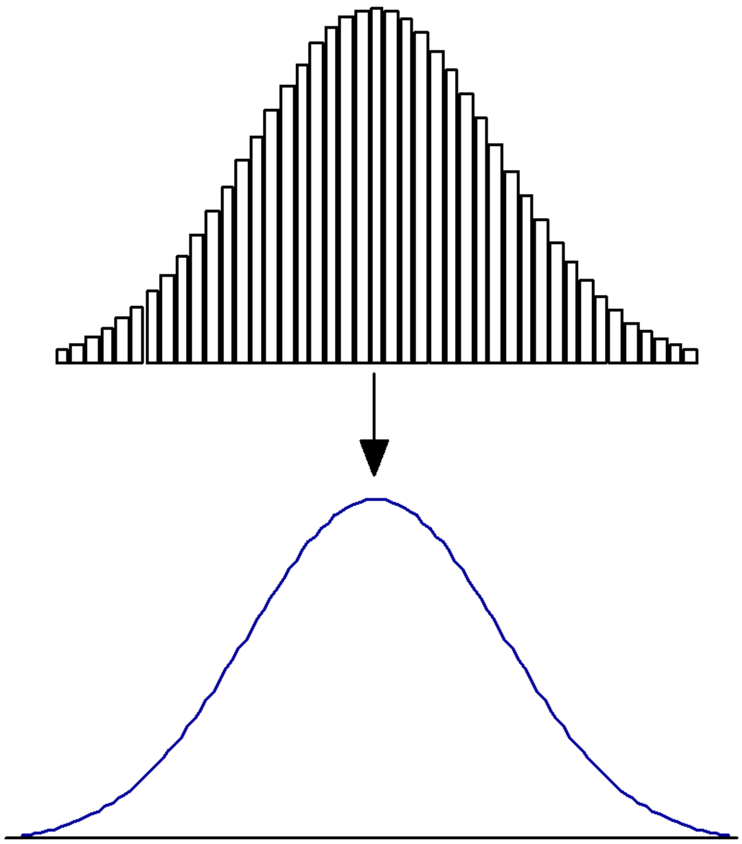
Nos exemplos anteriores considerámos que a variável aleatória era discreta, isto é, só podia assumir um número finito ou infinito numerável de valores distintos. No entanto, quando na Estatística classificámos as variáveis, vimos que estas também podiam ser de tipo contínuo.

Suponhamos, por exemplo, que estávamos interessados em estudar a característica altura da População constituída pelos indivíduos adultos, sexo masculino, de nacionalidade portuguesa. Identificando a População com os valores que a característica em estudo pode assumir, podemos dizer que estamos interessados em estudar a variável aleatória que representa a altura de um indivíduo escolhido ao acaso de entre os indivíduos adultos, sexo masculino, portugueses. Obviamente que esta variável aleatória já não é discreta, mas sim contínua. Para estudar esta População suponhamos que se recolheu uma amostra e que se representou graficamente os dados - de tipo contínuo, por meio de um histograma. Um aspecto possível para o histograma é o que se apresenta a seguir:

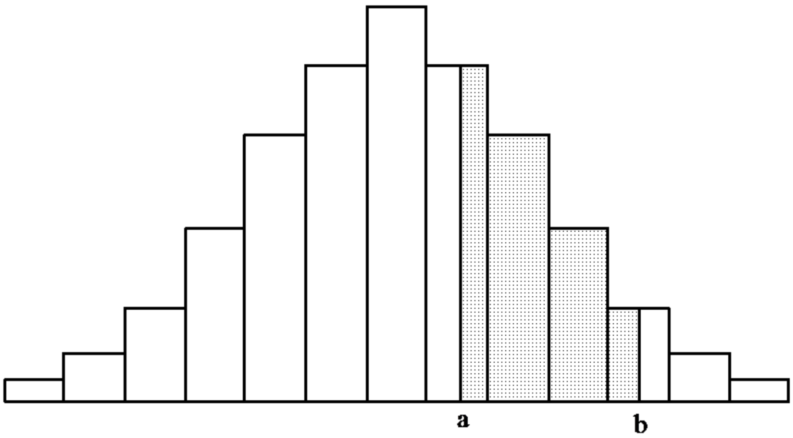


2.5.1 - Histograma versus função densidade

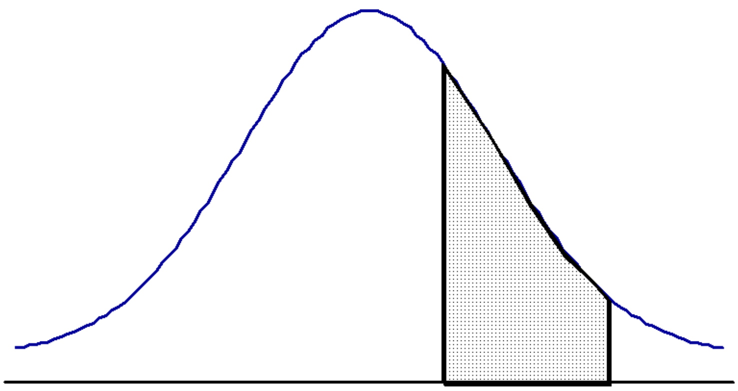
Na continuação do paralelismo que estabelecemos entre a População e a amostra, para o caso das variáveis discretas, é oportuno nesta fase investigar se não haverá nenhuma representação que seja, para a População, o equivalente ao histograma na amostra? Efectivamente essa representação existe e é a chamada *função densidade de probabilidade*. No caso do exemplo anterior seria uma curva com o aspecto de um sino, conhecida por curva de Gauss ou curva normal. Podemos dizer que esta curva seria o limite para que tenderia o histograma se considerássemos muitas observações e por conseguinte muitas classes, cada vez com uma amplitude mais pequena, para representar os dados:



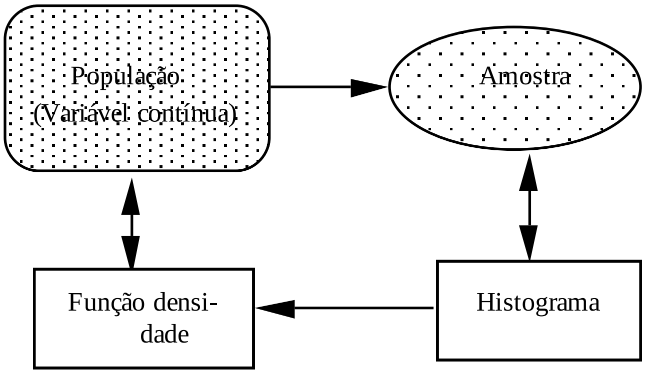
Qual é a utilidade da função densidade? Para responder a esta questão voltemos novamente ao histograma, que é a imagem estatística da função densidade. Dados dois reais quaisquer a e b, a área a ponteado dá um valor aproximado para a frequência relativa de os dados da amostra estarem entre esses dois pontos, se o histograma foi correctamente construído, isto é, com as áreas dos rectângulos iguais às frequências relativas das respectivas classes:



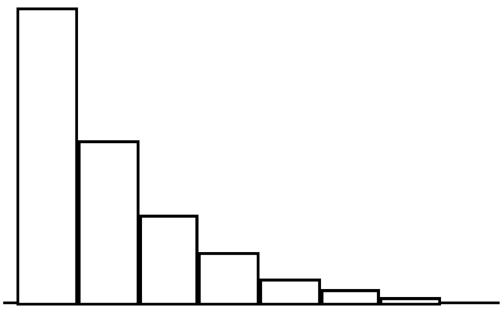
Por sua vez a área a ponteado na função densidade dá o valor da probabilidade da variável estar compreendida entre os valores a e b. A frequência relativa entre a e b é um valor aproximado daquela probabilidade:

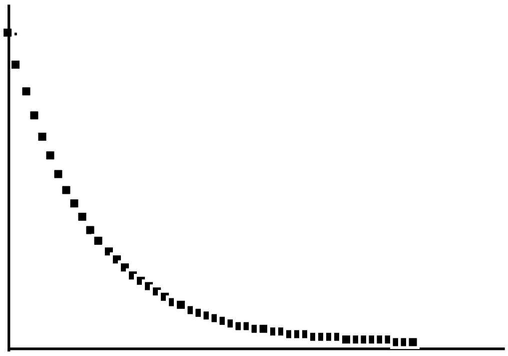


O esquema seguinte, análogo ao apresentado para as variáveis discretas resume as considerações que acabámos de fazer:



Embora não seja nosso objectivo entrar no estudo das variáveis contínuas, não podemos deixar de chamar a atenção para o facto de nem todos os conjuntos de dados darem origem a histogramas como o anteriormente considerado, pelo que a função densidade da variável aleatória subjacente não é a curva normal. Por exemplo, se no estudo de um conjunto de dados obtivermos o seguinte histograma, somos levados a sugerir para a população o modelo exponencial, que se apresenta a seguir:





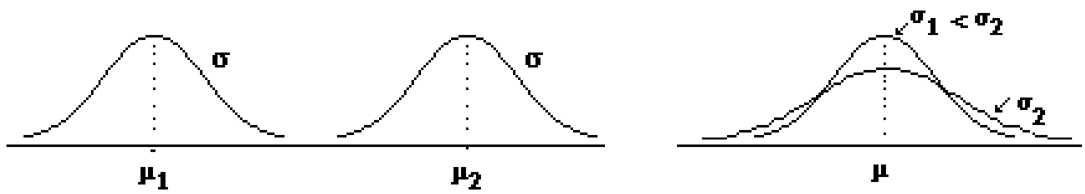
De forma ao que fizemos para o caso de variáveis aleatórias discretas, também para as variáveis aleatórias contínuas se define valor médio e variância populacional. No entanto, para obter esses parâmetros, teríamos de considerar uma generalização das somas consideradas nas fórmulas para o caso discreto, que seriam aqui os integrais. Por sair fora do âmbito do curso, não entraremos em mais detalhe.

2.5.2 - Modelo Normal

O facto de a curva normal ser tão popular, advém do facto de surgir com muita frequência nas aplicações, nomeadamente como consequência de um dos teoremas mais importantes da teoria das probabilidades, o Teorema Limite Central.

Propriedades da curva normal:

- É simétrica relativamente ao valor médio μ da variável, assumindo aí o valor máximo;
- Quanto maior for o desvio padrão σ, mais achatada é a curva;



- A área compreendida entre a curva e o eixo dos xx é igual a 1;
- A área compreendida entre a curva, o eixo dos xx e as rectas que passam pelos pontos μ-σ e μ+σ, é aproximadamente igual a 0.68;
- A área compreendida entre a curva, o eixo dos xx e as rectas que passam pelos pontos μ-2σ e μ+2σ, é aproximadamente igual a 0.95;
- A área compreendida entre a curva, o eixo dos xx e as rectas que passam pelos pontos μ-3σ e μ+3σ, é aproximadamente igual a 1.

As 3 últimas propriedades anteriores dizem-nos que, se **X** for Normal:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = .683$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = .954$$

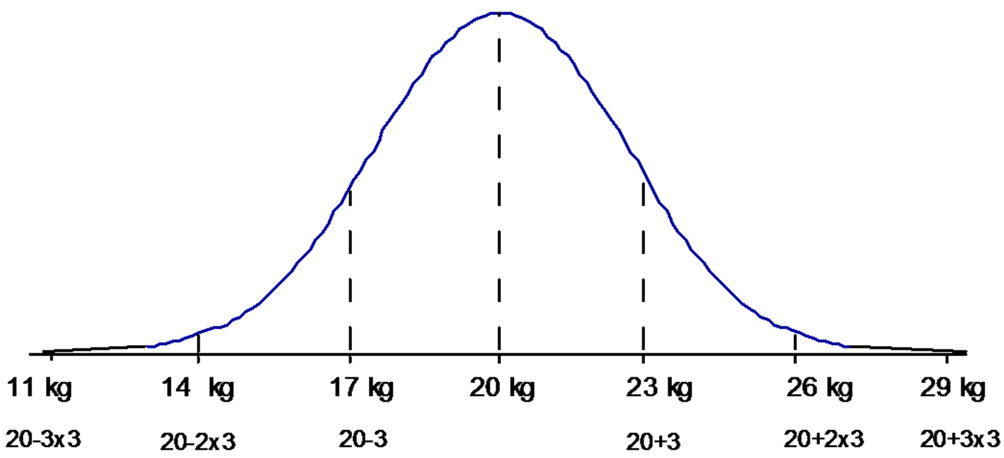
$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = .997$$

Exemplo 10 - Os pesos das crianças do sexo masculino com idades compreendidas entre os 10 e os 12 anos distribui-se normalmente com valor médio 20 Kg e desvio padrão 3kg. Qual a probabilidade de uma criança daquela classe etária, escolhida ao acaso:

- Pesar entre 17kg e 23Kg?
- Pesar mais de 23kg?
- Pesar mais de 29kg?

Resolução :

- A probabilidade de se obterem valores no intervalo [17kg, 23kg] é aproximadamente 0.68.
- A probabilidade de se obterem valores fora do intervalo da alínea anterior é aproximadamente 0.32, pelo que a probabilidade pretendida é 0.16, atendendo à simetria da função densidade de probabilidade.
- A probabilidade de se obterem valores no intervalo [11kg, 29kg] é aproximadamente 1, pelo que a probabilidade de se obterem valores fora daquele intervalo será aproximadamente 0.

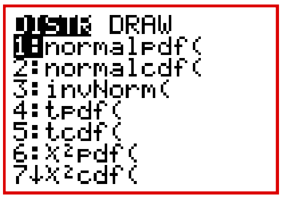


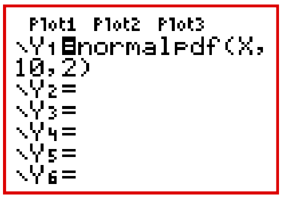
A Distribuição Normal e a Calculadora

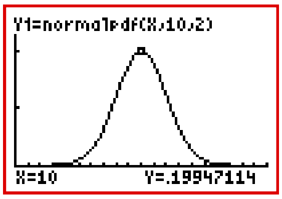
Algumas calculadoras mais recentes permitem observar os gráficos das distribuições normais e obter os valores das probabilidades correspondentes a qualquer intervalo.

Imaginemos que queríamos o gráfico da distribuição normal de valor médio 10 e desvio padrão 2. Na TI-83 colocamos no editor de funções a instrução correspondente à função de densidade de probabilidade normal *normalpdf* que se encontra em DISTR:

normalpdf(*variável*, *média*, *desvio padrão*)

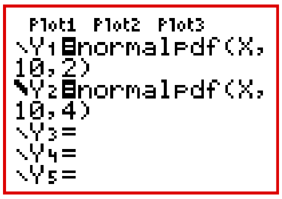


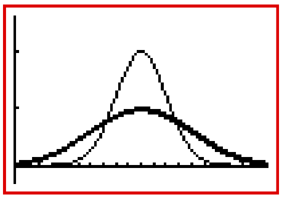




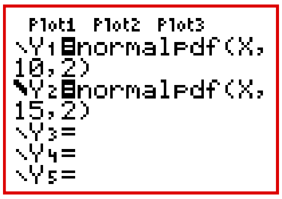
Janela: [0;20] x [–0.3;0.26]

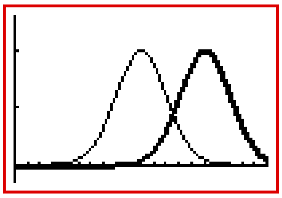
Podemos também comparar duas distribuições normais com o mesmo valor médio mas diferentes desvios padrões. Por exemplo, a anterior com a que tem desvio padrão 4.





Ou então, duas normais com o mesmo desvio padrão:



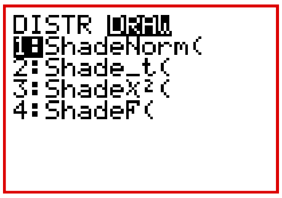


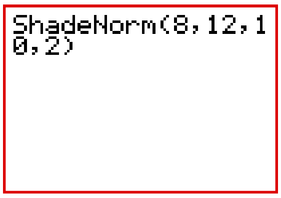
Embora o programa do ensino secundário só inclua o estudo da normal para os casos particulares correspondentes aos intervalos [$\mu-\sigma$; $\mu+\sigma$] e [$\mu-2\sigma$; $\mu+2\sigma$], a calculadora vai permitir-nos trabalhar com qualquer intervalo e portanto resolver muitos mais problemas.

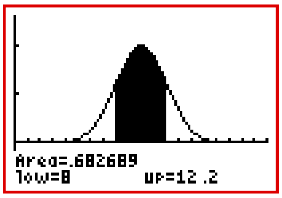
Confirmemos primeiro alguns resultados conhecidos. Por exemplo, que cerca de 68% da distribuição se encontra no intervalo [$\mu-\sigma$; $\mu+\sigma$]. Temos duas maneiras de o fazer.

A primeira, visualizando o intervalo indicado. A partir do ecrã principal, vai-se a DISTR e depois DRAW para pedir:

ShadeNorm(_limite inferior_, _limite superior_, _média, desvio padrão_)

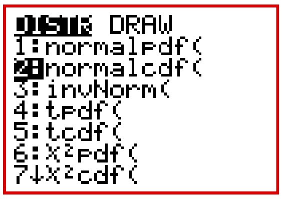


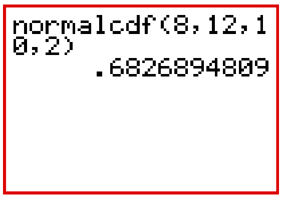




A segunda maneira é mais rápida, embora não se visualize graficamente. Usa-se a função de distribuição normal acumulada *normalcdf* (ver observação no fim da actividade), que dá a área correspondente ao intervalo indicado:

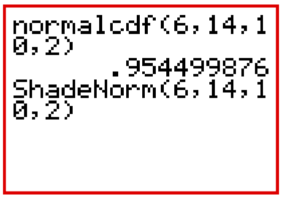
normalcdf(_limite inferior_, _limite superior_, _média, desvio padrão_)

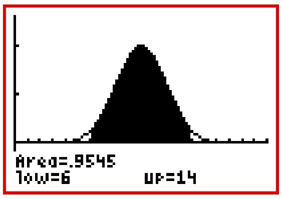




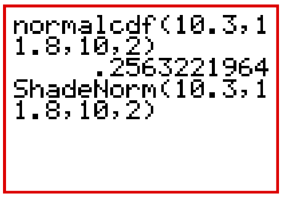
Vemos então que ao intervalo [$\mu-\sigma$; $\mu+\sigma$] corresponde a probabilidade 0.68269.

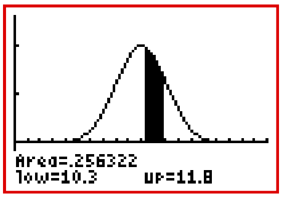
O mesmo se poderia fazer para o intervalo [$\mu-2\sigma$; $\mu+2\sigma$], a que corresponde aproxima-damente a probabilidade 0.9545.





Claro que este processo nos permite obter a probabilidade correspondente a qualquer intervalo. Por exemplo, para o intervalo [10.3 ; 11.8] obtemos aproximadamente 25.6%.

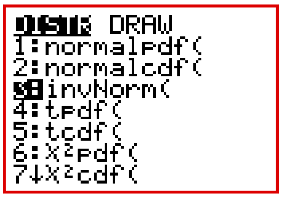


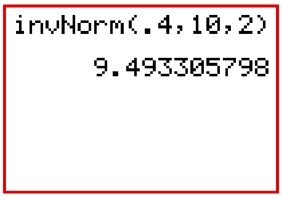


Outra capacidade da calculadora é a função inversa da normal. Permite determinar o valor abaixo do qual está uma certa probabilidade. Ou seja, encontrar o intervalo]–∞ , L] que tem essa probabilidade. Usa-se a instrução *invNorm*, que está em DISTR

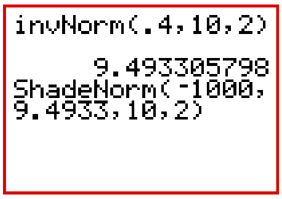
invNorm(*probabilidade*, *média, desvio padrão*)

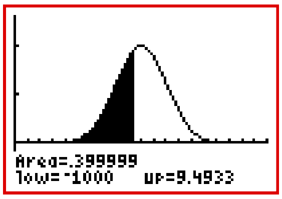
Por exemplo, na normal anterior, 40% da distribuição está abaixo do valor 9.4933.





Podemos confirmar este resultado por um dos processos anteriores, pedindo por exemplo a área que corresponde ao intervalo [–1000.9.4933]:





Observação: Dada uma variável aleatória X, define-se *função distribuição ou função distribuição cumulativa* de X, como sendo a função F(x), definida para todo o x real da seguinte forma:

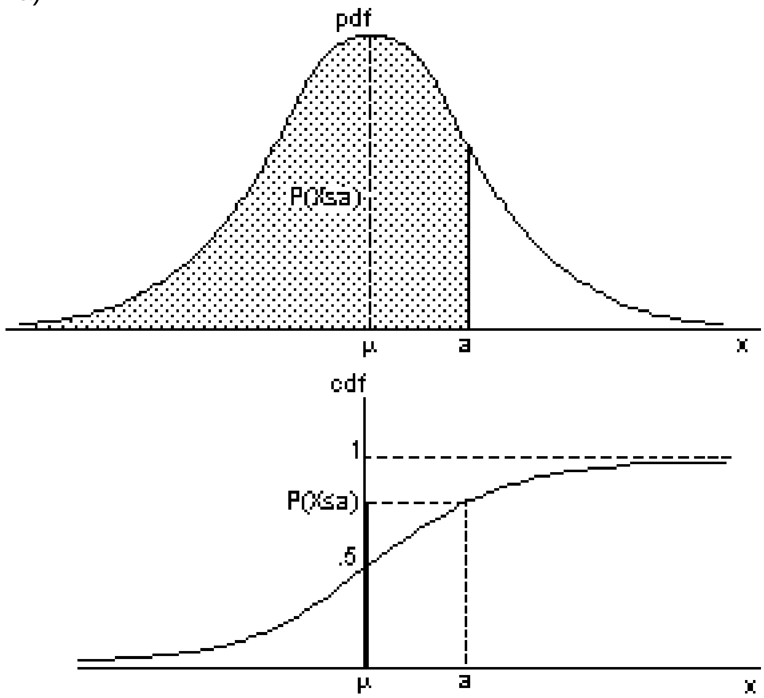
$$F(x) = P(X \leq x)$$

isto é, para cada x, a função distribuição dá-nos a probabilidade da variável aleatória assumir valores menores ou iguais a x. Quando pretendemos obter a probabilidade da variável aleatória pertencer ao intervalo (a, b), se tivermos a função distribuição F(x), então aquela probabilidade será

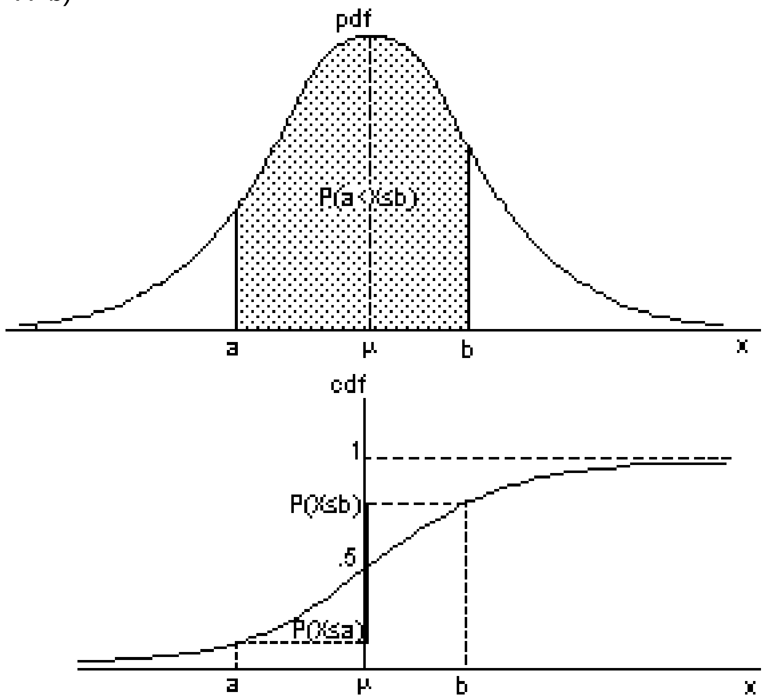
$$P(a<X\leq b) = F(b) - F(a)$$

Repare-se então, para o caso da Normal, o que é que significa utilizar a função distribuição normal – normalcdf, ou a função densidade normal – normalpdf, para calcular a probabilidade de um intervalo, de uma Normal de parâmetros μ e σ::

1º caso: P(X≤a)



2º caso: P(a<X≤b)



Actividade – Salto em comprimento

O treinador de um atleta especialista no salto em comprimento fez um estudo estatístico dos saltos dados nos últimos tempos pelo seu atleta e verificou que se distribuíam normalmente com valor médio de 7.23 metros e desvio padrão de 0.33 m.

1. Qual é a probabilidade de ele dar um salto entre os 7 e os 7.5 metros?

2. O atleta vai dar o último salto a que tem direito e para se classificar para a fase seguinte precisa de ultrapassar os 7.55 metros. Qual é a probabilidade de o conseguir?

3. E qual é a probabilidade de bater o recorde nacional do seu país que é de 7.91m?

(Lopes et al, 1999)

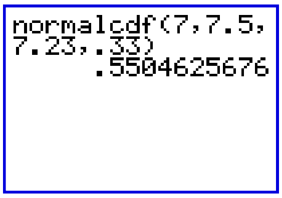
A calculadora gráfica permite-nos responder imediatamente a estas perguntas.

1. Temos duas maneiras diferentes para o fazer.

• Com a função de distribuição normal acumulada:

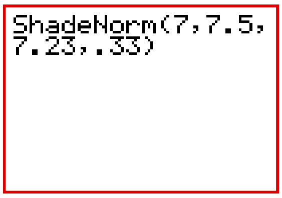
normcdf(*limite inferior*, *limite superior*, *média*, *desvio padrão*)

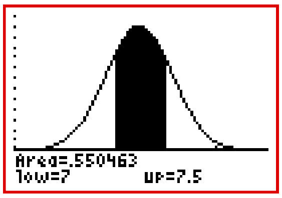
A probabilidade é de aproximadamente 55%.



• Desenhando a função de densidade normal e sombreando a área entre os limites indicados:

ShadeNorm(*limite inferior*, *limite superior*, *média, desvio padrão*)

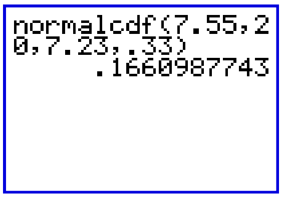




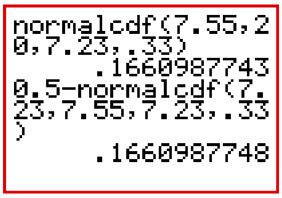
Atenção: É preciso definir primeiro uma janela adequada.

Neste caso [6 ; 8,5] por [–0,3 ; 1,3]

2. Basta definir o intervalo a começar no número indicado e a terminar num valor bastante elevado (20 metros, por exemplo) .



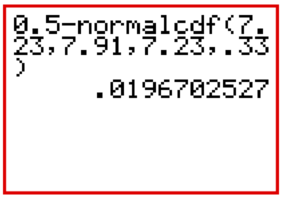
Outra hipótese, mais rigorosa, é aplicar o facto de ser 0.5 a probabilidade de obter um salto maior que o valor médio.



Portanto, basta subtrair a 0.5 a probabilidade corres-pon-dente ao intervalo definido pelo valor médio e por 7.55.

A probabilidade de o atleta se classificar para a fase seguinte é de 16.6%.

3. A probabilidade de bater o recorde nacional é ligeiramente inferior a 2%.



Exemplo 11 - Considere os seguintes dados que dizem respeito à altura de 100 indivíduos do sexo masculino:

127.5	143.3	150.9	155.2	159.5	163.7	168.2	174.3	178.0	186.7
131.2	144.4	151.2	155.5	159.6	164.5	168.7	174.6	178.1	186.7
133.2	145.8	151.3	156.5	160.1	164.6	169.8	175.1	178.5	189.9
137.3	145.8	152.3	157.1	160.2	165.0	171.7	175.4	181.4	191.0
138.4	147.0	152.4	157.3	160.3	165.4	171.8	175.7	181.7	193.3
138.9	148.3	152.7	158.2	160.5	166.1	172.0	176.4	183.0	193.8
139.6	148.7	153.4	158.6	161.4	166.7	172.3	176.4	183.6	194.6
140.8	149.2	154.0	158.9	161.5	167.0	173.1	177.4	184.1	196.9
141.6	149.6	154.6	159.3	162.2	167.0	173.4	177.4	184.6	198.1
142.2	150.3	155.2	159.4	163.7	167.1	173.9	177.9	185.1	200.1

Calcule a média $\bar{x}$ e o desvio padrão s. Represente graficamente os dados sob a forma de um histograma. Tendo em conta a forma do histograma, aproximadamente quantos elementos. da amostra é que espera estejam compreendidos no intervalo [$\bar{x}$-s, $\bar{x}$+s]?

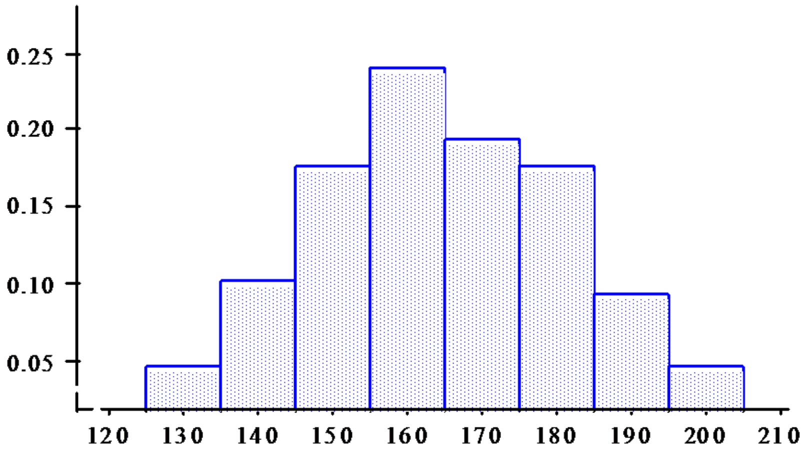
Resolução:

A média $\bar{x}$ = 164.4 e o desvio padrão s = 16.2.

Considerando a seguinte tabela de frequências

Classes	Freq. abs.	Freq.rel.
[125, 135[	3	0.03
[135,145[	9	0.09
[145, 155[	17	0.17
[155, 165[	24	0.24
[165, 175[	19	0.19
[175, 185[	17	0.17
[185, 195[	8	0.08
[195, 205[	3	0.03

desenhámos o histograma:



Tendo em conta a forma apresentada pelo histograma, sugere-se para o modelo da população subjacente à amostra o modelo normal com valor médio e desvio padrão aproximadamente igual a 164.4 e 16.2, respectivamente. Então esperamos que aproximadamente 2/3 dos elementos da amostra, isto é, 66 ou 67 valores estejam no intervalo (148.2, 180.6). Considerando a tabela dos dados verificamos que este intervalo contém 68 elementos.

Aplicações do Modelo Normal

Muitos fenómenos da vida real podem ser modelados, quer exactamente, quer de forma aproximada pelo modelo Normal. Algumas dessas situações são:

- Velocidade a que os carros transitam na auto-estrada Lisboa-Porto, ao km 100.
- Peso do açúcar contido nas embalagens cheias por determinada máquina, programada para encher 1kg.
- Consumo mensal de electricidade nos lares de determinada localidade, durante o Inverno.
- Classificações obtidas pelos candidatos a uma determinada Universidade no ano lectivo 1999-2000 na disciplina de História.
- Salário mensal auferido pelos profissionais da indústria da hotelaria.
- Altura dos portugueses adultos do sexo masculino.
- Peso das mulheres portuguesas.
- Diâmetro das jantes de automóveis, de uma determinada marca, fabricadas por uma determinada máquina.
- Quantidade de líquido nas latas de cerveja, em que é pressuposto conterem 33 cl.
- Notas obtidas a Biologia, no exame nacional de 1998-1999 (em que se supõe ser uma disciplina sem problemas).

Actividade – Distribuição de amostragem da média

Além de termos observado que a média dá uma boa aproximação para o valor médio, que outras propriedades terá a média, para ser utilizada com tanta frequência?

Consideremos a população **X** constituída por todos os possíveis resultados que se obtêm admitindo que se lança um dado infinitas vezes. A distribuição de probabilidades desta população tem o seguinte aspecto.

X=x	P(X=x)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

Esta distribuição tem valor médio igual a **3.5** e desvio padrão igual a **1.708**.

Utilizando o processo descrito na actividade anterior para gerar números (pseudo) aleatórios com uma determinada distribuição, obtenha 4 observações desta população e calcule a média das observações obtidas. Repita este processo 100 vezes:

Os valores obtidos para as médias das 100 amostras de 4 observações apresentam-se na tabela seguinte, nas colunas assinaladas com a indicação de n=4:

n=4	n=5	n=6	n=4	n=5	n=6	n=4	n=5	n=6	n=4	n=5	n=6	n=4	n=5	n=6
1.75	2	2	2.75	2.8	2.833	3.25	3.4	3.333	3.5	3.6	3.5	4	4	4
1.75	2	2	3	2.8	2.833	3.25	3.4	3.333	3.5	3.6	3.5	4.25	4	4
2	2	2	3	3	2.833	3.25	3.4	3.333	3.75	3.6	3.5	4.25	4	4

2	2.2	2	3	3	3	3.25	3.4	3.333	3.75	3.6	3.5	4.25	4	4
2	2.2	2.5	3	3	3	3.25	3.4	3.333	3.75	3.6	3.667	4.25	4	4.167
2.25	2.2	2.5	3	3	3	3.25	3.4	3.333	3.75	3.6	3.667	4.25	4	4.167
2.25	2.4	2.5	3	3	3	3.25	3.4	3.333	3.75	3.6	3.667	4.25	4	4.167
2.25	2.4	2.5	3	3	3	3.25	3.4	3.333	3.75	3.8	3.667	4.25	4.2	4.167
2.25	2.4	2.667	3	3	3	3.25	3.4	3.333	3.75	3.8	3.667	4.25	4.2	4.333
2.5	2.6	2.667	3	3	3	3.25	3.4	3.333	3.75	3.8	3.667	4.25	4.2	4.333
2.5	2.6	2.667	3	3	3	3.5	3.4	3.5	4	3.8	3.833	4.25	4.4	4.333
2.5	2.6	2.667	3	3.2	3.167	3.5	3.4	3.5	4	3.8	3.833	4.5	4.4	4.333
2.5	2.6	2.667	3.25	3.2	3.167	3.5	3.4	3.5	4	3.8	3.833	4.5	4.4	4.5
2.75	2.6	2.667	3.25	3.2	3.167	3.5	3.6	3.5	4	3.8	3.833	4.5	4.4	4.5
2.75	2.8	2.833	3.25	3.2	3.167	3.5	3.6	3.5	4	3.8	3.833	4.75	4.6	4.5
2.75	2.8	2.833	3.25	3.2	3.167	3.5	3.6	3.5	4	3.8	3.833	4.75	4.6	4.667
2.75	2.8	2.833	3.25	3.2	3.167	3.5	3.6	3.5	4	3.8	3.833	4.75	4.6	4.667
2.75	2.8	2.833	3.25	3.2	3.333	3.5	3.6	3.5	4	4	3.833	5	4.8	4.667
2.75	2.8	2.833	3.25	3.2	3.333	3.5	3.6	3.5	4	4	3.833	5.25	5	4.667
2.75	2.8	2.833	3.25	3.2	3.333	3.5	3.6	3.5	4	4	4	5.25	5	4.667

Média de 4 observações

A média e o desvio padrão da amostra são respectivamente **3.4** e **0.75**.

Repetimos o processo, mas agora com amostras de dimensão 5 e 6, tendo obtido as seguintes distribuições de frequência:

Média de 5 observações

A média e o desvio padrão da amostra são respectivamente **3.4** e **0.67**.

Média de 6 observações

A média e o desvio padrão da amostra são respectivamente **3.4** e **0.64.**

Repetimos o processo para amostras de dimensão 15, isto é gerámos 100 amostras de dimensão 15, calculámos a média de cada uma delas e obtivemos uma amostra de dimensão 100. Tendo em consideração a grande quantidade de valores distintos que surgem na amostra, optámos por construir um histograma, em vez de um diagrama de barras:

A média e o desvio padrão da amostra são respectivamente **3.45** e **0.42**.

Nesta representação torna-se mais evidente a semelhança do comportamento da distribuição da média com o de uma variável com distribuição normal.

Esta propriedade, consequência do Teorema Limite Central, legitima a importância atribuída à distribuição normal. Efectivamente na vida real surgem muitas situações em que somos levados a considerar médias ou somas de um número considerável de variáveis.

Gostaríamos também de chamar a atenção para outras propriedades da média, sugeridas pelo exemplo, mas susceptíveis de demonstração:

- a distribuição da média tem um **valor médio** que coincide com o valor médio da população de onde se retirou a amostra;
- a **variabilidade** da média é inferior à da população e diminui à medida que se aumenta a dimensão da amostra.

Esta última propriedade também tem algumas consequências práticas importantes. Por exemplo, quando pretendemos pesar um objecto, sabemos que a este peso vem sempre associado um erro aleatório devido a múltiplas causas, nomeadamente deficiências do aparelho de pesagem e deficiências de leitura. Assim, podemos dizer que o peso se comporta como uma variável aleatória que assume valores dentro de um certo intervalo, dependente da precisão da balança, e não só. Então, quando pretendemos obter com algum rigor o peso de um objecto, deve-se utilizar a seguinte estratégia: fazer várias pesagens e depois considerar a média das pesagens obtidas. Este processo garante-nos que vamos obter um valor que está mais perto do valor médio da variável peso, que não é mais do que o verdadeiro peso do objecto, já que a variabilidade apresentada pela média é inferior à da própria população.

Capítulo 3

Análise Combinatória e Probabilidade Laplaciana

3.1 – Introdução

Com o cálculo combinatório podemos contar diferentes modos de agrupar certos objectos ou de percorrer determinados caminhos, usando maneiras sistemáticas de proceder. Por vezes torna-se útil recorrer a modelos matemáticos quando a contagem directa se torna muito demorada devido ao elevado número de possibilidades em causa numa determinada situação. Em teoria das probabilidades trabalhamos com frequência com espaços de resultados S com um número finito de elementos os quais podem ser considerados como tendo igual possibilidade de se observar. Em tais situações estamos em condições de usar a definição clássica de Laplace, para atribuição de probabilidades aos acontecimentos associados ao espaço de resultados S. O cálculo da probabilidade de qualquer acontecimento A do espaço de acontecimentos passa assim pela enumeração de todos os casos (resultados elementares) favoráveis à realização desse acontecimento. É aqui que resultados conhecidos de análise combinatória se tornam num precioso auxílio para a efectivação desses cálculos.

Para introduzir as ideias que estão por detrás da análise combinatória podemos começar com o seguinte exemplo:

Exemplo 1 - Um restaurante oferece um menu especial formado por duas sopas diferentes (S1 - sopa de legumes e S2 - creme de marisco), e por três pratos principais (P1 - frango assado, P2 - febras de porco e P3 - peixe grelhado). De quantos modos diferentes podem ser servidas estas refeições?

Designemos o conjunto das sopas por S = {S1, S2} e o conjunto dos pratos principais por P = {P1, P2, P3}. Uma refeição consiste de uma sopa e de um prato principal, ou seja, é um par (Si, Pj) formado por um elemento do 1º conjunto e por um elemento do 2º conjunto. Uma refeição constitui assim um *elemento do produto cartesiano* de S e P, ou seja do conjunto

S x P = {(S1, P1), (S1, P2), (S1, P3), (S2, P1), (S2, P2), (S2, P3)}

o qual tem 6 elementos, ou seja # (S x P) = #S x #P.

Um princípio básico da análise combinatória e que vai ser de grande utilidade na dedução dos resultados que se vão apresentar, diz respeito precisamente à relação entre a cardinalidade, m, do produto cartesiano de k conjuntos $A_1, A_2, ..., A_k$ e as suas respectivas cardinalidades $n_1, n_2, ..., n_k$.

> *Princípio básico de Análise Combinatória*: Sejam $A_1, A_2, ..., A_k$, k conjuntos de cardinalidades $n_1, n_2, ..., n_k$, respectivamente. A cardinalidade do produto cartesiano $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_k = \{(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik}), i = 1, ..., n_j, j = 1, ..., k\}$ é dada pelo produto das cardinalidades dos conjuntos que o constituem, isto é
>
> $\# A = \# A_1 \times \# A_2 \times ... \times \# A_k$, ou seja $m = n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$.

Demonstração: Este resultado pode ser facilmente demonstrado por indução.

- Comecemos por mostrar que é válido para $k = 2$. Para formar um par em que o 1º elemento pertence a A_1 e o segundo a A_2, podemos proceder do seguinte modo: fixamos o 1º elemento. Ele pode formar um par com cada elemento de A_2. Ele entra assim em n_2 pares. Como há n_1 possíveis 1ºs elementos, há no total $n_1 \times n_2$ pares, ou seja o produto cartesiano de A_1 e A_2 tem cardinalidade $n_1 \times n_2$. Tem-se assim $\#(A_1 \times A_2) = \# A_1 \times \# A_2$.
- Admitamos que a proposição é valida para $k = n$. Então $\#(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) = \# A_1 \times \# A_2 \times ... \times \# A_n$. Provemos que ela é válida para $k = n + 1$
- Para cada elemento do produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times ... \times A_{n+1}$ existe um e um só elemento do produto cartesiano $(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) \times A_{n+1}$, isto é, existe uma correspondência biunívoca entre estes dois conjuntos. Consequentemente eles têm a mesma cardinalidade. Assim, tem-se, como se pretendia,
- $\#(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \times A_{n+1}) = \#(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n) \times \# A_{n+1} = \# A_1 \times \# A_2 \times ... \times \# A_n \times \# A_{n+1}$

Exemplo 2 - Se tiver 3 calças, 2 camisas e 4 gravatas de quantas maneiras diferentes me posso vestir, vestindo sempre uma peça de cada categoria?
Para responder a esta questão bastará assim calcular 3x2x4 = 24.

3.2 - Arranjos completos, arranjos simples, permutações e combinações

3.2.1 - População e amostra ordenada

Suponhamos que o espaço de resultados, correspondente a uma determinada experiência aleatória, tem *N* elementos distintos, isto é, $S = \{w_1, ..., w_N\}$. Para facilidade de linguagem e utilização na teoria das probabilidades dos conceitos de análise combinatória que vamos apresentar, designamos também este conjunto por *população*. Duas *populações* são distintas se tiverem pelo menos um elemento distinto.

A qualquer sequência (énuplo) $(w_{i1}, ..., w_{in})$[1] de *n* elementos de S damos o nome de *amostra ordenada* de dimensão *n*. A w_{ir} damos o nome de *r-ésima componente*, podendo *r* variar de 1 a *n*.

Para que duas amostras ordenadas $(w_{i1}, ..., w_{in})$ e $(w_{j1}, ..., w_{jn})$ sejam idênticas é preciso que sejam iguais componente a componente, isto é, $w_{ir} = w_{jr},\ r = 1,..,n$.

Exemplo 3 - Se tivermos uma urna com 6 bolas idênticas (no formato) numeradas de 1 a 6 e considerarmos uma experiência aleatória que consiste em retirar uma bola da urna e observar o número da bola saída, o espaço de resultados dessa experiência poderá escrever-se como: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Se repetirmos esta experiência 3 vezes, obtemos uma amostra de dimensão 3.
Uma amostra ordenada de dimensão 3 possível é, por exemplo, (1, 2, 3). Isto significaria que a 1ª bola extraída teria o nº 1, a segunda o nº 2 e a terceira o nº 3. A ordenação corresponde pois à ordem de extracção. Note-se que esta amostra ordenada será distinta da amostra (3, 1, 2), embora contenham ambas os mesmos elementos. A ordem por que os elementos aparecem é pois importante.

[1] Passaremos a representar uma amostra ordenada usando parêntesis curvo e os conjuntos com chavetas. Assim , por exemplo, (1,2,3) é uma amostra ordenada e {1,2,3} representa o conjunto destes três elementos.

3.2.2 - Arranjos completos e arranjos simples

Consideremos uma experiência que consiste em escolher ao acaso *n* elementos de S. Para facilidade de exposição podemos imaginar que os elementos são retirados um a um. Assim, de cada vez que um elemento é retirado da população, há dois modos possíveis de proceder: ou o elemento é reposto na população após se anotar o resultado (isto é qual o elemento retirado) ou não é. No primeiro caso diz-se que a amostragem é feita *com reposição* e no segundo caso diz-se que a amostragem é feita *sem reposição*. Assim, a amostragem com reposição tem como consequência a possibilidade de conduzir a sequências em que os elementos se podem repetir e a amostragem sem reposição a sequências em que não há repetição de elementos.

Exemplo 3 (cont.) - Neste exemplo quantas serão as amostras possíveis de dimensão 3 (com reposição e sem reposição)?
Uma maneira fácil de "contar" é pensar do seguinte modo:

Com reposição

- O 1º número saído pode ser qualquer. Há assim 6 hipóteses para o 1º número.
- Para cada número que sai na 1ª extracção há 6 números possíveis para o acompanhar na 2ª extracção. Temos assim um total de $6 \times 6 = 36$ possibilidades após a 2ª extracção.
- Para cada um dos 36 pares possíveis que resultam das duas primeiras extracções há 6 números possíveis para a terceira extracção. Há assim um total de $36 \times 6 = 216$ triplos possíveis.

Generalizando para *N* - dimensão do espaço de resultados e para *n* - dimensão da amostra, verificamos então que o número possível de amostras de dimensão *n*, com reposição, que se pode extrair é $\underbrace{N \times N \times ... \times N}_{n \text{ vezes}} = N^n$.

Este resultado era de esperar se atendermos ao princípio básico da Análise Combinatória atrás enunciado. Com efeito, quando a amostragem é feita com reposição, uma amostra ordenada de dimensão *n*, não é mais do que um elemento do produto cartesiano $\underbrace{S \times S \times ... \times S}_{n \text{ vezes}}$

Sem reposição:

- O 1º número saído pode ser qualquer. Há assim 6 hipóteses para o 1º número.
- Para cada número que sai na 1ª extracção há apenas 5 números possíveis para o acompanhar na 2ª extracção. Temos assim um total de 6x5=30 possibilidades após a 2ª extracção.
- Para cada um dos 30 pares possíveis que resultam das duas primeiras extracções há já só 4 números possíveis para a terceira extracção. Há assim um total de 30x4=120 triplos possíveis para as três extracções.

Este resultado também é obviamente consequência do princípio básico da Análise Combinatória. Com efeito, a 1ª componente do triplo é um elemento de um conjunto de cardinalidade 6. Após a 1ª extracção, o conjunto de onde se extrai a 2ª componente tem cardinalidade 5 e 3ª componente pertence a um conjunto com cardinalidade 4, já que houve duas extracções.

Temos então o seguinte 1º resultado de Análise Combinatória:

Resultado 1:
Para uma população de *N* elementos e um determinado valor *n* o número de amostras distintas de dimensão *n* que se pode obter numa extracção *com reposição* é igual a N^n e *sem reposição* (com $n \leq N$) é igual a ${}^{N}A_n = N \times (N-1) \times \ldots \times (N-n+1)$

Este resultado conduz-nos às seguintes definições:

Arranjos completos (Arranjos com repetição):
Ao número de modos distintos de extrair ordenadamente e com reposição, *n* elementos de um conjunto com *N* elementos, dá-se o nome de arranjos completos de *N*, *n* a *n* e representa-se por ${}^{N}A'_n$. Esse número é igual a N^n.

Os arranjos completos contam assim o número de maneiras possíveis de arranjar, com possíveis repetições, sequências de *n* elementos de um conjunto de cardinalidade *N*.

- Tem-se então ${}^{N}A'_n = N^n$.

Exemplo 4 - Uma pessoa tem três possibilidades de ir para o trabalho: a pé, de metro ou de carro. De quantas maneiras diferentes é que ele pode viajar durante os cinco dias da semana?
Resolução: O nosso conjunto original tem três elementos, isto é, S = {ir a pé, ir de metro, ir de carro}. A sequência (amostra ordenada) que pretendemos construir tem dimensão 5. A ordem aqui interessa. Podemos estabelecer como 1º elemento da sequência a 2ª feira, como 2º elemento a 3ª feira, etc. Pode haver, obviamente, repetição (aliás tem de haver já que *n* > *N*). Temos então como solução ${}^{3}A'_{5} = 3^{5} = 243$.

Este exemplo serve para chamar a atenção que, quando há repetição de elementos, a amostra pode ter dimensão superior à dimensão da população, isto é pode ter-se *n* > *N*.

Arranjos simples

Ao número de modos distintos de extrair ordenadamente e sem reposição, *n* elementos de um conjunto com *N* elementos, dá-se o nome de arranjos simples *N*, *n* a *n* e representa-se por ${}^{N}A_{n}$. Esse número é igual a $N \times (N-1) \times \ldots \times (N-n+1)$.

Os arranjos simples contam assim o número de maneiras possíveis de arranjar, sem repetições, sequências de *n* elementos de um conjunto de cardinalidade *N*.

- Tem-se então ${}^{N}A_{n} = N \times (N-1) \times \ldots \times (N-n+1)$.

Note-se que agora tem de se ter sempre *n* ≤ *N*.

Exemplo 5 - Numa turma com 20 alunos a Directora de Turma quer escolher três para os três cargos delegado, sub-delegado e suplente. De quantas maneiras distintas é que ela pode fazer a escolha?
Resolução: Para responder a esta questão temos que atender ao seguinte: 1º) a escolha tem de ser feita sem repetição (nenhum aluno pode ocupar simultaneamente dois cargos distintos) e 2º) a ordem por que os alunos são escolhidos é importante. Ter a Joana para delegado, o Filipe para sub-delegado e o Pedro por suplente, não é idêntico a ter o Filipe para delegado, a Joana para sub-delegado e o Pedro para suplente, por exemplo. Assim, o problema que temos é o de encontrar o número de arranjos simples de 20 elementos 3 a 3, ou seja a professora tem 20x19x18=6840 maneiras diferentes de fazer a escolha.

3.2.3 - Permutações

Podemos perguntar ainda para o exemplo 3 que temos vindo a analisar: Quantas amostras ordenadas distintas de dimensão 3 é que se podem obter com os números 1, 2 e 3? Agora com um número tão pequeno até as podemos discriminar. Temos (1, 2, 3); (1, 3, 2); (2, 1, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2), (3, 2, 1), ou seja 6. Pensemos que para responder a esta questão não nos interessa os outros elementos de S. Apenas os três seleccionados, isto é, só nos interessa saber qual o número de amostras ordenadas distintas de dimensão 3 que podemos construir a partir de 3 elementos. A resposta a esta questão aparece assim como consequência imediata do resultado 1. Temos então:

Como consequência imediata do resultado 1 vem:

> *Resultado 2* (Permutações):
> O número de amostras ordenadas distintas, de dimensão *n* que se pode obter, sem reposição, de um subconjunto de dimensão *n* de S é ${}^{n}A_{n} = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$. Este número costuma representar-se por $n!$ (lê-se factorial de *n*)

O factorial de *n* conta assim o número de maneiras de arranjar todos os elementos de um conjunto de cardinalidade *n* numa sequência sem repetições. Representa pois o número de permutações que é possível fazer com *n* elementos distintos. Este número é igual a $n \times (n-1) \times \ldots \times 1$.

- Tem-se então $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 1$

Podemos escrever os arranjos simples de *N*, *n* a *n* em termos da notação factorial do seguinte modo:

$$\begin{aligned} {}^{N}A_{n} &= N \times (N-1) \times \ldots \times (N-n+1) \\ &= \frac{N \times (N-1) \times \ldots \times (N-n+1) \times (N-n) \times \ldots \times 1}{(N-n) \times \ldots \times 1} \\ &= \frac{N!}{(N-n)!} \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \ldots, N \end{aligned}$$

De modo a que esta igualdade se possa escrever para *n*=*N* convenciona-se que **0!=1.**

Exemplo 6 - Um grupo de amigos resolveu arranjar um código para comunicarem entre eles. Concordaram que cada mensagem ficaria associada a uma sequência de dois dígitos (0 e 1) e duas letras (X e Y), sem possibilidade de repetição de letras ou dígitos. O código pode começar por uma letra ou por um dígito, e as letras (ou os dígitos) podem ser seguidas ou intercaladas por dígitos (ou letras). Quantas mensagens é que eles podem codificar de acordo com este esquema?.
Resolução: O que se pretende determinar é o número de permutações de 4 elementos, ou seja 4!. Assim eles podem codificar 24 mensagens.

Exemplo 6 (Cont.) - Como os amigos acharam que o número de mensagens era pequeno, resolveram permitir a repetição de letras ou/e dígitos, mas acordaram que o código tinha de ser constituído por duas letras e por dois dígitos, mantendo as regras anteriores. Quantas mensagens é que eles conseguem agora codificar?
Resolução: O número de mensagens é agora igual a

$$4! + 2x3!x4 + 6x4 = 96$$

3.2.4 - Amostras não ordenadas: Subconjuntos de um conjunto. Combinações

Em muitas situações pode não interessar a ordem por que aparecem os elementos na amostra. Por exemplo, a amostragem sem reposição pode ser feita retirando os *n* elementos todos de uma vez e consequentemente não podemos falar numa ordem, no sentido de podermos dizer qual o primeiro elemento retirado, qual o segundo, etc. Assim pode falar-se em **amostra não ordenada**.

Uma **amostra não ordenada** de dimensão *n* composta pelos elementos $w_{ir},\ r=1,...,n$ identifica-se pois com o **subconjunto** de S formado por esses elementos. Os resultados de análise combinatória que nos interessam nestas circunstâncias são então os respeitantes à enumeração de subconjuntos de um conjunto. Assim, por exemplo, as amostras ordenadas (3,1,2) ou (1,2,3) resultam na mesma amostra não ordenada que representaremos por {1,2,3}, ou seja o conjunto formado por aqueles três elementos.

O problema que agora se põe é o seguinte:
Como é que podemos "contar" o número de subconjuntos de dimensão *n* (com *n*=1,...,*N*) que se podem formar de um conjunto S de dimensão *N*?

Exemplo 3 (Cont.) - Voltemos ao exemplo que temos vindo a analisar e suponhamos que retiramos de uma só vez 3 bolas da urna a qual contém 6 bolas numeradas de 1 a 6. Queremos saber em quantos modos diferentes pode resultar esta extracção. Queremos pois saber o número *x* de subconjuntos de dimensão 3 que podemos formar a partir de um conjunto com 6 elementos.

- Por um lado já sabemos que o número de amostras ordenadas, sem reposição, que podemos retirar é ${}^{6}A_{3} = 6 \times 5 \times 4 = 120$
- Como para formar um conjunto não interessa a ordem por que aparecem os elementos, e como já sabemos que para cada conjunto de 3 bolas o número de amostras ordenadas que podemos constituir com elas é 3!, conclui-se facilmente que o número x pedido é tal que

$$ {}^{6}A_{3} = x \times 3! $$

ou seja $x = \frac{{}^{6}A_{3}}{3!}$. Costuma representar-se este número pelo símbolo $\binom{6}{3}$, ou por ${}^{6}C_{3}$ e lê-se combinações de 6, 3 a 3.

Podemos facilmente, procedendo de um modo sistemático, discriminar os subconjuntos de dimensão 3 que se podem retirar do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

{1, 2, 3}	{1, 2, 4}	{1, 2, 5}	{1, 2, 6}
{1, 3, 4}	{1, 3, 5}	{1, 3, 6}	
{1, 4, 5}	{1, 4, 6}		
{1, 5, 6}			
{2, 3, 4}	{2, 3, 5}	{2, 3, 6}	
{2, 4, 5}	{2, 4, 6}		
{2, 5, 6}			
{3, 4, 5}	{3, 4, 6}		
{3, 5, 6}			
{4, 5, 6}			

São no total 20. Ora, fazendo os cálculos anteriores obtemos

$$ x = \binom{6}{3} = \frac{{}^{6}A_{3}}{3!} = \frac{120}{6} = 20. $$

Podemos assim estabelecer o seguinte resultado

Resultado 3 (Combinações):
O número de subconjuntos de dimensão *n* que se podem formar de um conjunto S de dimensão *N* é dado por $\binom{N}{n} = \frac{{}^{N}A_n}{n!}$.[2]

Dito de outro modo, o número de amostras não ordenadas de dimensão *n* que se podem retirar, sem reposição, de uma população S de dimensão *N* é dado por $\binom{N}{n} = \frac{{}^{N}A_n}{n!}$. A este número dá-se o nome de **combinações de *N*, *n* a *n*.**

Expansão Factorial

Note-se que usando a fórmula para os arranjos em termos da notação factorial, se obtém uma nova fórmula para o cálculo das combinações, nomeadamente:

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!n!}$$

Esta igualdade é chamada de Expansão Factorial.

Exemplo 7 - A Matilde, mãe de 4 filhos (Joana, Raquel, Marco e Filipe), escolhe sempre dois para a ajudarem nas tarefas do dia a dia. De quantos modos distintos é que ela pode fazer a escolha?
Resolução: Como não interessa a ordem por que os filhos são escolhidos, o problema da mãe consiste em enumerar os conjuntos de 2 filhos que pode formar a partir dos 4. Esse número é $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$. Com efeito ela pode ter os seguintes pares de filhos para a ajudarem (Joana, Raquel), (Joana, Marco), (Joana, Filipe), (Raquel, Marco), (Raquel, Filipe), (Marco, Filipe).

Exemplo 7 (Cont.) - Durante o mês de Agosto a Teresa, prima dos 4 irmãos, vai sempre para casa da Matilde, que como é lógico a inclui no grupo de ajudantes. Com a ajuda do resultado anterior, pode dizer de quantos modos distintos é que os cinco se podem agrupar aos pares para executar as tarefas diárias?

[2] Por razões que veremos mais adiante também se costuma designar as quantidades $\binom{N}{n}$ por coeficientes binomiais

Resolução: Ora, o número de pares em que a Teresa não está presente é 6, como já tínhamos visto. O número de pares em que a Teresa está presente é claramente 4, já que ela pode acompanhar qualquer primo. Assim o número pretendido é 6+4=10. Com efeito, se não usássemos o resultado anterior teríamos $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$.

Lei de Pascal

Agora podemos generalizar o resultado do exemplo anterior para quaisquer N e n. É fácil de perceber que se tem a seguinte igualdade:

$$\binom{N}{n-1} + \binom{N}{n} = \binom{N+1}{n} \quad \text{com } n = 1,\ldots,N$$

Esta é a chamada Lei de Pascal, a qual é fácil de estabelecer.

Com efeito, para obtermos o número de suconjuntos com n elementos que podemos obter de um conjunto de *N*+1 elementos, podemos raciocinar do seguinte modo:

- Seja x o elemento do conjunto com *N*+1 elementos que não pertence ao conjunto de *N* elementos.
- Podemos subdividir os subconjuntos de n elementos do conjunto com *N*+1 elementos em duas categorias: subconjuntos que contêm x e subconjuntos que não contêm x.
- Do conjunto com *N* elementos, (que não contém x), podemos formar $\binom{N}{n}$ subconjuntos de n elementos, dos quais nenhum contém obviamente o elemento retirado x.
- Para obter os subconjuntos de n elementos que contêm x, basta juntá-lo a todos os subconjuntos com *n*-1 elementos daquele conjunto com *N* elementos. Esses são em número de $\binom{N}{n-1}$.

Assim se chega ao resultado pretendido.

Suponhamos agora que vamos calcular todas as combinações de *N* elementos tomados *n* a *n*, fazendo variar *N* desde 0 e *n* desde 0 a *N*. Ao procedermos deste modo para vários valores de *N*, podemos fazer a sua representação numa forma tabular. Obtém-se aquilo que se costuma designar por *triângulo de Pascal*

$$\binom{0}{0}=1$$

$$\binom{1}{0}=1 \quad \binom{1}{1}=1$$

$$\binom{2}{0}=1 \quad \binom{2}{1}=2 \quad \binom{2}{2}=1$$

$$\binom{3}{0}=1 \quad \binom{3}{1}=3 \quad \binom{3}{2}=3 \quad \binom{3}{3}=1$$

$$\binom{4}{0}=1 \quad \binom{4}{1}=4 \quad \binom{4}{2}=6 \quad \binom{4}{3}=4 \quad \binom{4}{4}=1$$

$$\binom{5}{0}=1 \quad \binom{5}{1}=5 \quad \binom{5}{2}=10 \quad \binom{5}{3}=10 \quad \binom{5}{4}=5 \quad \binom{5}{5}=1$$

....

Repare-se que cada termo do triângulo de Pascal se obtém como a soma dos dois termos que lhe estão acima. Esta é realmente a leitura da Lei de Pascal que temos vindo a analisar. Por exemplo, considerando o terceiro elemento da última linha, 10, ele obtém-se como sendo a soma do 2º e 3º termos da penúltima linha, ou seja 4+6, e assim sucessivamente

Lei da Simetria

Outra propriedade que observamos ao analisar o triângulo de Pascal é a simetria. Note-se que cada elemento do triângulo é simétrico em relação ao elemento(ou elementos) central(is) da mesma linha. Esta simetria traduz-se algebricamente pela seguinte igualdade (cuja verificação é trivial)

$$\binom{N}{n}=\binom{N}{N-n}.$$

Esta é a chamada Lei da Simetria.

Com estes resultados e usando o método de indução é fácil agora chegar ao resultado relativo ao desenvolvimento do binómio de Newton.

Teorema Binomial: Para quaisquer a e b reais e qualquer inteiro positivo *N* é válida a seguinte igualdade

$$\begin{aligned}(a+b)^N &= \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^{N-k}b^k \\ &= \binom{N}{0}a^N + \binom{N}{1}a^{N-1}b + \ldots + \binom{N}{k}a^{N-k}b^k + \\ &+\ldots+\binom{N}{N-1}ab^{N-1} + \binom{N}{N}b^N\end{aligned}$$

Demonstração (por indução):

A igualdade é válida para *N* = 1, como é fácil de verificar .

Suponhamos que é válida para *N*. Vamos mostrar que continua válida para *N*+1.

Tem-se:

$$(a+b)^{N+1} = (a+b)^N(a+b) = (\sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}a^{N-k}b^k)(a+b) =$$

$$= \binom{N}{0}a^{N+1} + \binom{N}{0}a^Nb + \binom{N}{1}a^Nb + \binom{N}{1}a^{N-1}b^2 + \binom{N}{2}a^{N-1}b^2 + \binom{N}{2}a^{N-2}b^3$$

$$+\ldots+\binom{N}{N-1}a^2b^{N-1} + \binom{N}{N-1}ab^N + \binom{N}{N}ab^N + \binom{N}{N}b^{N+1}$$

O resultado pretendido segue imediatamente, usando o facto de que $\binom{N}{0}=1$, $\binom{N}{N}=1$ para qualquer *N* e atendendo à igualdade $\binom{N}{n-1}+\binom{N}{n}=\binom{N+1}{n}$.

Usando este teorema podemos agora responder facilmente à seguinte questão: Quantos subconjuntos (excluindo o conjunto vazio) podemos então formar a partir de um conjunto com *N* elementos?

Como para cada dimensão *n* podemos formar $\binom{N}{n}$ subconjuntos distintos, assim podemos formar no total $\sum_{n=1}^{N}\binom{N}{n}$ subconjuntos. Fazendo $a=1$, $b=1$ na fórmula do binómio de Newton, obtém-se $(1+1)^N = 2^N = \sum_{n=0}^{N}\binom{N}{n}$. Temos portanto $2^N - 1$ subconjuntos.

Temos assim o seguinte resultado:

Resultado 4:
Há $2^N - 1$ amostras não ordenadas distintas (de qualquer dimensão *n* com, 1≤ *n* ≤*N*) que se podem formar a partir dos elementos de um conjunto S de cardinalidade *N*. (A dimensão de uma amostra é um número natural, portanto exclui-se o conjunto vazio como subconjunto possível).

Repare-se que este resultado é equivalente a afirmar que, o conjunto das partes de um conjunto de cardinalidade *N*, tem cardinalidade 2^N.

Actividade

Num jogo de bridge as 52 cartas são distribuídas em número igual por 4 jogadores. Uma mão corresponde assim a 13 cartas. Quantas mãos diferentes é que se pode conseguir para um jogador?
Resolução: Claramente a ordem por que as cartas são distribuídas não tem interesse. Também é claro que não pode haver repetição de cartas. Assim o número pretendido é dado por $\binom{52}{13} = \frac{52!}{13!39!} = 635.013.559.600$.

Actividade

4 amigos, João, Joana, Francisco e Francisca encontram-se na praia e cumprimentam-se com um aperto de mão. Quantos apertos de mão são trocados?
Resolução: É fácil de contar…O João dá um aperto de mão à Joana, ao Francisco e à Francisca. A Joana dá um aperto de mão ao Francisco e à Francisca (note-se que o aperto de mão dado ao João já foi contado!). O Francisco dá um aperto de mão à Francisca. Assim foram trocados 6 apertos de mão. Mas façamos as contas. Como não interessa a ordem, como já observámos, (e ninguém dá um aperto de mão a si próprio!), temos de calcular $\binom{4}{2}$, ou seja 6, como já tínhamos visto.

Actividade

Uma pessoa ganha no jogo do totoloto se acertar nos 6 números extraídos dos 49 em jogo. A extracção é como se sabe feita sem reposição e as bolas são numeradas de 1 a 49. Também se sabe que a ordem por que as bolas são extraídas não interessa. Se cada aposta custa 50$00, quanto dinheiro é que eu gastava se quisesse considerar todas as hipóteses possíveis?

Resolução: O número de modos que há de escolher 6 números de entre os 49 é claramente dado por $\binom{49}{6}$ = 13.983.815. Portanto teria de gastar 699.190,75 contos!!! Não merece a pena...

Combinações com reposição.[3]

Também se pode por a questão: numa amostragem com reposição, quantas amostras não ordenadas de dimensão *n* é que podemos formar a partir de uma população de dimensão *N*?

Exemplo 8 - Suponhamos que temos uma urna com 6 bolas numeradas de 1 a 6 e extraímos 3 bolas da urna com reposição. De quantos modos diferentes é que podemos fazer esta extracção se a ordem por que as bolas aparecem não interessar?

Para resolvermos esta questão podemos pensar assim:

- As 3 bolas podem ser todas iguais. Isto corresponde a escolher uma bola das 6 e repetir. Temos assim 6 possibilidades, ou seja $\binom{6}{1}$.
- As bolas podem ser duas iguais e uma diferente. Isto corresponde a escolher 2 das seis, sem reposição e repetir uma delas, ou seja, das duas saídas escolher uma. Então temos (apelando novamente ao princípio fundamental da análise combinatória) $\binom{6}{2}\binom{2}{1}$ = 15 possibilidades.
- As bolas podem ser todas diferentes. Isto corresponde a escolher 3 bolas das 6 sem reposição, ou seja há $\binom{6}{3}$ = 20 possibilidades.

Temos então no total $\binom{6}{1}$ + $\binom{6}{2}\binom{2}{1}$ + $\binom{6}{3}$ = 56 possibilidades.

Há, no entanto, outro raciocínio possível. Como a extracção é feita com reposição e ao retirar 3 bolas são feitas, para todos os efeitos, duas reposições (a terceira já não conta pois não vamos voltar a fazer uma extracção) o problema seria equivalente à situação em que faríamos uma extracção de três bolas sem reposição de um conjunto com 6+2=8 bolas. Teríamos assim um número de possibilidades igual a $\binom{8}{3}$ que é precisamente igual a 56.

[3] Este assunto não faz parte do curriculo de estudos. Apresenta-se aqui como curiosidade.

Estes raciocínios podem ser generalizados para uma situação em que de um conjunto com *N* elementos queremos extrair, com reposição, amostras não ordenadas de dimensão *n*. O facto de que com ambos os raciocínios chegarmos ao mesmo resultado é consequência da igualdade

$$\binom{N+n-1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \binom{N}{k}\binom{n-1}{n-k}$$

Temos assim o seguinte resultado

Resultado 5:

O número de amostras não ordenadas de dimensão *n* que se pode extrair, com reposição, de um conjunto com *N* elementos distintos é dado por $\binom{N+n-1}{n}$

Para uma demonstração deste resultado usando o princípio da indução pode consultar-se Parzen (1960).

Exemplo 12 - Imaginemos que se pensa num novo jogo do totoloto em que as bolas, uma vez extraídas, são repostas antes da nova extracção. Quantas apostas diferentes é que se podem agora construir?

Resolução: Admitindo que a ordem continua a não interessar, temos como resultado $\binom{49+5}{6} = 25\ 826\ 165$ apostas.

3.3 - Análise Combinatória e Cálculo de Probabilidades

O objectivo ao introduzir noções de cálculo combinatório foi o de o aplicar no cálculo de probabilidades. Para o efeito teremos que admitir que as amostras ordenadas são aleatórias, isto é, têm igual probabilidade de serem seleccionadas. Assim, por exemplo, quando falamos em amostras (ordenadas) aleatórias de dimensão *n* de uma população com dimensão *N*, admitimos que a probabilidade de qualquer amostra ser retirada da população é $\frac{1}{N^n}$ se a amostragem for feita com reposição e igual a $\frac{1}{{}^{N}A_n}$ se a amostragem for feita sem reposição. Isto porque já sabemos que o número de amostras ordenadas de dimensão *n* que é possível retirar de uma população com dimensão *N* é igual a N^n se a amostragem for feita com reposição e igual a ${}^{N}A_n$ se a amostragem for feita sem reposição. Estes números são na realidade as cardinalidades dos espaços de resultados das experiências aleatórias respectivas. Quer num caso, quer noutro, os conjuntos unitários formados por cada amostra ordenada, constituem assim os acontecimentos elementares do espaço de acontecimentos associado à experiência respectiva. Note-se que o facto de $\frac{{}^{N}A_n}{N^n}$ estar próximo de 1 quando *N* é grande e *n* relativamente pequeno, implica que seja praticamente indiferente qual o tipo de amostragem feita quando lidamos com populações de dimensão elevada e amostras de dimensão pequena.

Relembremos que na situação em que o espaço de resultados (espaço-amostra) é finito e os casos são igualmente possíveis (resultando em acontecimentos elementares equiprováveis), então a probabilidade de um acontecimento pode ser calculada como a razão entre o número de casos favoráveis ao acontecimento (um acontecimento é sempre a união de acontecimentos elementares) e o número de casos possíveis. Assim já vemos em que situações e como é que os resultados da análise combinatória nos podem ser úteis para o cálculo de probabilidades de acontecimentos de um determinado espaço de acontecimentos.

Porque é que as amostras não ordenadas não têm necessariamente igual probabilidade de serem seleccionadas?

Para responder a esta pergunta recorramos ao exemplo habitual da urna com 6 bolas numeradas de 1 a 6 e suponhamos que tiramos 2 bolas da urna com reposição e observamos o número da bola saída. O espaço de resultados associado a esta experiência é :

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

A cardinalidade deste conjunto é como já sabemos ${}^{6}A'_{2} = 6^{2} = 36$. Os acontecimentos elementares são da forma $\{(i,j)\}$, onde *i* e *j* podem tomar qualquer inteiro de 1 a 6. Qual a probabilidade de se retirar uma bola numerada com um 5 e outra numerada com um 6? Esta probabilidade é obviamente $\frac{2}{36}$, pois é a probabilidade do acontecimento {(5,6}, (6,5)}, união dos acontecimentos elementares {(5,6)}, {(6,5)}. Qual é a probabilidade de obter 5 nas duas extracções? É claramente $\frac{1}{36}$. As amostras não ordenadas não têm pois, necessariamente, a mesma probabilidade de serem observadas.

Há pois necessidade de ter cuidado em aplicar os resultados da análise combinatória, principalmente quando as amostragens são feitas com reposição e se pensa que, para responder ao problema, a ordem em que os elementos aparecem na amostra não interessa.

Actividade

Num saco há 16 peças de fruta, 4 laranjas, 4 pêras, 4 maçãs e 4 kiwis. Tiram-se duas peças ao acaso. Qual a probabilidade de que sejam:

a) da mesma espécie

b) uma laranja e um kiwi

Resolução:

a) *1º processo*

Como há 4 espécies de fruta, tirando 2 peças (supõe-se que não se repõe a 1ª peça), a probabilidade será dada por:

$$\frac{4}{16} \times \frac{3}{15} + \frac{4}{16} \times \frac{3}{15} + \frac{4}{16} \times \frac{3}{15} + \frac{4}{16} \times \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

2º processo (recorrendo à análise combinatória)

Número de casos possíveis

$$\binom{16}{2} = 120$$

Número de casos favoráveis

$$4 \times \binom{4}{2} = 24$$

Probabilidade pretendida: $\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$

b) Nesta situação podemos ter 1º uma laranja e depois um kiwi ou o contrário, donde a probabilidade será dada por

$$2 \times \frac{4}{16} \times \frac{4}{15} = \frac{2}{15}$$

Número de casos possíveis

$$\binom{16}{2} = 120$$

Número de casos favoráveis

$$\binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 16$$

Probabilidade pretendida: $\frac{16}{120} = \frac{2}{15}$

Actividade

De um conjunto de flores formado por 5 rosas vermelhas, 4 rosas brancas e 3 rosas amarelas, pretende-se formar um ramo com 4 destas flores escolhidas ao acaso. Calcule a probabilidade de:

a) O ramo ter exactamente 3 rosas vermelhas

b) O ramo ter pelo menos uma rosa vermelha

Resolução:

b) Número total de ramos $\binom{12}{4} = 495$

A A A _ para o lugar que falta preencher temos $\binom{9}{1} = 9$ possibilidades, pelo que a probabilidade pretendida é $\frac{4}{495} = \frac{1}{55}$

c) P(pelo menos uma rosa vermelha) = 1 – P(nenhuma rosa vermelha)

P(nenhuma rosa vermelha) = $\frac{35}{495}$, pelo que

$$\text{P(pelo menos uma rosa vermelha)} = 1 - \frac{35}{495} = \frac{92}{99}$$

Actividade

Num conjunto de 8 livros encontram-se duas obras de Saramago. Forma-se um pacote ao acaso com 5 desses livros. Qual a probabilidade dessas duas obras estarem incluídas no pacote?

Resolução:

Número de pacotes possíveis $\binom{8}{5} = 56$

Número de pacotes favoráveis $\binom{6}{3} = 20$ (temos 6 livros disponíveis para 3 lugares)

Probabilidade pretendida $\frac{20}{56} = \frac{5}{14}$

Actividade

Com os algarismos 5, 4, 3, 2 e 1 formam-se números de 4 algarismos todos diferentes. Qual a probabilidade de esses números serem pares?

Resolução:

Total de números possíveis com 4 algarismos ${}^{5}A_4 = 120$

Com os algarismos disponíveis, para os números serem pares terão de terminar em 2 ou 4:

__ __ __ 2 __ __ __ 4

pelo que o número de possibilidades é $2 \times {}^4A_3 = 48$.
Então a probabilidade pretendida será $\frac{48}{120} = \frac{2}{5}$.

Outro processo: Como temos 5 algarismos para ocupar o lugar do algarismo das unidades, mas só 2 é que são favoráveis, a probabilidade pretendida é $\frac{2}{5}$.

Actividade

Uma banda musical é constituída por 14 jovens de 3 nacionalidades diferentes: 6 portugueses, 5 cabo-verdianos e 3 angolanos. Forma-se ao acaso um grupo de 6 jovens. Qual a probabilidade de ter 3 portugueses, 2 cabo-verdianos e 1 angolano?

Resolução:

Número de casos possíveis $\quad {}^{14}C_6 = 3003$

Número de casos favoráveis $\quad {}^6C_3 \times {}^5C_2 \times {}^3C_1 = 600$

Probabilidade pretendida $\quad \frac{600}{3003} \approx 20\%$

Actividade – Um jogo de cinco dados (continuação)

Lançam-se cinco dados. Para ganharmos tem de sair o número 5 mas não pode sair o 6. Qual é a probabilidade de ganhar?

Já começámos a estudar este problema no capítulo 1 e conseguimos obter experimentalmente o valor aproximado de 27.3% para a probabilidade pedida. Vamos agora chegar ao resultado exacto.

O número de casos possíveis quando lanço cinco dados são os arranjos com repetição dos 6 números:

$$\text{Casos possíveis} = {}^6A'_5 = 6^5 = 7776$$

O número de casos favoráveis (sair 5 mas não sair 6) tem de ser feito em duas etapas.

Primeiro, não pode sair 6: são os arranjos com repetição dos números de 1 a 5.

$$\text{Casos em que não sai 6} = {}^5A'_5 = 5^5 = 3125$$

Segundo, não pode sair 6 mas tem de sair 5. Então, aos 3125 casos anteriores temos de subtrair os casos em que também não sai 5.

Casos em que não sai 6 nem 5 = ${}^{4}A'_{5}$ = 4^{5} = 1024

Casos em que não sai 6 mas sai 5 = 3125 – 1024 = 2101

Logo: P(sair 5 mas não sair 6) = $\frac{2101}{7776}$ ≈ 0.27019

A probabilidade de ganhar o jogo é praticamente igual a 27%.

Reparemos que o valor obtido experimentalmente está bastante perto do valor teórico.

Para aplicação dos resultados teóricos anteriores vamos apresentar alguns exemplos clássicos de cálculo de probabilidades.

3.4 - Exemplos Clássicos de Cálculo de Probabilidades

Um problema de urnas

Uma urna contém N bolas das quais N_1 são brancas e N_2 são vermelhas. Retiram-se n bolas ao acaso. Qual a probabilidade de haver n_1 brancas e n_2 vermelhas se (i) a amostragem for feita sem reposição, (ii) se a amostragem for feita com reposição?

Para resolver esta questão vamos começar por simplificar o problema atribuindo valores específicos a N, N_1, N_2, n, n_1, n_2. Suponhamos então que:

$$N = 6, N_1 = 4, N_2 = 2, n = 2, n_1 = 2, n_2 = 0 .$$

Imaginemos que as bolas se podem distinguir e que podem ser consideradas como sendo numeradas de 1 a 6, tendo as bolas brancas números de 1 a 4 e as vermelhas os números 5 e 6. Assim podemos escrever o espaço de resultados S inicial, relativo à composição da urna como S = {1,2,3,4,5,6}.

Ao retirarmos **amostras ordenadas** de dimensão 2 **sem reposição** o conjunto de todas as amostras possíveis é:

S* = {(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
(3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (4,6),

(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)}.

Como vemos, e sabemos de acordo com o resultado 1, há ${}^{6}A_2 = 30$ amostras possíveis. O conjunto das amostras favoráveis ao acontecimento desejado é A = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)} em número de ${}^{4}A_2$ = 12 e portanto, pela regra de Laplace, a probabilidade pretendida será de $\frac{{}^{4}A_2}{{}^{6}A_2} = \frac{12}{30} = \frac{6}{15}$

- Notemos que não é importante a ordem por que as bolas aparecem já que foi pedida a probabilidade de haver duas brancas (não foi referida a ordem de aparecimento). Assim sendo poderíamos usar em vez do resultado 1, o resultado 3 referente à amostragem **não ordenada sem reposição** e obteríamos para o número de amostras possíveis o valor $\binom{6}{2}$=15 e para o número de amostras favoráveis $\binom{4}{2}$ = 6 e portanto a probabilidade é igual à anteriormente calculada, como seria de esperar. Cuidado aqui! As amostras não ordenadas têm a mesma probabilidade de serem observadas? A resposta aqui é positiva pois como a amostragem é feita sem reposição, não há repetição de elementos na amostra.

Consideremos agora a situação de uma **amostra ordenada com reposição**. O número de amostras possíveis é agora $6^2 = 36$ e o número de amostras favoráveis ao acontecimento é $4^2 = 16$ e portanto a probabilidade pedida seria $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

Como responderíamos então ao problema geral?

No caso geral, a probabilidade pretendida é:

(1) amostragem sem reposição

$$\frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}}{\binom{N}{n}}$$

Resolução:
Pensando em amostras ordenadas, o número de casos possíveis é dado por ${}^{N}A_n$ e o número de casos favoráveis é $\binom{n}{n_1}\ {}^{N_1}A_{n_1} \times {}^{N_2}A_{n_2}$, já que para obter em *n* bolas n_1

brancas (e consequentemente n_2 vermelhas) há $\binom{n}{n_1}$ maneiras diferentes de acontecer. Para escolher n_1 brancas de entre N_1 e n_2 vermelhas de entre N_2, há ${}^{N_1}A_{n_1} \times {}^{N_2}A_{n_2}$ maneiras diferentes de proceder. Tem-se então que a probabilidade pretendida é

$$\frac{\binom{n}{n_1}\,{}^{N_1}A_{n_1}\;{}^{N_2}A_{n_2}}{{}^{N}A_n} = \frac{\frac{{}^{N_1}A_{n_1}}{n_1!}\;\frac{{}^{N_2}A_{n_2}}{n_2!}}{\frac{{}^{N}A_n}{n!}} = \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}}{\binom{N}{n}}$$

Repare-se que se obtém o mesmo resultado se tivéssemos raciocinado em termos de amostras não ordenadas. Isto acontece por que no caso em que não há reposição e portanto não há repetição de elementos em cada amostra, as amostras não ordenadas são equiprováveis.

(2) amostragem com reposição[1]

$$\binom{n}{n_1}\frac{N_1^{\,n_1}\,N_2^{\,n_2}}{N^n}$$

Resolução:
O raciocínio é idêntico ao anterior. Agora considera-se amostras ordenadas com reposição.

O Problema dos aniversários

Suponhamos que estamos numa sala com 20 pessoas. Qual é a probabilidade de não haver duas pessoas a fazer anos no mesmo dia?

Para resolver este problema temos de assumir que o ano tem 365 dias e que a taxa de nascimentos é constante ao longo do ano, de modo a poder admitir que qualquer dia do ano é igualmente provável para ser o aniversário de uma pessoa. O que pretendemos é então calcular a probabilidade de não haver repetições numa amostra de dimensão *n* obtida por amostragem com reposição de uma população de dimensão *N*. Assim no nosso caso *n* = 20 e *N* = 365 o número de casos favoráveis ao acontecimento desejado é dado por ${}^{365}A'_{20}$ e o número de casos possíveis é ${}^{365}A_{20}$. A probabilidade pedida é então, utilizando a regra de Laplace, igual a $\frac{{}^{365}A_{20}}{365^{20}} = 0.589$.

[1] Repare-se que não temos aqui mais do que o modelo binomial.

Note-se que este problema tem uma solução bastante simples se se raciocinar em termos de probabilidades condicionais. Com efeito, a 1ª pessoa pode fazer anos em qualquer dia e a probabilidade é $\frac{365}{365}$. Dado que a 1ª pessoa faz anos num determinado dia, a 2ª pessoa tem probabilidade $\frac{364}{365}$ de fazer anos num dia qualquer que não o da 1ª pessoa. Continuando até terminar a 20ª pessoa, temos que a probabilidade pretendida é o produto das probabilidades calculadas.

É interessante referir que, por exemplo se n = 4 se tem a probabilidade igual a 0.984 e para n = 64 a probabilidade é 0.003.

A probabilidade de numa sala com 20 pessoas haver pelo menos duas pessoas a fazer anos no mesmo dia é portanto 1 – 0.589 = 0.411.

Actividade – O Problema dos aniversários

Qual é o número mínimo de pessoas que é preciso ter numa sala para que a probabilidade de haver pelo menos duas a fazer anos no mesmo dia seja superior a 50%?

Se pedirmos às pessoas para começar por fazer uma estimativa deste número, é normal que, depois de efectuados os cálculos, se verifique que quase toda a gente se afastou muito do valor real. Este é um dos resultados que vai contra a intuição da grande maioria das pessoas.

Para simplificar, vamos ignorar a possibilidade de haver quem faça anos a 29 de Fevereiro e supor que todos os 365 dias do ano são igualmente prováveis para o aniversário de uma pessoa ao acaso (o que não é rigorosamente verdade: há dias ligeiramente mais prováveis que outros).

Vamos calcular as sucessivas probabilidades de **não** haver duas pessoas a fazer anos no mesmo dia, começando com uma única pessoa na sala e fazendo entrar as outras uma a uma. Pararemos logo que a probabilidade seja inferior a 0,5.

Se só houver 1 pessoa, ela pode fazer anos em qualquer um dos 365 dias: P = $\frac{365}{365}$ = 1.

Entra a segunda pessoa, que tem de fazer anos num dia diferente da primeira. Servem 364 dos 365 dias: $\frac{364}{365}$. A probabilidade de não coincidência de aniversários é

$$P(2) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \approx 0.9973$$

Entra a terceira pessoa, que tem de fazer anos num dia diferente das anteriores. Servem 363 dos 365 dias: $\frac{363}{365}$. A probabilidade de não coincidência de aniversários é

$$P(3) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \approx 0.9918$$

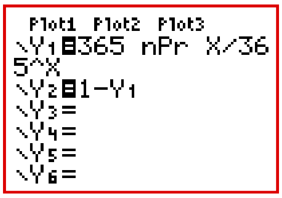
Para 4 pessoas:

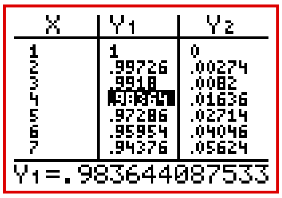
$$P(4) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \approx 0.9836$$

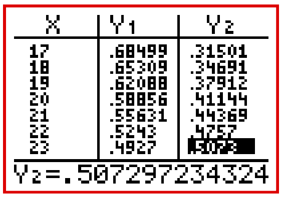
É fácil agora fazer a generalização para **n** pessoas:

$$P(n) = \frac{A_n^{365}}{365^n}$$

Agora vamos procurar o menor valor de n que faz com que P(n) seja inferior a 0,5. Podemos usar a calculadora. Colocamos em Y1 a função P(n), em Y2 a função 1–P(n), que é a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas a fazer anos no mesmo dia, e fazemos uma tabela para os sucessivos valores de n.







Vemos então que bastam 23 pessoas para que a probabilidade de haver duas pessoas a festejar o aniversário no mesmo dia seja superior a 50%. O resultado é surpreendentemente baixo.

Com 30 pessoas, a probabilidade já é superior a 70%, e com 41 pessoas superior 90%. Com 57 chega-se aos 99% e com 70 ultrapassa-se os 99.9%.

O Problema dos chapéus

Há *N* pessoas e cada uma põe o respectivo chapéu numa caixa. Qual a probabilidade de uma determinada pessoa retirar o próprio chapéu? Qual a probabilidade de que pelo menos uma pessoa escolha o chapéu correcto?

Este exemplo já o tratámos anteriormente, no capítulo 1, quando estudámos as propriedades da Probabilidade.

Actividade

Uma secretária muito desarrumada tinha 5 cartas para meter em 5 envelopes, mas caiu tudo ao chão e ela meteu as cartas nos envelopes sem tomar atenção aos nomes. Uma das cartas era para o Senhor Silva. a)Qual a probabilidade de ele receber a carta que lhe era dirigida? b) Qual é a probabilidade de pelo menos uma pessoa receber a carta que lhe era destinada?

Resolução:

a) Uma solução muito simples para resolver esta questão é pensar que se as cartas foram colocadas aleatoriamente nos envelopes, então a carta para o Senhor Silva tem igual probabilidade de calhar em um qualquer dos envelopes. Assim a probabilidade de a secretária meter a carta no envelope certo é precisamente $\frac{1}{5}$.

b) Recorrendo à resolução geral, apresentada no capítulo 1, e fazendo n=5, vem para a probabilidade pretendida $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 0.63$

3.5 - Alguns exercícios

Estes exercícios que aqui se apresentam são dirigidos essencialmente aos Professores. Não se aconselha, em geral, que sejam resolvidos na sala de aula com os alunos, com excepção de alguns, assinalados com *, cuja resolução é suficientemente simples de modo que podem ser dados aos alunos para resolver.

Apresentamos a seguir a resolução, mas não podemos deixar de chamar a atenção para o facto de que muitos dos exercícios podem ser resolvidos, até com maior facilidade, usando a noção de probabilidade condicional. Insistimos na resolução através da análise combinatória com o objectivo de exemplificar a teoria apresentada anteriormente.

*1 - Um encontro de Professores **

Quatro professores de Matemática decidiram encontrar-se no Grande Hotel das Termas. Acontece que se esqueceram de especificar o nome das termas. Considerando que há 4 hotéis com o mesmo nome em quatro termas distintas, qual a probabilidade dos quatro professores escolherem termas diferentes?

2 - Concurso da Televisão

Num Concurso televisivo um concorrente ganha prémios consoante as cores das bolas que retira de uma urna composta por 3 bolas vermelhas, duas brancas e 1azul. Ele pode tirar três bolas da urna. Se as três bolas retiradas forem distintas ganha um andar. Se forem duas iguais e uma distinta ganha um automóvel. Se forem três iguais não ganha nada.
Qual a probabilidade de ganhar um (i) andar, um (ii) automóvel (iii) não ganhar nada. Ele pode, no início do jogo, escolher se quer repor as bolas que saíram ou não. O que é mais vantajoso para ele?

3 - Adivinho

Dois amigos fazem uma experiência para ver se "conseguem " fazer transmissão de pensamentos. Põem numa urna quatro bolas vermelhas e quatro pretas. Um deles retira as bolas uma a uma da urna, sem as repor. De cada vez que tira uma bola vê a cor mas não a comunica ao parceiro, pedindo-lhe que adivinhe a cor da bola. Qual a probabilidade de o parceiro (que sabe qual a composição da urna) adivinhar exactamente a cor de seis das 8 bolas?

4 - Jogo de cartas

Num jogo de cartas distribuem-se as 52 cartas por 4 jogadores, recebendo cada jogador 13 cartas. Qual a probabilidade de, numa determinada jogada, sair um ás a cada jogador?

*5 - Aniversários **

Dado um grupo de quatro pessoas, calcule a probabilidade de pelo menos duas (i) fazerem anos no mesmo dia, (ii) fazerem anos no mesmo mês.

6 - Tarefas

Uma Mãe de três filhas tem seis tarefas para distribuir entre elas durante a semana, deixando-as descansar ao Domingo. Cada criança tem de efectuar duas tarefas. Qual a probabilidade de numa semana nenhuma das crianças efectuar as duas tarefas em dias seguidos?

7 - Pescador

Um pescador apanhou 10 peixes, dos quais 2 tinham um tamanho inferior ao permitido pela lei. Foi apanhado por um fiscal que resolveu inspeccionar apenas dois deles, escolhendo-os aleatoriamente entre os dez apanhados. Qual a probabilidade de o pescador ser mandado em paz?

8 - Três Médicos

Imagine uma localidade onde há três médicos, Dr. António, Dr. Bernardo eDr. Carlos, todos igualmente do agrado dos residentes. Num determinado dia de inverno seis residentes chamaram um médico escolhendo o nome ao acaso. Qual a probabilidade de o Dr. António receber 3 chamadas, o Dr. Bernardo receber duas chamadas e o Dr. Carlos receber uma?

9 - Lotaria

Considere uma lotaria que vende 25 bilhetes e oferece três prémios. Qual a probabilidade de ganhar um prémio se comprar 5 bilhetes?

10 - À mesa do Jantar

Seis amigos, entre as quais estão dois namorados muito recentes, vão a um jantar e, para não haver discussões a escolha do lugar à mesa (redonda) é feita aleatoriamente. Qual a probabilidade dos "namorados" se sentarem ao lado um do outro?

*11 - O problema das chaves **

Tenho no meu porta-chaves 4 chaves todas idênticas e só uma abre a porta do meu gabinete. Acontece que nunca sei qual é a chave certa e parece que é sempre a última chave que tento aquela que abre a porta! Mostre que não tenho razão e que a probabilidade é sempre a mesma, nomeadamente 1/4 de abrir a porta à primeira, segunda terceira ou quarta tentativa.

Resolução dos Exercícios

1. Tendo em conta a definição clássica de Probabilidade, vamos considerar o nº de casos favoráveis e o nº de possíveis.

Nº casos possíveis: $4\times 4\times 4\times 4 = 4^4$

Nº casos favoráveis: $4\times 3\times 2\times 1 = 4!$

Probabilidades pretendida: $\frac{4!}{4^4}$

2. Composição da urna: V V V B B A

i)

	Sem reposição	Com reposição
Nº casos possíveis	$\binom{6}{3}$	6^3
Nº casos favoráveis	$\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}$	$6\times {}^3A_1\times {}^2A_1\times {}^1A_1$
Probabilidade	$\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{6}{20}$	$\frac{6\times {}^3A_1\times {}^2A_1\times {}^1A_1}{6^3} = \frac{1}{6}$

ii)

	Sem reposição	Com reposição
Nº casos possíveis	$\binom{6}{3}$	6^3
Nº casos favoráveis	$\binom{3}{2}\binom{3}{1}+\binom{2}{2}\binom{4}{1}$	$3(3^2\times 3+2^2\times 4+1^2\times 5)$
Probabilidade	$\frac{\binom{3}{2}\binom{3}{1}+\binom{2}{2}\binom{4}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{13}{20}$ =0.65	$\frac{3(3^2\times 3+2^2\times 4+1^2\times 5)}{6^3} = \frac{144}{216}$ =0.67

iii)

	Sem reposição	Com reposição
Nº casos possíveis	$\binom{6}{3}$	6^3
Nº casos favoráveis	$\binom{3}{3}$	$3\times3\times3+2\times2\times2+1\times1\times1$
Probabilidade	$\dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{6}{3}}=\dfrac{1}{20}$	$\dfrac{3^3+2^3+1}{6^3}=\dfrac{36}{216}=\dfrac{1}{6}$

3. Considere as 8 posições correspondentes às ordens pelas quais as bolas vão sendo retiradas. Suponha que sabe as 4 posições das bolas pretas; então automaticamente ficam conhecidas as 4 posições das bolas brancas. Assim o nº de <u>modos possíveis</u> de conhecer as posições de todas as bolas, isto é, a forma como as bolas vão saindo é $\binom{8}{4}$. Destas posições nem todas são favoráveis pois nós só necessitamos de conhecer a posição de 6 das bolas. Assim das 4 posições possíveis para as bolas pretas suponha que acertou 3 das posições e que errou 1 posição. Se só errou uma posição das pretas, também só errou uma das vermelhas, o que significa que acertou 6 posições, como se pretendia. Então o nº de <u>casos favoráveis</u> será $\binom{4}{3}\times 4$ a bola preta errada podia estar em qualquer uma das 4 posições inicialmente consideradas como possíveis).

Probabilidade: $\dfrac{\binom{4}{3}\binom{4}{1}}{\binom{8}{4}}=\dfrac{8}{35}$

4. <u>Nº casos possíveis</u>: $\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$ (Distribuímos 13 para a 1ª pessoa. Como a ordem não interessa há $\binom{52}{13}$ mãos possíveis. Das restantes 52-13=39, distribuímos 13 à 2ª pessoa. Há $\binom{39}{13}$ mãos possíveis. Das restantes 26 distribuímos 13 à 3ª pessoa. Agora há $\binom{26}{13}$ mãos possíveis. As restantes 13 são todas distribuídas à 4ª pessoa. É a única mão possível. Aplicando o princípio fundamental da análise combinatória, temos para o número total de casos possíveis o produto destas quantidades).

Nº casos favoráveis: $\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}\times 4!$ (Se retirar os 4 ases, estamos na situação de termos 48 cartas a distribuir por 4 subconjuntos de dimensão 12 cada um. Seguidamente basta colocar um ás em cada um destes subconjuntos e o nº de modos de fazer isto é igual a 4!)

Probabilidade pretendida: $\dfrac{\binom{48}{12}\binom{36}{12}\binom{24}{12}\binom{12}{12}\times 4!}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}} = 0.105$

Outro processo (usando a noção de probabilidade condicional): Pensando na posição dos ases, uma solução alternativa será considerar

$$\frac{52}{52}\times\frac{39}{51}\times\frac{26}{50}\times\frac{13}{49}$$

5. Temos n = 4 e N = 365

i) Para calcular a probabilidade pretendida é mais fácil começar por calcular a probabilidade de todas fazerem anos em dias distintos. Assim, o nº de <u>maneiras possíveis</u> para 4 pessoas fazerem anos é 365^4. Destas 365^4 possibilidades, só ${}^{365}A_4 = 365\times 364\times 363\times 362$ é que são <u>favoráveis</u>. Então a probabilidade de não haver duas pessoas a fazerem anos no mesmo dia será $\dfrac{365^4}{{}^{365}A_4} = 0.984$. Daqui vem que a probabilidade de pelo menos duas pessoas fazerem anos no mesmo dia é 1 - 0,984 = 0,016.

ii) Considerar n=4 e N=12.

6. <u>Nº casos possíveis</u> : é o número de partições de um conjunto de seis elementos em 3 conjuntos de dois, ou seja, $\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$=90. Com efeito, das 6 tarefas que há para distribuir, 2 vão para uma das filhas. Das restantes 4 2 vão para outra das filhas e as restantes duas vão para a terceira filha. $\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$ é o número de modos de assim proceder .

<u>Nº casos favoráveis</u>: Para considerar o nº de casos favoráveis vamos considerar duas situações distintas - ou nos 3 primeiros dias são filhas diferentes a executarem as tarefas, ou nos 3 primeiros dias uma das filhas faz duas tarefas. Na 1º situação temos, representando as 3 filhas pelos números 1, 2 e 3, os seguintes casos em que a filha 1 realiza a 1ª tarefa, a filha 2 a 2ª tarefa e a filha 3 a 3ª tarefa:

1 2 3 | 1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1

Como existem 3! possibilidades para as 3 filhas se distribuírem pelas 3 primeiras tarefas obtemos 3! x 4 possibilidades, isto é 24.

Na 2ª situação admitindo, por exemplo, que é a filha 2 que repete nos 3 primeiros dias, temos dois casos:

2 1 2 3 1 3

2 3 2 1 3 1

Como temos 3 filhas, o nº de possibilidades vai ser 3x2 = 6.

Então o nº de casos favoráveis é 30.

Probabilidade pretendida: $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$

7. <u>Nº casos possíveis</u> : $\binom{10}{2}$ <u>Nº casos favoráveis</u>: $\binom{2}{0}\binom{8}{2}$

Probabilidade pretendida: $\dfrac{\binom{2}{0}\binom{8}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{28}{45}$

8. <u>Nº casos possíveis</u> : 3^6 (Estamos numa situação em que temos uma população de dimensão 3 em que qualquer um dos seus elementos pode ser escolhido mais do que uma vez para constituir uma amostra de dimensão 6. No entanto nem todas as possibilidades são favoráveis, pois queremos que os seis elementos se particionem em 3 subconjuntos de dimensões 3, 2 e 1 respectivamente. Daí o nº de casos favoráveis que se apresenta a seguir)

<u>Nº casos favoráveis</u>: $\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}$

Probabilidade pretendida: $\dfrac{\binom{6}{3}\binom{3}{2}}{3^6} = 0.123$

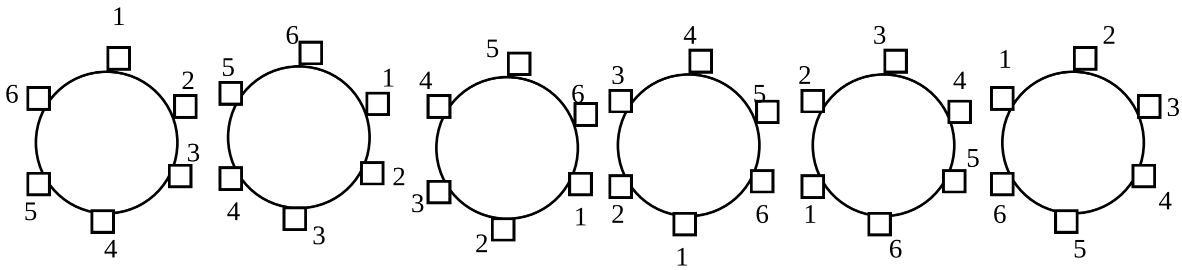
9. <u>Nº casos possíveis</u> : $\binom{25}{5}$ Nº casos favoráveis: $\binom{3}{1}\binom{22}{2}$

Probabilidade de ganhar um único prémio: $\dfrac{\binom{3}{1}\binom{22}{2}}{\binom{25}{5}}$

Como o enunciado não está perfeitamente explícito, calculamos a seguir a probabilidade de ganhar pelo menos um prémio. Para isso começamos por calcular a probabilidade de não ganhar prémio nenhum prémio que é $\dfrac{\binom{22}{5}}{\binom{25}{5}}$. Então a probabilidade de ganhar pelo menos um prémio será 1 - $\dfrac{\binom{22}{5}}{\binom{25}{5}}$.

10. Como estamos interessados apenas na posição relativa das pessoas, um dos processos de resolução será:

<u>Nº casos possíveis</u>: 5!   Embora pudesse parecer à 1ª vista que o nº de casos possíveis era 6!, o que aconteceria se a mesa não fosse redonda, no caso da mesa redonda, para cada distribuição dos lugares,   existem 6 situações iguais. Por exemplo



<u>Nº casos favoráveis</u>: se fixar o par de namorados, temos 4! possibilidades para a distribuição dos outros amigos. Como os namorados podem permutar, temos 2x4! possibilidades.

Probabilidade pretendida: $\dfrac{2 \times 4!}{5!} = \dfrac{2}{5}$

Outra resolução:

<u>Nº casos possíveis</u>: 6!

<u>Nº casos favoráveis</u>: 6x2x4!

Probabilidade pretendida: $\dfrac{6 \times 2 \times 4!}{6!} = \dfrac{2}{5}$

11. Probabilidade de abrir à 1ª tentativa: $\dfrac{{}^{1}A_{1}}{{}^{4}A_{1}} = \dfrac{1}{4}$

Probabilidade de abrir à 2ª tentativa: $\dfrac{{}^{3}A_{1}\,{}^{1}A_{1}}{{}^{4}A_{2}} = \dfrac{1}{4}$

Probabilidade de abrir à 3ª tentativa: $\dfrac{{}^{3}A_{2}\,{}^{1}A_{1}}{{}^{4}A_{3}} = \dfrac{1}{4}$

Probabilidade de abrir à 4ª tentativa: $\dfrac{{}^{4}A_{3}\,{}^{1}A_{1}}{{}^{4}A_{4}} = \dfrac{1}{4}$

De notar que muitos destes exercícios podem ser resolvidos, até com maior facilidade, usando a noção de probabilidade condicional. Essa tarefa é aqui deixada como desafio aos leitores.

Capítulo 4

Comentários finais

Como ficou subentendido no comentário feito no início da resolução dos exercícios do capítulo anterior e nas várias referências ao longo do texto, a maior parte das vezes não existe um único processo para resolver um problema de Probabilidades. Efectivamente, esta é uma questão que se coloca muitas vezes perante os problemas de Probabilidades - o facto de existirem vários processos de os resolver.

Normalmente isso sucede por, perante a situação descrita no problema, se poderem considerar diferentes espaços de resultados conforme a abordagem que se faça. Para calcular a probabilidade aplicando a definição de Laplace, devemos dividir o número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis. Ora, a cada espaço de resultados irá corresponder um diferente número de casos possíveis e, claro, um diferente número de casos favoráveis.

O principal cuidado a ter é usar exactamente o mesmo método na contagem dos casos favoráveis e na contagem dos casos possíveis, ou seja, não mudar de espaço de resultados a meio da resolução.

Vamos então pegar num problema e ver vários processos de o resolver.

Três bilhetes de cinema

A professora de História resolveu levar os seus 15 alunos a ver um filme. Como o cinema tem filas de precisamente 15 cadeiras, comprou uma fila inteira e distribuiu os bilhetes ao acaso pelos alunos. A Ana, a Bela e a Carla são muito amigas e gostavam de ficar as três juntas e numa das pontas da fila.

Qual é a probabilidade de isso acontecer?

Fazer um esquema ajuda muitas vezes a visualizar melhor o que se passa.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

As três amigas querem ficar nos lugares 1, 2 e 3 ou 13, 14 e 15. Existem pelo menos quatro processos de resolver o problema.

1º Processo

Vamos pensar apenas nos três bilhetes destinados às três amigas, não nos interessando a ordem como elas ocuparão depois esses três lugares.

O espaço de resultados é o conjunto dos ternos não ordenados. Por exemplo, um dos seus elementos é o terno {5, 7, 15}, que corresponde às três amigas receberem os bilhetes 5, 7 e 15 embora não saibamos o lugar exacto em que cada uma delas se vai sentar.

Os casos possíveis são as diferentes maneiras de elas receberem os 3 bilhetes de um conjunto de 15, ou seja, todos os ternos não ordenados formados a partir do conjunto de 15 bilhetes.

Casos Possíveis = $C_3^{15} = 455$

Os casos favoráveis são apenas 2: ou recebem os bilhetes 1-2-3 ou os bilhetes 13-14-15.

P(ficarem juntas numa ponta) = $\frac{2}{455}$

2º Processo

Vamos pensar nos três bilhetes destinados às três amigas, mas interessando-nos agora a ordem como elas ocuparão depois esses três lugares. Continuamos a ignorar os outros 12 bilhetes.

O espaço de resultados é o conjunto dos ternos ordenados. Por exemplo, um dos seus elementos é o terno {5, 7, 15}, ou seja, a Ana fica no lugar 5, a Bela no 7 e a Carla no 15.

Os casos possíveis são portanto as diferentes maneiras de elas receberem 3 bilhetes de um conjunto de 15, mas em que a ordem por que recebem os bilhetes é importante.

Casos Possíveis = A_3^{15} = 2730

Se os bilhetes que elas receberem forem 1, 2 e 3, como a ordem interessa, há seis maneiras de elas os ocuparem (são as permutações de 3). O mesmo se passa para os bilhetes 13, 14 e 15. Logo, os casos favoráveis são $2 \times P_3$, ou seja, 12.

P(ficarem juntas numa ponta) = $\frac{12}{2730} = \frac{2}{455}$

3º Processo

Desta vez vamos considerar todas as maneiras como os 15 alunos se podem sentar nos 15 lugares.

O espaço de resultados é constituído por todas as permutações dos 15 alunos pelas cadeiras.

Os casos possíveis são portanto as permutações de 15.

Casos Possíveis = P_{15} = 15!

Se as três amigas ficarem nos lugares 1, 2 e 3, podem permutar entre si, e os outros 12 alunos também. O mesmo se passa se ficarem nos três últimos lugares. Então:

Casos Favoráveis = $2 \times P_3 \times P_{12}$

P(ficarem juntas numa ponta) = $\frac{2 \times P_3 \times P_{12}}{P_{15}} = \frac{2}{455}$

4º Processo

Vamos calcular a probabilidade pedida admitindo que os bilhetes vão ser entregues um a um às três amigas.

A primeira vai receber o seu bilhete. Dos 15 lugares, há 6 que lhe servem (os três primeiros e os três últimos).

Chegou a vez da segunda. Há 14 bilhetes e a ela só servem os dois lugares que restam na ponta onde a primeira ficou.

Finalmente, a terceira, dos 13 bilhetes restantes, tem de receber o único que sobra na ponta onde estão as amigas.

P(ficarem juntas numa ponta) = $\frac{6}{15} \times \frac{2}{14} \times \frac{1}{13} = \frac{12}{2730} = \frac{2}{455}$.

Programa GLORIA

```
Lbl A
0→F
0→T
Lbl B
ClrHome
Disp "NUMERO DE","EXPERIENCIAS?"
Input N
T+N→T
For(I,1,N)
0→Z
While Z<9
Z+randInt(1,6)→Z
End
If Z=9
F+1→F
End
F/T→R
ClrHome
Disp "EXPERIENCIAS",T
Disp "FREQ REL=",R
Disp " "
Disp " PARA PROSSEGUIR"
Disp "              [ENTER]"
Pause
Menu("3 DADOS","PARAR",C,"CONTINUAR",B,"INICIAR",A)
Lbl C
```

Este programa para a TI-83 destina-se a ser usado na actividade “A casa da *morte* no Jogo da Glória”. Faz a simulação, para um número de experiências escolhido pelo utilizador, indicando a frequência relativa de vezes que o jogador caiu na casa da *morte*.

O programa demora cerca de minuto e meio a fazer 500 experiências.

Programa DADOS3

```
Lbl A
0→F
0→T

Lbl B
ClrHome
Disp "NUMERO DE","EXPERIENCIAS?"
Input N
T+N→T
For(I,1,N)
If sum(randInt(1,6,3))>13
F+1→F
End
F/T→R

ClrHome
Disp "EXPERIENCIAS",T
Disp "FREQ REL=",R
Pause

Menu("3 DADOS","PARAR",C,"CONTINUAR",B,"INICIAR",A)
Lbl C
```

Este programa permite verificar a frequência com que, no lançamento de três dados normais, a soma das pintas é maior que 13.
Basta introduzir o número de experiências desejado. Obtido o primeiro resultado, pode prolongar-se a simulação indicando quantas mais experiências se quer fazer.

A velocidade do programa é de cerca de 500 experiências por minuto.

Este programa pode ser usado para determinar a frequência com que a soma dos três dados é maior que um valor S diferente de 13. Basta ir à linha

```
If sum(randInt(1,6,3))>13
```

e substituir 13 pelo número S desejado.

PROGRAMA “BINOM”

```
Disp "PROBABILIDADE"
Disp "DE SUCESSO?"
Input P
FnOff
PlotsOff
{2,4,8,16,32,46}→L6
1→Xscl
0.1→Yscl
1→Xres
For(I,1,6)
seq(X,X,0,L6(I))→L1
binompdf(L6(I),P)→L2
0→Xmin
L6(I)+1→Xmax
–0.2*max(binompdf(L6(I),P))→Ymin
1.1*max(binompdf(L6(I),P))→Ymax
Plot1(Histogram,L1,L2)
Text(2,3,"N=",L6(I))
Text(10,3,"P=",P)
Text(53,66,"[ENTER]")
Pause
End
“normalpdf(X,46P,√(46P(1–P))”→Y3
GraphStyle(3,2)
DispGraph
```

Este programa para a TI-83 destina-se a mostrar como a distribuição binomial tende para a distribuição normal quando o número de ensaios aumenta. No ecrã vão aparecendo sucessivamente os gráficos da distribuição binomial para **n** igual a 2, 4, 8, 16, 32 e 46. Finalmente, é sobreposto o gráfico da distribuição normal para a qual tende a binomial.

Sendo **p** a probabilidade de sucesso, quando $N.p.(1-p) > 9$, distribuição binomial é praticamente igual à normal de média = N.p e desvio padrão = $\sqrt{Np(1-p)}$.

É esta distribuição normal que é colocada no editor de funções no final do programa.

PROGRAMA “BUFFON”

Imaginemos que lançamos uma agulha de comprimento L sobre um plano coberto de linhas paralelas em que a distância entre linhas consecutivas é também L.

O conde de Buffon mostrou que a probabilidade de a agulha cortar uma das linhas é P = $\frac{2}{\pi}$. Este resultado permite descobrir experimentalmente o valor de π.

O programa “BUFFON” faz simulações desta experiência e chegar assim a um valor aproximado de π.

```
Degree
Lbl A
0→F
0→T
Lbl B
ClrHome
Disp "NUMERO DE","EXPERIENCIAS?"
Input N
T+N→T
For(I,1,N)
If rand<sin(180rand)
F+1→F
End
F/T→R
Disp "EXPERIENCIAS",T
Disp "FREQ REL=",R
Disp "PI APROX=",2/R
Disp "PRESSIONAR ENTER"
Pause
Menu("BUFFON","PARAR",C,"CONTINUAR",B,"INICIAR",A)
Lbl C
```

O programa faz a simulação para o lançamento de um número de agulhas escolhido pelo utilizador, indicando o nº de experiências realizadas, a frequência relativa de vezes que as agulhas cruzaram as linhas e o correspondente valor aproximado de π. O programa demora cerca de um minuto a simular 500 experiências.

Bibliografia

Na preparação destas folhas seguiu-se essencialmente a seguinte bibliografia:

BASTOS, R.; BERNARDES, A.; LOPES, A. V.; LOUREIRO, C.; VARANDAS, J. M.; VIANA, J. P. (1999) - *Matemática 12*, Edições Contraponto, Porto.

ENGEL, A. (1990) - *Les Certitudes du Hasard*, Aleas Editeur, Lyon.

FELLER, W. (1968) – *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, John Wiley & Sons.

FREEDMAN, D. PISANI, R. PURVES, R., ADHIKARI, A. (1991) - *Statistics*. W. W. Norton & Company.

GRAÇA MARTINS, M. E. (1998) – *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

GRAÇA MARTINS, M. E. , CERVEIRA, A. (1998) – *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Universidade Aberta.

IMAN, R. e CONOVER, W. (1983) - *A Modern Approach to Statistics*. John Wiley & Sons.

MANN, P. (1995) – *Introductory Statistics*. John Wiley & Sons.

MENDENHALL. W. BEAVER, R. (1994) – *Introduction to Probability and Statistics*. Duxbury Press.

MOORE, D. – *Statistics* – Concepts and Controversies. Freeman, 1997

MOORE, D. – *The Basic Practice of Statistics,* Freeman, 1995

MOORE, D., McCABE, G. – *Introduction to The Basic Practice of Statistics,* Freeman, 1993

National Council of Teachers of Mathematics (1981) - *Teaching Statistics and Probability*, 1981 Yearbook, , Reston, EUA.

PARZEN, E. (1969) – *Modern Probability Theory and Its Applications*. New York.Wiley.

SIEGEL, A. (1988) – *Statistics and Data Analysis*. John Wiley & Sons.

TIAGO DE OLIVEIRA, J. (1967) – *Probabilidades e Estatística* – Conceitos fundamentais. Vol 1. Livraria Escolar Editora. Lisboa.

Revistas recomendadas

Journal of Statistical Education (online)
Teaching Statistics (Disponível para consulta no Departamento de Estatística e Investigação Operacional da faculdade de Ciências da Universidade de lisboa.
Journal of Education and Behavioral Statistics
Journal of Research in Mathematics Education
Educational Studies in Mathematics