MINISTÉRIO DE EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA
MÉTODOS QUANTITATIVOS

Organização Curricular e Programas

ENSINO SECUNDÁRIO

REFORMA EDUCATIVA

DGEBS
DIRECÇÃO GERAL DOS ENSINOS BÁSICO E SECUNDÁRIO

Programas aprovados pelo Despacho n.º 124/ME/91, de 31 de Julho, publicado no *Diário da República*, 2.ª série, n.º 188, de 17 de Agosto.

ENSINO SECUNDÁRIO

PROGRAMAS
DE

MATEMÁTICA
E MÉTODOS QUANTITATIVOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO GERAL

1 — ENQUADRAMENTO DOS PROGRAMAS DO ENSINO SECUNDÁRIO NA REFORMA CURRICULAR

Os programas do ensino secundário enquadram-se no contexto geral da Reforma Curricular, cujos princípios e orientações básicas foram definidos pela Lei de Bases do Sistema Educativo e posteriormente concretizados no Decreto-Lei n.º 286/89 e noutros diplomas normativos.

Tal como se esclarece no texto introdutório que acompanha a publicação dos programas do 2.º e do 3.º ciclos do ensino básico, a nova organização dos planos curriculares consignada no citado decreto-lei assenta em grande parte nas propostas apresentadas pelo grupo de trabalho (GT) que funcionou sob a coordenação do Prof. Doutor Fraústo da Silva no âmbito da Comissão de Reforma do Sistema Educativo, tendo cabido ao mesmo GT a escolha das equipas encarregadas de produzir as propostas programáticas específicas para as diferentes áreas disciplinares, bem como assegurar a orientação e o acompanhamento dessa tarefa.

Para um melhor esclarecimento do modo como decorreu o processo de desenvolvimento curricular então levado a cabo, remete-se para o texto introdutório atrás referido. Aqui apenas se inclui uma chamada de atenção para as intenções básicas gerais que se reflectiram com maior incidência sobre as opções tomadas quanto ao ensino secundário.

A primeira dessas intenções centra-se na unidade e coerência do conjunto da programação. Foi adoptado um esquema básico de desenvolvimento curricular que todas as equipas respeitaram, embora sem rigidez, de modo a garantir a homogeneidade formal dos textos programáticos, homogeneidade essa que traduz simultaneamente a subordinação ao mesmo corpo de princípios pedagógicos. E houve ainda a preocupação de articular as diferentes parcelas do currículo, tarefa facilitada no que concerne à articulação vertical, pelo facto de as equipas, com excepção da que elaborou os programas do 1.º ciclo, terem carácter disciplinar, responsabilizando-se, portanto, cada uma delas por todos os planos de estudo da mesma disciplina desde o 2.º ciclo do ensino básico ao ensino secundário.

Será importante que os agentes educativos se apercebam da unidade global do currículo, da articulação vertical e horizontal das diferentes disciplinas e da estrutura organizativa do ensino secundário. Não foi viável publicar em conjunto num único volume os programas deste nível de ensino, dada a grande diversidade de alternativas de organização disciplinar que a sua estrutura flexível faculta. Mas os professores encontram adiante, nesta introdução, o enunciado dos objectivos gerais e a explanação dos planos curriculares, de modo a poderem situar cada disciplina no seu enquadramento global. Para avaliarem da articulação vertical e horizontal, recomenda-se que confrontem cada um dos programas com os das disciplinas homólogas do ensino básico, bem como com os das disciplinas próximas ou afins do ensino secundário.

Outra das intenções fundamentais do novo currículo que é forçoso sublinhar respeita à natureza do seu projecto pedagógico. Procurou-se, com efeito, imprimir uma nova orientação ao processo educativo, fazendo-o convergir para a formação integral dos alunos, sendo, neste sentido, assinalado um papel nuclear ao desenvolvimento de atitudes e à consciencialização de valores e subordinando-se a aquisição de conhecimentos ao domínio de aptidões e capacidades. Ora tal projecto não poderá deixar de reflectir-se na reformulação das metodologias de ensino-aprendizagem relativamente aos padrões tradicionais, apelando--se para a intensa participação de cada aluno na construção e avaliação das suas aprendizagens e para o incentivo da sua autonomia como sujeito intelectual e moral.

Se tais directrizes foram já preocupação dominante dos planos de estudo do ensino básico, ganharam, como se impunha, maior ênfase e relevância no ensino secundário. Para essa relevância concorrem duas ordens de considerações, uma de natureza psicopedagógica, outra relativa à função social da etapa terminal do currículo.

No plano psicopedagógico, importa efectivamente ter em conta que os alunos se encontram numa fase decisiva da construção da sua autonomia pessoal, sendo indispensável que o sistema de ensino lhes proporcione experiências mobilizadoras de um pleno domínio de competências intelectuais e de uma segurança de atitudes no plano socioafectivo.

Por sua vez, a função social do ensino secundário, enquanto patamar de formação para o ingresso na vida activa ou para o prosseguimento de estudos de grau médio ou superior, impõe que se prossigam metas mais exigentes de desenvolvimento, tendo em vista tanto quanto possível a maturidade sociocultural. Assim se explica que os programas deste nível de ensino, além de visarem um maior grau de aprofundamento e de complexidade das aprendizagens, tenham inflectido num sentido mais instrumental, assegurando uma preparação propedêutica nas diversas áreas de formação — a científica, a humanística e a artística.

Informados pelas directrizes expostas, os programas apresentam-se como instrumentos reguladores do processo de ensino-aprendizagem. Têm por eixo um determinado núcleo de objectivos de desenvolvimento, em função dos quais se seleccionaram os conteúdos e as metodologias capazes de melhor servir a consecução das metas fixadas, incluindo ainda disposições relativas ao processo de avaliação que se pretende formativa e predominantemente orientada numa perspectiva cognitivista.

Os programas assumem um carácter prescritivo. No entanto, revestem-se intencionalmente de grande generalidade, na convicção de que é forçoso deixar em aberto um vasto campo de possibilidades alternativas de desenvolvimento curricular, a eleger de acordo com as condições concretas do terreno pedagógico. As áreas de flexibilidade que se desenham no contexto normativo geral poderão dar lugar a experiências de aprendizagem que vão ao encontro das motivações de alunos e professores e permitirão, sobretudo, dar resposta, como expressamente se recomenda na Lei de Bases do Sistema Educativo, às especificidades da região ou do meio local.

Se por um lado, se procurou salvaguardar em muitos casos a abertura e a flexibilidade do currículo, por outro entendeu-se necessário que os programas constituissem instrumentos eficazes para a orientação do processo de ensino-aprendizagem. Neste sentido, os textos programáticos de base são seguidos de planos de organização e sequencialização desse processo, concebidos fundamentalmente como auxiliares da prática instrucional e nos quais se contêm importantes orientações para um melhor entendimento das metas pretendidas.

Resta sublinhar que os programas continuam a ser projectos em aberto, cuja reformulação aguarda os resultados da sua aplicação experimental e os contributos críticos dos intervenientes no processo educativo.

2 — OBJECTIVOS GERAIS

A Lei de Bases do Sistema Educativo determina, no seu artigo 10.º, que o ensino secundário se organiza segundo formas diferenciadas, contemplando a existência de cursos predominantemente orientados para a vida activa ou para o prosseguimento de estudos e assinala-lhe, dentro deste quadro, um conjunto de objectivos gerais.

O grupo de trabalho a que se fez anteriormente referência propôs uma reordenação desses objectivos, reordenação que se mantém fiel ao espírito da Lei de Bases mas que configura de forma mais precisa, sistemática e discriminada as metas apontadas. Foi essa proposta que serviu de base ao trabalho de desenvolvimento curricular produzido pelas equipas, razão por que se enunciam seguidamente os objectivos de acordo com a sua formulação.

Em termos genéricos, e em paralelo com o ensino básico, poderemos apontar ao ensino secundário três grandes objectivos gerais:

- Criar as condições que permitam a consolidação e aprofundamento da autonomia pessoal conducente a uma realização individual e socialmente gratificante.

- Proporcionar a consolidação, aprofundamento e domínio de saberes, instrumentos e metodologias que fundamentem uma cultura humanística, artística, científica e técnica, e favoreçam, numa perspectiva de educação permanente, a definição de interesses e motivações próprios face a opções escolares e profissionais.

- Aprofundar valores, atitudes e práticas que preparem intelectual e afectivamente os jovens para o desempenho consciente dos seus papéis numa sociedade democrática.

Cada um destes objectivos pode ser desdobrado em objectivos específicos.

1 — No que se refere à dimensão pessoal, o ensino secundário procurará:

- Favorecer o desenvolvimento da autonomia pessoal, alicerçada numa consciência crítica dos interesses e valores e no conhecimento das capacidades e aptidões próprias, dentro de princípios de liberdade, responsabilidade e solidariedade.

- Estimular o desenvolvimento de atitudes de reflexão metódica, de abertura de espírito, de tolerância e de respeito pela diferença.

- Fomentar o desenvolvimento de atitudes e capacidades de relacionamento interpessoal, com base num espírito de confiança e cooperação.

- Promover o sentido crítico dos fenómenos e a capacidade de análise e de concepção de soluções alternativas para os problemas da realidade envolvente.

- Estimular o desenvolvimento de atitudes de iniciativa e criatividade conducentes a uma adaptação crítica à mudança.

- Desenvolver a sensibilidade para as criações culturais, artísticas e literárias.

- Incentivar o reconhecimento pelos valores da autodisciplina, da persistência e do trabalho.

2 — No que se refere ao domínio das aquisições fundamentais para o desempenho de papéis socialmente úteis, o ensino secundário visará:

- Assegurar que os alunos se identifiquem criticamente com a realidade portuguesa, proporcionando conhecimentos sólidos sobre a sua história, cultura, características do povo, problemas e desafios que enfrenta.

- Favorecer a utilização da língua portuguesa com correcção e fluência nos diversos modos de comunicação.

- Assegurar as condições necessárias para que os alunos possam exprimir-se com fluência pelo menos numa língua estrangeira.

- Promover o desenvolvimento, consolidação e aprofundamento de formas rigorosas e científicas de raciocínio.

- Fomentar a aquisição de competências culturais consistentes e o apreço pela cultura e pelos valores estéticos, tanto nacionais como estrangeiros.

- Facultar aos jovens conhecimentos necessários à compreensão de manifestações estéticas e culturais e possibilitar o aperfeiçoamento da sua expressão artística.

- Facultar contactos e experiências com o mundo do trabalho, fortalecendo os mecanismos de aproximação entre a escola e a comunidade e dinamizando a função inovadora e interventora da escola.

- Desenvolver capacidades de integração, elaboração e assimilação de informações e mensagens.

- Assegurar a compreensão dos elementos fundamentais da metodologia científica e a utilização das técnicas principais do trabalho intelectual.

- Proporcionar as bases teóricas necessárias para que os alunos se familiarizem com alguns grandes sistemas de interpretação da realidade.

- Favorecer a orientação e formação profissional dos jovens através da preparação técnica e tecnológica com vista à entrada no mundo do trabalho.

3 — No que se refere à dimensão para a cidadania, caberá ao ensino secundário:

- Favorecer a compreensão dos mecanismos de organização e funcionamento dos diferentes grupos nos quais está inserido.

- Proporcionar a existência de vivências formais e não formais que favoreçam:
  - o aprofundamento da capacidade de analisar criticamente informações e situações do quotidiano pessoal, local e nacional;
  - o domínio de capacidades, hábitos e técnicas de trabalho pessoal e em equipa;
  - a assunção efectiva de responsabilidades de âmbito escolar e cívico.

- Fomentar uma atitude responsável e criativa na defesa e melhoria da qualidade de vida.

- Favorecer a compreensão da sexualidade como factor positivo e enriquecedor da personalidade e do relacionamento.

- Desenvolver as capacidades de compreensão e intervenção no relacionamento com outras culturas e espaços, designadamente os países de língua oficial portuguesa, a comunidade europeia e outros organismos e instituições internacionais.

- Formar, a partir da realidade concreta da vida local, regional e nacional e no apreço pelos valores permanentes da sociedade em geral e da cultura portuguesa em particular, jovens interessados na resolução dos problemas do País e sensibilizados para os problemas da comunidade.

3 — ESTRUTURA CURRICULAR

Apresentando-se pela primeira vez na história do nosso sistema educativo como uma sequência curricular de três anos, o ensino secundário constitui-se simultaneamente como um fecho da formação geral e uma preparação propedêutica para a futura carreira de estudos ou profissional. Esta dupla função, que se desmultiplica quanto à segunda vertente, numa pluralidade de vias, implica necessariamente que a sua estrutura organizativa se revista de grande complexidade.

Efectivamente, no artigo 10.º da Lei de Bases do Sistema Educativo, define-se que o ensino secundário se organiza «segundo formas diferenciadas, contemplando a existência de cursos predominantemente orientados para a vida activa ou para o prosseguimento de estudos, contendo todas elas componentes de formação de sentido técnico, tecnológico e profissionalizante e de língua e cultura portuguesas adequadas à natureza dos diversos cursos». É, por outro lado, garantida «a permeabilidade entre os cursos predominantemente orientados para a vida activa e os cursos predominantemente orientados para o prosseguimento de estudos».

É óbvio que o conjunto destas disposições teria de impor à estrutura curricular um carácter dinâmico e flexível, que oferecesse um leque diversificado de alternativas, permitisse a mobilidade dos alunos de acordo com a eventual alteração dos seus projectos de vida e assegurasse ao mesmo tempo a consolidação da formação geral e a aquisição de habilitações específicas.

Os planos curriculares oficializados pelo Decreto-Lei n.º 286/89 consagram esta opção. Neles se integram três componentes de formação, que se podem combinar com pesos diversos, de modo a proporcionar uma oferta ampla e diversificada de vias:

— uma componente de *formação geral* de frequência obrigatória, tendo como objectivos, por um lado, o aprofundamento da cultura geral, nomeadamente através do domínio da língua e da cultura portuguesas, do desenvolvimento da capacidade de utilização de uma língua estrangeira e da iniciação na reflexão crítica e filosófica e, por outro lado, a formação física;

— uma componente de *formação específica* variável segundo as opções dos alunos e que visa o aprofundamento, estruturação e sistematização de conhecimentos e competências metodológicas em domínios científicos, literários e artísticos especializados;

— uma componente de *formação técnica* com incidência no plano da prática em domínios fundamentais de actividade.

A formação geral é ainda complementada por um conjunto de disciplinas e de actividades de carácter multidisciplinar, obrigatórias ou facultativas, que visam o aprofundamento da formação pessoal e social dos alunos, a concretização dos saberes e do saber-fazer e a articulação entre a experiência escolar e o meio. São elas: a disciplina de Desenvolvimento Pessoal e Social, em alternativa com a de Educação Moral e Religiosa Católica, a Área-Escola e actividades de complemento curricular com carácter lúdico e cultural.

A formação geral constitui a base estável do currículo, proporcionando a todos os alunos o mesmo domínio de capacidades gerais. As formações específica e técnica são as componentes que variam segundo a diversidade dos rumos livremente escolhidos pelos alunos. Essa escolha respeitará em primeiro lugar à natureza do curso — *orientado para a vida activa* ou *orientado para o prosseguimento de estudos* — determinando uma diferente distribuição do peso de tempos lectivos destinado a cada uma das componentes, ou seja, uma maior incidência na formação técnica, no primeiro caso, e o reforço da formação específica, no segundo. Dentro deste quadro, porém, abre-se um campo de opções bastante flexível, podendo os alunos, em princípio, escolher os conjuntos de disciplinas que pretendem frequentar.

A leitura, à luz dos princípios enunciados, dos quadros que adiante se apresentam permite obter uma visão do edifício curricular do ensino secundário.

O primeiro quadro, que traduz o disposto no Decreto-Lei n.º 286/89, com algumas alterações decorrentes de posteriores despachos ministeriais, respeita à estrutura geral do currículo, indicando a forma como se deverá distribuir a carga horária das diferentes componentes de formação, consoante a natureza dos cursos. A aplicação experimental veio demonstrar que não será possível respeitar em todos os casos os limites de horário nele prescritos. Não obstante, é este quadro que continua a fornecer as balizas de referência fundamentais, não sendo de admitir combinações curriculares que impliquem desvios acentuados em relação ao que nele se dispõe.

Os restantes quadros comportam igualmente alterações relativamente ao que se encontra estipulado no referido decreto-lei, atestando essas alterações a preocupação de constante ajustamento às necessidades sociais e às condições de funcionamento das escolas. De resto, as listas de disciplinas que integram as formações específica e técnica e em especial os cursos predominantemente orientados para a vida activa poderão ser objecto de novos desenvolvimentos que se venham a revelar vantajosos ou adequados.

Torna-se evidente a necessidade de todos os agentes do sistema educativo e nomeadamente os seus mais directos clientes se aperceberem da sua orgânica e funcionalidade. Aos professores, em particular, será útil situarem a(s) disciplina(s) que leccionam no contexto curricular concreto que cada aluno elegeu, a fim de se aperceberem das expectativas que eles depositam no seu estudo.

ESTRUTURA GLOBAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

	CURSOS PREDOMINANTEMENTE ORIENTADOS PARA O PROSSEGUIMENTO DE ESTUDOS			CURSOS PREDOMINANTEMENTE ORIENTADOS PARA O INGRESSO NA VIDA ACTIVA		
	10.º ANO	11.º ANO	12.º ANO	10.º ANO	11.º ANO	12.º ANO
Formação geral	12/13	12/13	7/6	12/13	12/13	7/6
Formação específica	12/13	12/13	15/18	12/13	8	6
Formação técnica	6	6	6	6	10	18

ÁREA-ESCOLA — «... área curricular não disciplinar com a duração anual de 95 a 110 horas, competindo à escola decidir a respectiva distribuição, conteúdo e coordenação» (ponto 1 do artigo 6.º do Decreto-Lei n.º 286/89).

ACTIVIDADES DE COMPLEMENTO CURRICULAR — «... de carácter facultativo e natureza eminentemente lúdica e cultural, visando a utilização criativa e formativa dos tempos livres dos educandos» (ponto 1 do artigo 8.º do mesmo decreto-lei).

FORMAÇÃO GERAL — constituída pelas disciplinas cuja frequência é obrigatória para todos os alunos.

DISCIPLINAS	HORÁRIO SEMANAL		
	10.º ANO	11.º ANO	12.º ANO
Português A ou *B* (*a*)	5/3	5/3	5/3
Introdução à Filosofia	3	3	–
Língua Estrangeira I ou *II*	3	3	–
Educação Física	(*b*) 3 (2)	(*b*) 3 (2)	(*b*) 3 (2)
Desenvolvimento Pessoal e Social ou *Educação Moral e Religiosa Católica* (ou de outras confissões)	1	1	1

(*a*) Cinco horas para os alunos que escolheram uma formação no domínio dos estudos humanísticos.
(*b*) De acordo com as possibilidades da escola.

FORMAÇÃO ESPECÍFICA — constituída pela lista de disciplinas que se segue, de entre as quais os alunos farão as suas opções.

DISCIPLINAS (a)	HORÁRIO SEMANAL 10.º ANO (b)	11.º ANO (b)	12.º ANO (c)
Matemática	4	4	4
Filosofia	–	–	4
Ciências Físico-Químicas	4	4	–
Física	–	–	5
Química	–	–	5
Ciências da Terra e da Vida	4	4	–
Geologia	–	–	5
Biologia	–	–	5
História	4	4	4
Geografia	4	4	–
Introdução à Economia	4	4	–
Introdução ao Desenvolvimento Económico e Social	–	–	4
Sociologia	–	–	3
Psicologia	–	–	3
Introdução ao Direito	–	–	3
Latim	4	4	4
Grego	4	4	4
Língua Estrangeira I ou *II* (cont.)	–	–	3
Língua Estrangeira (nível inicial ou de cont.) (*d*)	4	4	4
História da Arte (*e*)	4/3	4/3	4/3
Desenho e Geometria Descritiva A	3	3	3
Desenho e Geometria Descritiva B	–	–	3
Teoria do Design	–	–	3
Materiais e Técnicas de Expressão Plástica	3	3	3
Formação Musical (*f*)	3	3	3
Análise e Técnica de Composição (*f*)	3	3	3
História da Música (*f*)	3	3	3
Acústica Musical (*f*)	–	–	3

(*a*) A lista de disciplinas e a sua ordem têm carácter indicativo dentro dos parâmetros estabelecidos no n.º 5 do artigo 47.º da Lei de Bases do Sistema Educativo.

(*b*) Três disciplinas à escolha (quatro no ensino vocacional da música).

(*c*) Três a cinco disciplinas à escolha.

(*d*) De frequência obrigatória quando no ensino básico tiver sido estudada apenas uma língua estrangeira — vd Despacho n.º 123/ME/91.

(*e*) Três horas para os alunos que escolheram Matemática e/ou Física.

(*f*) A frequência destas disciplinas exige a frequência da disciplina opcional de Educação Musical no 3.º ciclo do ensino básico ou a realização de estudos e práticas devidamente certificadas.

FORMAÇÃO TÉCNICA — constituída:

1 — Nos cursos predominantemente orientados para o prosseguimento de estudos, pelas disciplinas/blocos que se seguem, de entre os quais os alunos farão as suas escolhas.

DISCIPLINAS/BLOCOS (*a*)	HORÁRIO SEMANAL		
	I	II	III
Oficina de Expressão Dramática	6	6	6
Oficina de Artes	6	6	6
Técnicas de Organização Empresarial	6	6	–
Técnicas Laboratoriais:			
· *Física*	3	3	3
· *Química*	3	3	3
· *Biologia*	3	3	3
Desporto	6	6	6
Introdução à Informática e aos Computadores	3	3	–
Métodos Quantitativos (*b*)	3	–	–

(*a*) As disciplinas organizam-se em *blocos* de três tipos: só com um ano de duração (I), com dois anos de duração (I, II) e com três anos de duração (I, II, III). Em cada primeiro ano de funcionamento de qualquer destes tipos de blocos, poderão matricular-se alunos do 10.º, do 11.º ou do 12.º anos. No segundo ano de funcionamento, só poderão inscrever-se os alunos sucedidos no primeiro; no entanto, a frequência do primeiro ano de um determinado *bloco* não obriga à frequência do(s) ano(s) subsequente(s).

(*b*) Obrigatória para os alunos que não frequentam Matemática na componente de Formação Específica.

2 — Nos cursos predominantemente orientados para a vida activa, por conjuntos fixos de disciplinas para cada curso.

Até à presente data, estão criados os cursos tecnológicos de Química, *Design*, Administração e Comunicação, apresentando em comum com os cursos predominantemente orientados para o prosseguimento de estudos, a componente de formação geral e duas disciplinas, obrigatórias, da componente de formação específica. A formação técnica, também ela constituída por disciplinas obrigatórias, concretiza a maior incidência que esta formação assume nestes cursos.

PROGRAMAS DAS DISCIPLINAS

MATEMÁTICA

PARTE I

1 — INTRODUÇÃO

A apresentação do programa de Matemática para o ensino secundário implica a necessidade de explicitar as opções que o fundamentam, no referente à determinação de finalidades e objectivos, ao estatuto dos intervenientes no processo ensino-aprendizagem e aos conteúdos programáticos.

As opções tomadas procuram ir ao encontro das expectativas sociais respeitantes às competências e atitudes que devem ser desenvolvidas neste nível de ensino, tendo em conta nomeadamente os princípios estabelecidos na Lei de Bases do Sistema Educativo e no projecto curricular em que a disciplina se integra.

Reconhece-se que os jovens no ensino secundário se encontram numa fase avançada de construção das estruturas formais da inteligência e da sua identidade pessoal e que aspiram a uma inserção próxima na sociedade.

Encontrando-se a Matemática integrada na componente de formação específica comum aos dois grandes tipos de cursos que estruturam o ensino secundário — cursos predominantemente orientados para o prosseguimento de estudos e cursos predominantemente orientados para a Vida Activa — terá de responder simultaneamente a uma diversidade de objectivos:

– contribuir para a formação pessoal socialmente perspectivada;

– conferir as competências requeridas tanto para o prosseguimento de estudos como para a integração imediata no mundo do trabalho.

Tem ainda de ter presente que:

– o ensino secundário sucede a um ensino básico que, sendo obrigatório até aos 15 anos, teve de atender a alunos com um elevado grau de heterogeneidade de interesses, necessidades e motivações;

– o programa se destina a um ciclo de três anos, com apenas quatro horas semanais em cada ano.

Representa este programa um compromisso que pretende ainda responder de forma adequada a uma situação complexa que um longo processo de apreciação do ensino da Matemática em Portugal permitiu diagnosticar. Como componente básica, refere-se a informação proporcionada:

· pela avaliação dos resultados finais do rendimento dos alunos, desenvolvida ao longo dos últimos anos, que acusa um alto grau de insucesso, sintomático de uma crescente relação negativa dos alunos com a Matemática;

· pelo resultado das avaliações efectuadas aos programas dos 5.º ao 9.º anos ([1]).

([1]) Estudos desenvolvidos pelo GEP e IGE.

- por uma análise das condições pedagógicas que as escolas oferecem, bem como da grande diversidade de perfis de formação dos docentes que leccionam esta disciplina no decurso dos ensinos básico e secundário;

- pelo acompanhamento de debates e consultas a instituições e personalidades dos ensinos superior e secundário;

- e ainda pela análise de currículos de Matemática de outros países e debates com alguns dos seus responsáveis.

Procurando manter a coerência e a consistência do currículo ao longo de toda a escolaridade, seleccionaram-se objectivos que, vindo na sequência dos do ensino básico, procuram contemplar a especificidade deste nível de ensino e a maturidade psicológica dos seus alunos.

Continuando a ser eixos organizadores do currículo o desenvolvimento de capacidades/aptidões e atitudes/valores, a aquisição de conhecimentos assume agora peso relevante.

Os objectivos seleccionados implicam uma renovação metodológica que urge levar a cabo e assenta no pressuposto de ser o aluno agente da sua aprendizagem.

Neste contexto justifica-se uma primeira abordagem intuitiva e experimental que se propõe para alguns temas dos 10.º e 11.º anos.

Faz-se ainda um apelo sistemático à ligação da Matemática à vida prática e a outras ciências, procurando contemplar todas as etapas do desenvolvimento do pensamento científico. Pretende-se com este programa contribuir para o desenvolvimento de uma cultura científica, técnica e humanística.

O sucesso desta formação passa pela importância que se confere ao contrato pedagógico a estabelecer com o aluno, implicando-o responsavelmente no processo ensino-aprendizagem.

Para a consecução das finalidades e objectivos propostos foram seleccionados os seguintes temas:

Números e Cálculo
Geometria e Trigonometria
Funções e Análise Infinitesimal
Estatística e Probabilidades

para os quais se propõe um desenvolvimento em espiral, retomando e ampliando cada tema ao longo dos três anos do ciclo com o objectivo de dar tempo à construção e compreensão dos conceitos e à consolidação de técnicas e de promover uma visão integrada dos vários conteúdos matemáticos. Portanto, nenhum dos grandes temas será tratado de uma só vez no ciclo e, em certos casos, nem mesmo num ano.

Relativamente ao programa anteriormente em vigor, três aspectos convém destacar:

– a abordagem das questões de análise é mais desformalizada, quanto à simbologia lógica, e mais apoiada na perspectiva numérica com o auxílio da calculadora, não se exigindo virtuosismos de cálculo;

– o peso relativo da geometria aumentou, por se considerar tema privilegiado para a consecução de muitos dos objectivos gerais propostos, como o desenvolvimento da capacidade de interpretar e intervir no meio envolvente, de estruturar o raciocínio lógico, de analisar e sintetizar, de comunicar pela imagem... Simultaneamente é motivadora pela facilidade de concretizações e é útil para estudos subsequentes pelas técnicas que introduz (referenciais cartesianos, cálculo vectorial, razões trigonométricas...)

  Sempre que possível, o estudo da geometria desenvolve-se paralelamente no plano e no espaço;

– muitos dos temas são enquadrados numa perspectiva histórico-cultural, com destaque para a respectiva importância no progresso científico e técnico do mundo moderno.

As unidade seleccionadas para os 10.º e 11.º anos são de leccionação obrigatória, assim como as seis primeiras do 12.º ano, sendo a última unidade à escolha entre as opções indicadas, de acordo com os interesses da turma.

A avaliação considera-se parte integrante do processo de ensino-aprendizagem, com a função de o regular e orientar, com um papel formativo de desenvolvimento da autoconfiança do aluno.

2 — FINALIDADES

São finalidades da disciplina no ensino secundário:

- Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real.
- Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade.
- Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constituam suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida activa.
- Contribuir para uma atitude positiva face à Ciência.
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade.

3 — OBJECTIVOS GERAIS

VALORES/ATITUDES

- **Desenvolver a confiança em si próprio:**
  - Exprimir e fundamentar as suas opiniões.
  - Revelar espírito crítico, de rigor e de confiança nos seus raciocínios.
  - Abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade.
  - Procurar a informação de que necessita.
- **Desenvolver interesses culturais:**
  - Manifestar vontade de aprender e gosto pela pesquisa.
  - Interessar-se por notícias e publicações relativas à Matemática e a descobertas científicas e tecnológicas.
  - Apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo.
- **Desenvolver hábitos de trabalho e persistência:**
  - Elaborar e apresentar os trabalhos de forma organizada e cuidada.
  - Manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova.
- **Desenvolver o sentido da responsabilidade:**
  - Responsabilizar-se pelas suas iniciativas e tarefas.
  - Avaliar situações e tomar decisões.
- **Desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação:**
  - Colaborar em trabalhos de grupo, partilhando saberes e responsabilidades.
  - Respeitar a opinião dos outros e aceitar as diferenças.
  - Intervir na dinamização de actividades e na resolução de problemas da comunidade em que se insere.

CAPACIDADES/APTIDÕES

- **Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real:**
  - Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução.
  - Seleccionar estratégias de resolução de problemas.
  - Formular hipóteses e prever resultados.
  - Interpretar e criticar resultados no contexto do problema.
  - Resolver problemas nos domínios da Matemática, da Física, da Economia, das Ciências Humanas, ...
- **Desenvolver o raciocínio e o pensamento científico:**
  - Descobrir relações entre conceitos de Matemática.
  - Formular generalizações a partir de experiências.
  - Validar conjecturas.
  - Fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados.
  - Compreender a relação entre o avanço científico e o progresso da humanidade.
- **Desenvolver a capacidade de comunicar:**
  - Comunicar conceitos, raciocínios, ideias, oralmente e por escrito, com clareza e progressivo rigor lógico.
  - Interpretar textos de Matemática.
  - Exprimir o mesmo conceito em diversas formas ou linguagens.
  - Usar correctamente o vocabulário específico da Matemática.
  - Usar a simbologia da Matemática.
  - Apresentar os textos de forma clara e organizada.

CONHECIMENTOS

- **Ampliar o conceito de número e desenvolver o cálculo:**
  - Aperfeiçoar o cálculo em $\mathbb{R}$ e usar a calculadora tirando partido das suas potencialidades.
  - Operar com expressões racionais, irracionais e exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
  - Resolver equações, inequações e sistemas.
  - Usar as noções de lógica indispensáveis à clarificação dos conceitos.
- **Ampliar os conhecimentos de Geometria no Plano e no Espaço:**
  - Resolver problemas de incidência, paralelismo e perpendicularidade no plano e no espaço, por via sintética e analítica.
  - Utilizar vectores no estudo do plano e do espaço, em referencial o.n..
  - Compreender e utilizar noções básicas de cónicas.
- **Iniciar o estudo da Análise Infinitesimal:**
  - Estudar sucessões definidas de diferentes formas.
  - Aplicar conhecimentos de Análise Infinitesimal no estudo de funções de variável real.
  - Interpretar fenómenos e resolver problemas recorrendo a funções e seus gráficos.
- **Ampliar os conhecimentos de Estatística e Probabilidades:**
  - Interpretar e comparar distribuições estatísticas.
  - Resolver problemas de contagem.
  - Resolver problemas envolvendo cálculo de probabilidade.
- **Conhecer aspectos da História da Matemática:**
  - Conhecer personalidades e factos marcantes da História da Matemática e relacioná-los com momentos históricos de relevância cultural ou social.

4 — CONTEÚDOS

Conteúdos Temáticos

NÚMEROS E CÁLCULO

As técnicas de cálculo adquiridas no 3.º ciclo são agora consolidadas e aperfeiçoadas para permitir a resolução de novos problemas da Matemática, de outras Ciências e da vida prática.

O cálculo não constitui um objectivo em si, destinando-se a ser usado para facilitar ou aprofundar o estudo de certas unidades temáticas, nomeadamente, o estudo de Funções, de Geometria Analítica, de Cálculo Vectorial, de Estatística e de Probabilidades, o que lhe confere um carácter de pré-requisito para estes temas.

O uso de calculadora científica, que é obrigatório neste ciclo, deve ser visto não só como um recurso a uma ferramenta auxiliar de cálculo mas como meio para desenvolver aptidões e incentivar o espírito de pesquisa.

Para clarificar a resolução de equações, inequações e sistemas, serão introduzidas algumas noções de Lógica.

Incluem-se as noções de grupo e de corpo que darão ao estudante, no final da escolaridade do ensino secundário, uma visão estruturada dos grandes conjuntos numéricos.

— O conjunto $\mathbb{R}$. Recta real, operações com radicais, relações de ordem, valor absoluto. Inequações com módulos. Operações com condições e com conjuntos.

— Noções básicas de análise combinatória.

— Inequações de 2.º grau. Leis de De Morgan.

— Equações e inequações fraccionárias.

— Resolução de sistemas com três equações a três incógnitas: método de Gauss (notação matricial).

— Equações e identidades trigonométricas; equações envolvendo logaritmos.

— Noção de grupo e de corpo; os corpos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Operações com números complexos.

— Como opção, no 12.º ano:

· operações com números complexos na forma trigonométrica.

GEOMETRIA

A Geometria assume um papel de relevo, considerando o seu poderoso contributo para a estruturação do pensamento e para a compreensão do meio.

As actividades geométricas localizam-se principalmente nas unidades do programa denominadas Geometria Analítica e Trigonometria, embora também estejam presentes no estudo dos reais, das sucessões e de todas as unidades de Análise Infinitesimal, do 10.º ao 12.º ano, que se encontram organizadas a partir do estudo gráfico de funções.

O aluno deverá ser incentivado a recorrer frequentemente a esboços, diagramas e esquemas gráficos na resolução de diversos problemas.

Considera-se útil e formativo ampliar os conhecimentos de Geometria no espaço numa perspectiva hipotético-dedutiva antes da abordagem ao método cartesiano.

Os referenciais a usar são ortogonais e monométricos (o.n.); os problemas são tratados em paralelo, no plano e no espaço, proporcionando uma visão integrada da Geometria. O vector livre usa-se como instrumento de cálculo em referencial o.n. e as suas propriedades são exemplificadas, tanto no plano como no espaço, sem contudo formalizar a estrutura do espaço vectorial. O produto escalar permite estudar a perpendicularidade no plano e no espaço, resolver problemas diversos e demonstrar propriedades.

O estudo do paralelismo e da perpendicularidade é desenvolvido em espiral do 10.º ao 12.º ano. O estudo das cónicas insere-se numa perspectiva histórica e cultural; permite a realização de trabalhos interdisciplinares sobre órbitas de astros, satélites artificiais, etc.; para o seu estudo analítico recorrer-se-á quando oportuno ao cálculo infinitesimal.

Em trigonometria estudam-se as funções seno, co-seno, tangente, como funções de amplitude de ângulo e como funções de variável real, e aplicam-se à resolução de problemas.

— Ampliação de conhecimentos de geometria no espaço: axiomas e teoremas, aplicação de critérios de paralelismo e de perpendicularidade.

— Interpretação de condições em referenciais cartesianos no plano e no espaço.

— Operações com vectores em referencial o.n., no plano e no espaço.

— Equações da recta no plano.

— Paralelismo de rectas no plano.

— Produto escalar e perpendicularidade de rectas no plano.

— Demonstração de propriedades com o auxílio do produto escalar.

— As cónicas.

— Paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos no espaço.

— Seno, co-seno e tangente como função de amplitude de ângulo ou arco (estudo no círculo trigonométrico).

— Analogia dos senos.

— Resolução de equações trigonométricas.

— Identidades trigonométricas.

— Estudo analítico das funções seno, co-seno e tangente como funções reais de variável real.

— Aplicação à resolução de problemas.

Como opção no 12.º ano:

— Transformações geométricas.

— Espaços vectoriais.

ANÁLISE INFINITESIMAL

O estudo das funções é fundamental para a interpretação das leis que regulam os mais variados fenómenos do mundo em que vivemos.

Partindo do estudo intuitivo de gráficos de funções envolvendo variáveis concretas da vida real ou de outras disciplinas introduzem-se experimentalmente alguns conceitos indispensáveis, antes da abordagem do conceito de limite.

A Análise Infinitesimal apoia-se no estudo das sucessões mas este será reduzido ao indispensável: estudam-se experimentalmente algumas sucessões de referência (infinitésimos e infinitamente grandes) que servirão de termos de comparação para outras. Prevê-se apenas o essencial para o aluno poder entender a definição à Heine de limite de função real de variável real.

Começa pelo estudo de funções racionais e em sucessivas abordagens alarga-se a outros tipos de funções.

A primeira e a segunda derivadas são usadas no estudo do comportamento de funções algébricas, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, no traçado dos respectivos gráficos e ainda na determinação de tangentes e normais a uma curva.

O acento tónico é posto no conceito de derivada, mas pretende-se deixar ao aluno que termina o ciclo de estudos o conhecimento de que a área sob o gráfico de uma função obedecendo a certas condições, é uma nova função cuja derivada é a primeira. Calculam-se algumas áreas sob gráficos em casos muito simples.

— Características gerais de uma função. Interpretação e elaboração de gráficos por pontos.

— Função quadrática: gráfico, monotonia, sinal.

— Outras funções racionais e alguns exemplos de funções com radicais; operações com funções. Domínios. Noção de sucessão.

— Infinitésimos. Infinitamente grandes. Sucessões convergentes. Unicidade do limite. Progressões.

— Funções racionais: limite e continuidade num ponto. Continuidade num intervalo. Teorema de Bolzano. Derivada num ponto e função derivada (1.ª e 2.ª). Aplicações. Gráficos. Problemas de optimização. Cálculo de áreas sob gráficos em casos muito simples.

— Extensão do estudo feito para funções racionais sucessivamente a:

- funções com um radical;
- funções trigonométricas (seno, co-seno, tangente);
- funções exponenciais e logarítmicas (base $a > 1$, em especial base e).

Como opção no 12.º ano:

— Complementos sobre primitivação e casos muito simples de equações diferenciais.

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADES

A interpretação da informação estatística e probabilística é indispensável para compreender a sociedade, nomeadamente, para entender e avaliar informações veiculadas pelos meios de comunicação social.

As técnicas de tratamento de informação e o cálculo das probabilidades fazem hoje parte da «bagagem» exigida por qualquer carreira científica ou técnica.

O estudo da Estatística não se resume à elaboração de tabelas ou de gráficos nem ao cálculo de medidas de localização ou de dispersão; estas são instrumentos que, devidamente interpretados, apoiam a compreensão de propriedades globais da população a que se referem. Por isso o estudo desta área, que vem sendo preparado ao longo do 2.º e do 3.º ciclos, é agora retomado no sentido de ampliar as capacidades de interpretar e comparar distribuições e organizar dados.

As actividades a desenvolver devem referir-se, de preferência, a dados reais e recentes (informações meteorológicas, desportivas, agrícolas...) ou ligadas a disciplinas como a Biologia, a Geografia, a Economia, ...

A possibilidade de quantificar a incerteza, mediante o conceito de probabilidade, abre novas perspectivas sobre as aplicações da Matemática as quais enriquecem a cultura dos jovens e a sua preparação para entender o mundo que os rodeia.

— Objecto da Estatística; Estatística Descritiva e Estatística Indutiva.

— Referência histórica sobre a evolução desta ciência.

— Organização e interpretação de dados; tabelas e gráficos.

— Medidas de tendência central: média, moda, mediana e quartis.

— Medidas de dispersão: diagramas extremos e quartis, amplitude, variância, desvio padrão.

— Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva).

— Referência à origem, evolução, conteúdo e importância do Cálculo das Probabilidades.

— Experiências aleatórias; acontecimentos.

— Lei dos grandes números; conceito frequencista de probabilidade.

— Distribuições de frequências relativas e distribuições de probabilidades.

— Referência à curva de Gauss.

5 — ORIENTAÇÃO METODOLÓGICA

As finalidades e objectivos enunciados determinam que o professor, ao aplicar este programa, contemple equilibradamente:

- o desenvolvimento de atitudes;
- o desenvolvimento de capacidades;
- a aquisição de conhecimentos e técnicas para a sua mobilização.

Tendo como pressuposto *ser o aluno agente da sua própria aprendizagem*, propõe-se uma metodologia em que:

- os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas;
- os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização;
- se estabelece maior ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas e que enquadra o conhecimento numa perspectiva histórico-cultural.

Neste contexto, destaca-se a importância das actividades a seleccionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o aluno a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação.

Cabe ao professor, de acordo com a realidade da turma, encontrar o equilíbrio entre o número de trabalhos individuais e de grupo (a realizar dentro e fora da aula), assim como o espaço para a sua intervenção: dinamizando, questionando, fazendo sínteses, facultando informação ...

O programa pretende dar continuidade, sem brusca mudança de nível, às aprendizagens realizadas no 3.º ciclo, agora quase coincidente com o ensino obrigatório, ajustando-se ao nível de desenvolvimento e de cultura dos alunos. Parte-se, quando possível, de problemas e situações experimentais para que, com o apoio na intuição, o aluno aceda gradualmente à formalização dos conceitos. Assim, propõe-se um ensino em espiral, retomando e ampliando sucessivamente os temas, muitas vezes em contextos diferentes, de forma a permitir uma maturação dos conceitos, antes de nova ampliação. Este procedimento também proporciona uma oportunidade de relacionar os vários conceitos, promovendo uma visão integrada da Matemática.

A utilização obrigatória da calculadora que, além de ferramenta, é fonte de actividade, de investigação e de aprendizagem, abre caminho a uma futura utilização dos meios informáticos.

Capacidade de utilizar a Matemática

A análise de situações da vida real e a identificação de modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução, nomeadamente a propósito do estudo da Estatística e das Funções, constituem uma oportunidade de abordar o método científico.

A resolução de problemas, meio privilegiado para desenvolver o espírito de pesquisa, deve contemplar, além de situações do domínio da Matemática, outras, da Física, da Economia, da Geografia, ...

Raciocínio dedutivo

Neste ciclo o aluno será solicitado frequentemente a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a confirmar conjecturas, a demonstrar fórmulas e alguns teoremas.

Noções muito elementares de Lógica serão introduzidas à medida que se revelem úteis à clarificação de processos e de raciocínios.

Uma iniciação da Geometria no espaço por via axiomática (muito simplificada) visa dar aos alunos alguma cultura sobre a construção hipotético-dedutiva de uma Ciência e, ao mesmo tempo, criar oportunidades para afinar o raciocínio dedutivo.

Comunicação

Tendo em conta a estreita dependência entre os processos de estruturação do pensamento e da linguagem, é absolutamente necessário que as actividades tenham em conta a correcção da comunicação oral e escrita. O aluno deve verbalizar os raciocínios e discutir processos, confrontando-os com outros. Deve ser capaz de argumentar com lógica e recorrer, cada vez mais, ao longo do ciclo, à linguagem simbólica da Matemática, à sua precisão e ao seu poder de síntese.

Esta evolução decorrerá naturalmente da necessidade de comunicar aos outros as suas ideias.

É necessário proporcionar ao aluno oportunidade para expor um tema preparado, a resolução de um problema ou a parte que lhe cabe num trabalho de grupo.

Os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ..., devem ser apresentados de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado.

Perspectiva histórico-cultural

Actividades com uma perspectiva histórica humanizam o estudo da disciplina, mostrando a Matemática como ciência em construção. Proporcionam também excelentes oportunidades para pesquisa de documentação.

A informação sobre a génese e o percurso de um conceito ao longo dos tempos e a sua relação com o progresso da humanidade pode fomentar, ou aumentar, o interesse pelo tema em estudo, ao mesmo tempo que constitui uma fonte de cultura.

Papel do professor

Na concretização da metodologia proposta cabe ao professor ser simultaneamente dinamizador e regulador do processo ensino-aprendizagem, criando situações motivadoras e adoptando uma estratégia que implique o aluno na sua aprendizagem e desenvolva a sua iniciativa.

Assume, neste nível de ensino, importância fundamental o contrato pedagógico a estabelecer com o aluno, na negociação e definição de consensos para os projectos de trabalho, na participação activa e responsável na gestão do processo ensino-aprendizagem.

A valorização da vertente formativa da disciplina, só pode ser alcançada se se conseguir fomentar uma atitude positiva do aluno face à Matemática.

Recursos

A didáctica prevista para a Matemática no ensino secundário pressupõe a possibilidade de uso de materiais diversificados e de equipamento:

— Material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor);

— Material para o estudo da Geometria no espaço (sólidos geométricos, placas, arames...);

— Quadro quadriculado e papel milimétrico;

— Meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, *slides*, vídeo, ...);

— Livros para consulta (ver Bibliografia) e manuais;

— Outros materiais escritos (folhas com dados estatísticos, fichas de trabalho, fichas de avaliação, ...);

— Calculadoras científicas com possibilidade de introdução de um ou dois pequenos programas;

— Computador.

As calculadoras, que hoje já fazem parte da vida corrente, devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas também como meios incentivadores do espírito de pesquisa. O seu uso é obrigatório neste programa.

O computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios da representação gráfica de funções e da simulação, permite actividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a alunos e professores, sugerindo-se a sua utilização sempre que oportuno e possível.

Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados estatísticos (autarquias, clubes, hospitais, empresas, institutos, cooperativas, ...).

6 — AVALIAÇÃO

A avaliação é entendida na sua função reguladora e orientadora do processo ensino-aprendizagem, numa «óptica formativa favorecedora da confiança em si próprio», visando desenvolver a autonomia numa perspectiva de realização pessoal.

Assim, terá de ser constante no quotidiano da aula, de modo a orientar e a ajustar permanentemente o processo ensino-aprendizagem, permitindo ao professor controlar e melhorar a sua prática pedagógica e ao aluno implicar-se no próprio processo.

Uma vez que os conteúdos de aprendizagem abrangem os domínios dos conhecimentos, das capacidades e das atitudes, é objecto da avaliação a progressão do aluno em todos estes domínios.

Em rigoroso acordo com o ensino desenvolvido, a avaliação em Matemática deve dar informação sobre:

- a capacidade para mobilizar conhecimentos e técnicas na resolução de problemas da vida real, de Matemática e de outras disciplinas;
- a criatividade na resolução de situações e problemas;
- a capacidade para utilizar a linguagem matemática para comunicar ideias;
- a capacidade para raciocinar e analisar;
- o conhecimento e compreensão de conceitos e métodos;
- a atitude em relação à Matemática, em particular a sua confiança em fazer matemática;
- a perseverança e o cuidado postos na realização das tarefas e a cooperação no trabalho de grupo.

Os parâmetros enunciados poderão ser objecto de maior pormenorização, tal como se encontra explicitado nos objectivos gerais da disciplina, devendo o professor estabelecer as prioridades de acordo com as experiências de aprendizagem desenvolvidas.

A avaliação do progresso do aluno, de forma sistemática, intencional e contínua, quer em relação aos processos utilizados quer em relação aos resultados obtidos, desenvolve a autoconfiança e a capacidade de resolver problemas em vários contextos.

A avaliação da capacidade de comunicar em Matemática faz-se observando o modo como o aluno descreve processos, enuncia propriedades, expressa conceitos, formula problemas, compreende e avalia ideias expressas em Matemática, estando o professor particularmente atento ao desenvolvimento da clareza, precisão e adequação da linguagem utilizada.

Na avaliação da capacidade de raciocínio em Matemática, colher-se-á informação sobre os diferentes tipos de raciocínio utilizados, observando se o aluno justifica processos, faz e valida conjecturas, relaciona, generaliza, demonstra, tira conclusões e argumenta.

Incidindo a avaliação sobre a progressão de cada aluno, são de admitir ainda no ensino secundário diferentes ritmos na aquisição de um conceito, não se exigindo que todos os alunos atinjam o mesmo nível ao mesmo tempo. Critério semelhante é de aplicar quanto ao desenvolvimento de capacidades e de atitudes.

A avaliação a realizar ao longo de cada ano não se deve traduzir em juízos prematuros e definitivos que discriminem desde logo o aluno, impedindo-o de alcançar sucesso e comprometendo, porventura, o seu futuro escolar.

Uma avaliação formativa e contínua, que contemple todos os domínios de aprendizagem e respeite o ritmo do aluno, implica uma mudança na escolha de meios e instrumentos de avaliação.

É preciso prestar especial atenção à recolha de dados, que tem de ser sistemática, recorrendo à observação e registo regular, através de instrumentos adequados e diversificados.

São de utilizar:

— grelhas de análise;
— grelhas de observação;
— listas de verificação;
— questionários de opinião;
— testes, etc.

A observação, embora sistemática, pode ser breve e não é de excluir a observação intuitiva e pontual. À partida, nenhum tipo de informação deve ser excluído e nenhuma modalidade de recolha de informação pode ser desprezada. No entanto, a avaliação formativa, para ser eficaz, não exige uma acumulação de verificações, mas apenas as essenciais para que o professor e o aluno possam, de modo contínuo, ir efectuando o balanço do processo, permitindo ao professor desenhar actividades específicas de ajuda, tanto de recuperação como de reforço e aprofundamento, e ao aluno consciencializar os seus progressos e dificuldades, experimentar novos caminhos e aumentar a confiança em si próprio.

Para tanto, constituem meios de avaliação todas as actividades de aprendizagem (trabalhos individuais e de grupo, discussões e debates, exposições, escritas e orais, entrevistas...), assumindo, neste nível de ensino, relevo especial os trabalhos, tanto individuais como de grupo.

Compete ao professor construir o seu próprio sistema de observação, registo e intervenção, de acordo com a situação pedagógica e com a colaboração dos alunos, os quais deverão conhecer previamente os aspectos que serão objecto de observação, bem como os critérios a ter em conta na avaliação a efectuar, no âmbito dos objectivos seleccionados.

A auto-avaliação e a participação activa na avaliação de trabalhos individuais ou atitudes pessoais, a par da co--avaliação das várias tarefas, constituem modos de participação e implicação dos alunos na sua própria formação; contribuem para o desenvolvimento de atitudes de responsabilidade, cooperação e tolerância, fomentam a auto-estima, a afirmação progressiva da autonomia e a aceitação das diferenças.

Para que a avaliação assuma o seu carácter orientador e incentivador, é necessário que o professor comunique e comente, com cada aluno, os resultados das sucessivas avaliações, para efeitos de correcção ou reforço imediato e de valorização do esforço e progressão de cada um.

Uma avaliação formativa eficaz atenuará conflitos afectivos e contribuirá para fomentar uma atitude positiva face à Matemática, sem a qual não haverá aprendizagem.

PARTE II

PLANO DE ORGANIZAÇÃO E SEQUÊNCIA DO ENSINO-APRENDIZAGEM

Para esclarecimento dos pressupostos, que presidiram à elaboração deste programa e dos objectivos que ele pretende alcançar é imprescindível a leitura da PARTE I, onde estão expressas finalidades do ensino da Matemática neste ciclo, objectivos, linha metodológica, materiais e recursos, justificação das escolhas feitas, apresentação global dos conteúdos temáticos e avaliação.

Na PARTE II inclui-se o plano de distribuição e sequência dos temas, por ano e por unidades didácticas, um organigrama com as principais conexões entre as unidades didácticas dos 3 anos, gráficos com os pesos relativos dos temas de cada ano, e, finalmente, o desenvolvimento das várias unidades, respectivos objectivos específicos, sugestões metodológicas e gestão do tempo.

Gestão do programa

Na primeira parte deste programa apresentou-se cada tema numa perspectiva global para todo o ciclo. A segunda parte inclui uma proposta de sequência ensino-aprendizagem para cada um dos anos, 10.º, 11.º e 12.º, a qual se fundamenta nos seguintes pressupostos:

— Em cada ano, se possível, cada bloco temático não deve ser tratado de uma só vez nem independentemente dos outros temas. A subdivisão em várias unidades permite diversas ligações e reabordagens do mesmo conceito em contextos diferentes, favorecendo uma visão dinâmica e integrada da disciplina.

— A iniciar cada ano deve escolher-se uma unidade que permita desenvolver actividades ligadas a situações concretas e que não exija pré-requisitos especiais, para poder motivar a totalidade dos alunos.

— Há conteúdos sequenciais cuja ordenação não pode ser alterada.

— Há necessidade de aproveitar ligações relevantes entre temas diferentes.

— O tratamento da Geometria deve fazer-se paralelamente no plano e no espaço, uma vez que a transposição ao espaço tridimensional de questões elementares de Geometria Analítica plana se faz com facilidade e proporciona uma visão integrada da Geometria.

Para cada unidade indica-se o número de aulas previstas, o que pode ser encarado com flexibilidade mas que, no entanto, exprime o peso relativo e a profundidade do tratamento desejado.

No início do ano o professor deve estudar as articulações possíveis entre as diferentes unidades e tentar um planeamento que contemple momentos para actividades de recuperação e ainda momentos especialmente propícios para actividades de desenvolvimento, para trabalhos individuais e de grupo que ocupam mais tempo.

Se em dada unidade o professor investir numa metodologia que tenha exigido mais tempo que o previsto, será conveniente que noutra unidade procure ganhar algum tempo, nomeadamente recorrendo a outros métodos.

É indispensável que o professor, além de conhecer bem o programa do ano que vai leccionar, tenha uma perspectiva global do programa de todo o ciclo.

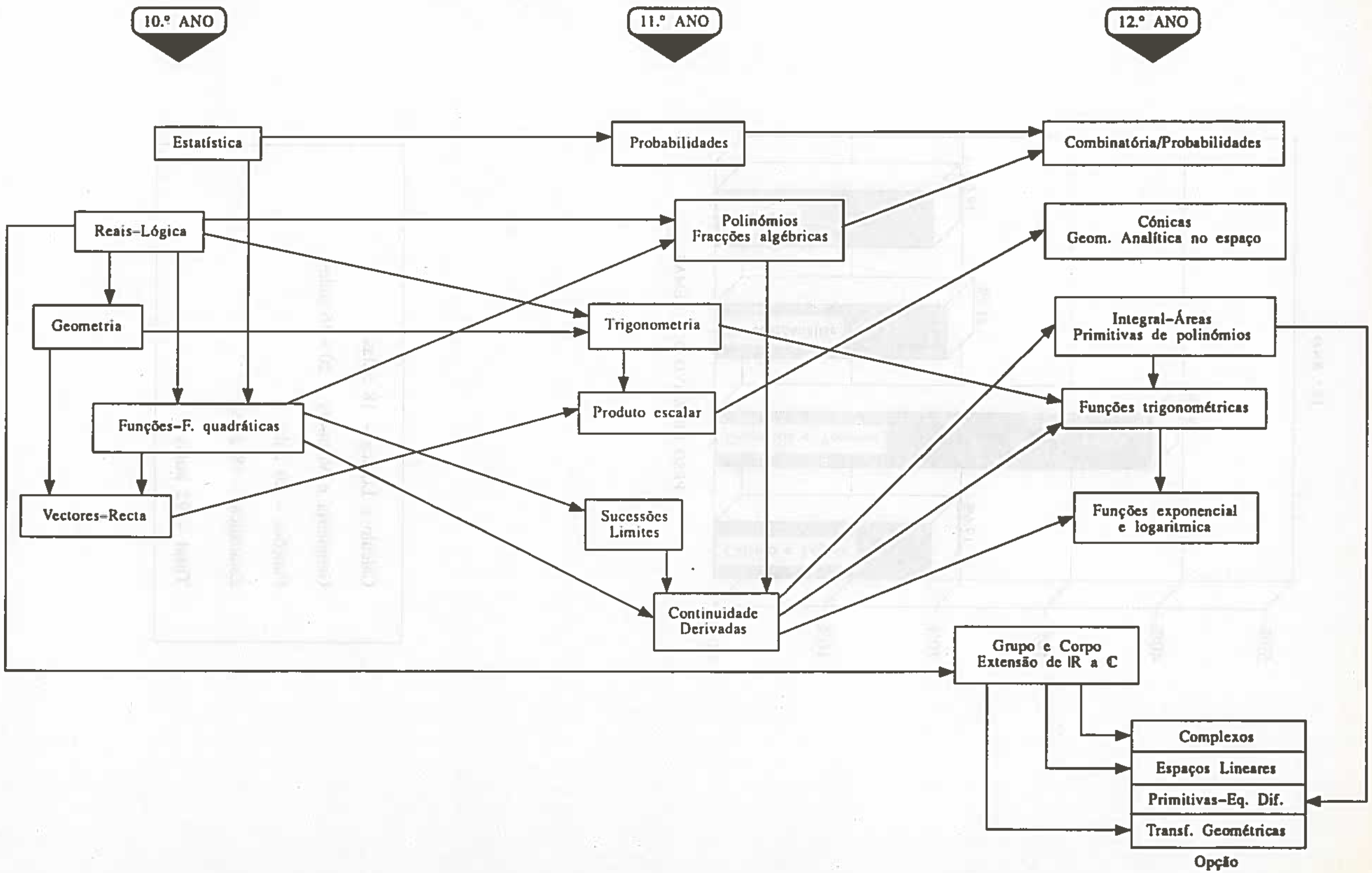
TEMAS	Estatística e Probabilidades	Números e Cálculo Algébrico	Geometria Analítica e Trigonometria	Funções e Análise Infinitesimal

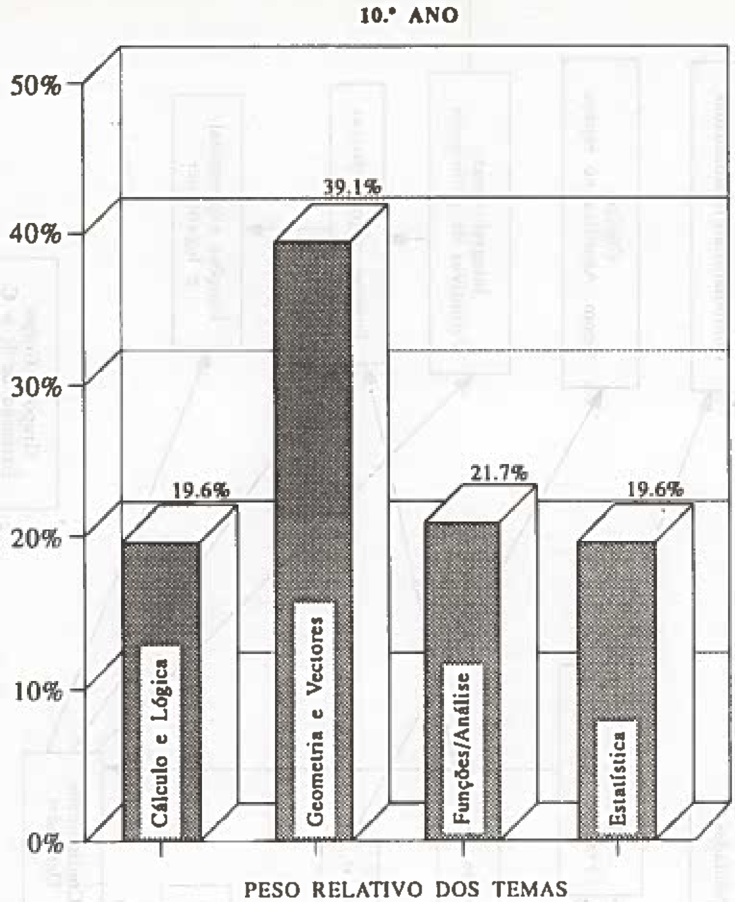
10.º ANO	11.º ANO	12.º ANO
1 — *NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA* · Representação e interpretação de distribuições estatísticas, com utilização de medidas de tendência central e de dispersão. Comparação de distribuições. O símbolo Σ · Distribuição bidimensional: estudo intuitivo. 2 — *O CONJUNTO* $\mathbb{R}$. *NOÇÕES DE LÓGICA* · Extensão de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$: a recta real. Operações com radicais. Ordem em $\mathbb{R}$; inequações. Valor absoluto. · Lógica: operações com condições e com conjuntos. Primeiras leis de De Morgan. 3 — *GEOMETRIA ANALÍTICA* I — *Introdução ao Método Cartesiano* · Ampliação de conhecimentos de Geometria no espaço. · Referenciais cartesianos ortonormados no plano e no espaço. 4 — *FUNÇÕES* I — *Generalidades. Função quadrática. Função módulo* · Funções definidas por tabelas e por fórmulas; interpretação e elaboração de gráficos por pontos. Características gerais de uma função. · Função quadrática. Função módulo. Generalidades. · Lógica: uso de quantificadores. 5 — *GEOMETRIA ANALÍTICA* II — *Vectores. Paralelismo* · Vectores em referencial ortonormado, no plano e no espaço. · Equações vectoriais da recta no plano e no espaço. · Equações cartesianas da recta no plano. Paralelismo. · Sistemas de duas equações a duas incógnitas.	1 — *PROBABILIDADES - Noções básicas* · Experiências aleatórias e acontecimentos. · Conceito frequencista de probabilidade. · Cálculo da probabilidade de um acontecimento. · Distribuição de frequências e probabilidades. 2 — *FUNÇÕES* II — *Funções racionais. Operações* · Polinómios e fracções algébricas. Operações. · Equações e inequações. · Funções polinomiais, funções racionais, funções com radicais quadráticos ou cúbicos. Domínios. · Operações com funções. Composição, inversão, restrição. 3 — *TRIGONOMETRIA* · Seno, co-seno e tangente — estudo no círculo trigonométrico. · Analogia dos senos. Equações trigonométricas elementares. · Aplicações concretas. 4 — *GEOMETRIA ANALÍTICA* III — *Produto escalar. Perpendicularidade no plano* · Produto escalar de vectores; ângulo de duas rectas; perpendicularidade; distância de ponto a recta. · Conjuntos de pontos definidos por condições. · Aplicação do produto escalar à demonstração de propriedades de geometria plana. 5 — *SUCESSÕES — Limites* · Infinitamente grandes e infinitésimos. · Sucessões convergentes. Unicidade do limite. · Progressões aritméticas e progressões geométricas. Soma de termos. 6 — *FUNÇÕES* III — *Limites. Derivadas* · Limites e continuidade de funções. · Derivação de funções racionais. Segunda derivada. Aplicações.	1 — *COMBINATÓRIA E PROBABILIDADES* · Arranjos simples e completos; permutações; combinações. Binómio de Newton. · Cálculo de probabilidades. Provas repetidas. 2 — *GEOMETRIA ANALÍTICA* IV — *Cónicas. Rectas e Planos no Espaço* · Cónicas. Derivada de função implícita; tangente e normal a uma cónica. · Equações de planos e de rectas no espaço. · Paralelismo, perpendicularidade, intersecção de planos e de rectas e planos. · Resolução de sistemas de três equações com três incógnitas; método de Gauss. 3 — *FUNÇÕES* IV — *Áreas* · Noção de integral definido. Primitivas de funções polinomiais. Área sob um gráfico. 4 — *FUNÇÕES* V — *Funções Trigonométricas em* $\mathbb{R}$ · Seno, co-seno e tangente como funções de variável real. · Fórmulas. Equações e identidades. · Limites, continuidade, derivada, variação. · Primitivas do seno e do co-seno. Cálculo de áreas. 5 — *FUNÇÕES* VI — *Funções Exponencial e Logarítmica* · O número *e*. · Função exponencial de base a >1: estudo analítico e gráfico. · Noção de logaritmo; propriedades. · Função logarítmica; estudo analítico e gráfico. · Cálculo de limites. · Primitivas de a^x e de k/x. Cálculo de áreas.

TEMAS	Estatística e Probabilidades	Números e Cálculo Algébrico	Geometria Analítica e Trigonometria	Funções e Análise Infinitesimal
10.º ANO		11.º ANO		12.º ANO
				6 — *GRUPOS E CORPOS* · Definições e exemplos numéricos; os corpos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$. · Números complexos; operações; o corpo $\mathbb{C}$ como extensão de $\mathbb{R}$. 7 — *OPÇÕES:* A cada turma será leccionada uma das opções *A.* O conjunto dos números complexos (complementos). *B.* Espaços lineares. *C.* Complementos sobre primitivação. Iniciação às equações diferenciais. *D.* Transformações geométricas.

MAPA ORGANIZADOR DOS CONTEÚDOS

(Principais conexões entre unidades)





Cálculo e Lógica – 18 aulas

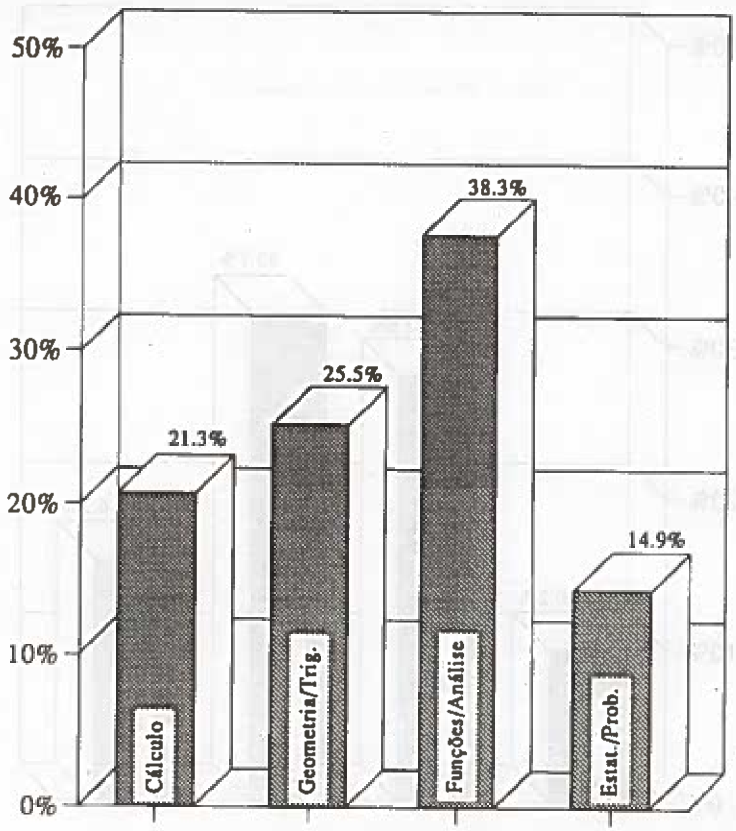
Geometria e Vectores – 20 + 16 aulas

Funções – 20 aulas

Estatística – 18 aulas

Total – 92 aulas

11.º ANO



PESO RELATIVO DOS TEMAS

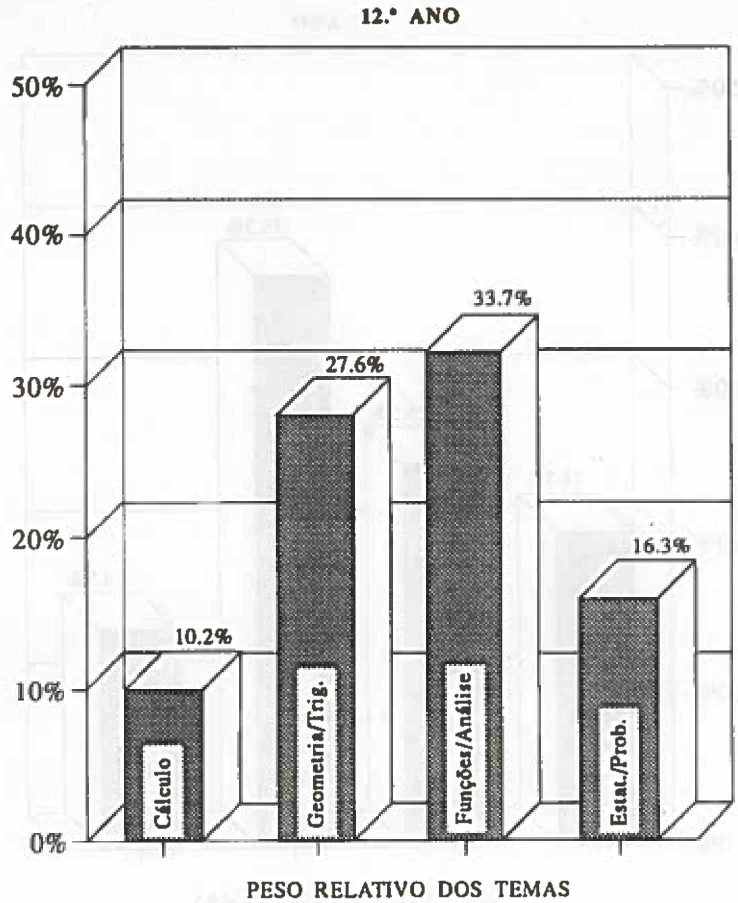
Cálculo – 20 aulas

Geometria/Trigonometria – 24 aulas

Funções/Análise – 36 aulas

Estatística/Probabilidades – 14 aulas

Total – 94 aulas



Cálculo e Estruturas – 10 aulas

Geometria/Trigonometria – 27 aulas

Funções/Análise – 33 aulas

Estatística/Probabilidades – 16 aulas

Unidade de Opção – 12 aulas

Total – 98 aulas

10.º ANO

1. NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA

A interpretação da informação estatística é indispensável à compreensão da sociedade moderna.

Retoma-se nesta unidade o tratamento de dados para aperfeiçoar a capacidade de interpretar e comparar distribuições e informações estatísticas.

Além das medidas de localização estudam-se agora medidas de dispersão e faz-se uma abordagem intuitiva de distribuições bidimensionais.

O aluno deve recorrer ao «modo estatístico» da calculadora, sempre que vantajoso.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
· Introdução: · Objecto da Estatística e breve nota histórica sobre a evolução desta Ciência; utilidade na vida moderna. · Estatística Descritiva e Estatística Indutiva. · Tipos de caracteres estatísticos; · Variável discreta e variável contínua. · As noções de população e de amostra; · Recenseamento e sondagem.	· Indicar situações da vida quotidiana ou das Ciências onde a Estatística presta relevantes serviços.	· A importância da Estatística deve ser exemplificada em situações diversas, tais como: · O estudo da distribuição dos diferentes grupos sanguíneos numa população é indispensável para a definição de reservas de sangue em hospitais e clínicas. · Para um fabricante de vestuário é fundamental conhecer estatísticas sobre as medidas da clientela à qual se destina a produção. · Exemplos deste tipo servem também para explicar ao aluno as duas vertentes da Estatística: *Descritiva* que trata os dados correspondentes a factos ocorridos e *Indutiva* que extrai desses dados previsões e as respectivas probabilidades.
· Organização e interpretação de dados: · Tabelas de frequência. · Gráficos de uma distribuição. · Medidas de localização: – Moda, média aritmética, mediana e quartis.	· Construir tabelas de efectivos, de frequências relativas e de frequências acumuladas a partir de dados fornecidos. · Construir e interpretar gráficos de barras, poligonais, circulares, histogramas, e diagramas de «extremos e quartis».	· Ao abordar os cuidados a ter na escolha de uma amostra é importante esclarecer que as técnicas de selecção de amostras representativas da população completa são objecto de estudos específicos que excedem o âmbito deste programa. · A revisão e ampliação de conhecimentos deve desenvolver-se em torno de actividades de organização e tratamento de dados, fornecidos em estado bruto ou já tabeladas. · Os dados podem ser colhidos em livros, revistas, ou pedidos em instituições autárquicas, serviços públicos, etc.
· O símbolo Σ: propriedades homogénea e aditiva. · Diagramas de «extremos e quartis». · Medidas de dispersão: – Amplitude, variância e desvio padrão; informação da fórmula para o cálculo abreviado do desvio padrão.	· Usar o símbolo Σ nos cálculos. · Interpretar uma distribuição recorrendo à análise conjunta das medidas de tendência central e de dispersão.	· Tal como no 3.º ciclo, este tema continua a proporcionar uma excelente oportunidade para actividades interdisciplinares e para trabalhos de grupo. · Os alunos da turma podem ser tomados como população para o estudo de diversas variáveis. Estas distribuições muito simples são úteis para exemplificar os cálculos a efectuar. São úteis no início, mas devem ser seguidas imediatamente do estudo de outras distribuições com maior significado social e cultural. · Sugere-se, como exercício, a verificação de que: · A média do produto de uma constante por uma variável é igual ao produto da constante pela média da variável. · A média da soma de duas variáveis é igual à soma das médias das variáveis.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
		· É importante comparar distribuições, para tirar conclusões acerca do papel dos diversos tipos de medida; a realização de dois gráficos no mesmo referencial pode facilitar certas análises. · No cálculo do desvio padrão aconselha-se o uso da fórmula abreviada. $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma n_k x_k^2}{N} - \bar{x}^2}$
· **Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva):**		· Como exercício sugere-se o cálculo, numa dada distribuição, do número e da percentagem de indivíduos existentes no intervalo $]\bar{x}-\sigma,\ \bar{x}+\sigma[$.
· Diagrama de dispersão; dependência estatística; ideia intuitiva de correlação e de recta de regressão. · Exemplos gráficos de correlação positiva, negativa e nula. Coeficiente de correlação e sua variação em $[-1,\ 1]$.	· Identificar através do gráfico, em casos muito simples, correlação positiva, correlação negativa ou ausência de correlação.	· Ainda que os cálculos sejam feitos geralmente com a máquina, o aluno tem de conhecer e compreender as fórmulas que está a usar, para um melhor domínio dos conceitos. Nomeadamente no caso do desvio padrão deve saber usar uma disposição prática dos cálculos que clarifique a sequência das operações. · No caso do professor ter acesso a um computador da Escola, poderá exemplificar as potencialidades deste no tratamento de dados estatísticos e até promover a participação dos alunos em actividades estatísticas que interessem à Escola. · A partir de exemplos de nuvens de pontos identificar o tipo de correlação sem envolver o cálculo do valor do coeficiente de correlação nem o da recta de regressão. A referência à recta de regressão deve fazer-se de forma intuitiva destacando a sua importância na previsão de acontecimentos.
		Número de aulas previstas: 18.

2. O CONJUNTO $\mathbb{R}$ — Noções de Lógica

O aperfeiçoamento do estudo de $\mathbb{R}$, que será feito de forma intuitiva, constitui base indispensável para o estudo da Geometria Analítica, das Funções e da Análise Infinitesimal.

O tema deve ser aproveitado para estimular a procura de informação, a consulta de obras de referência, a elaboração de sínteses. Introduzem-se alguns conhecimentos sobre condições e conjuntos à medida que são úteis para a compreensão dos temas.

A calculadora será um material imprescindível nesta unidade, nomeadamente na procura de valores aproximados de números irracionais.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
· **Os números reais:** · Referência histórica à descoberta dos números irracionais; demonstração de que $\sqrt{2}$ não é racional. · Dízimas periódicas e dízimas não periódicas. · Os números reais como medidas de grandezas. · Extensão de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$: conservação das regras de cálculo (informação). · Referência à evolução do conceito de números. · Operações com números reais (com e sem calculadora): – Com dízimas. – Com radicais quadráticos. – Com radicais cúbicos. – Com potências de expoente fraccionário.	· Pesquisar informações da História da Matemática relativas a números irracionais com $\sqrt{2}$, π número de ouro, ... · Resolver problemas que envolvam números reais, usando a calculadora e a notação científica quando oportuno. · Operar com: · radicais quadráticos · radicais cúbicos · potências de expoente fraccionário	· A medida da diagonal de um quadrado de lado 1 pode motivar o estudo da irracionalidade de $\sqrt{2}$ e a referência à história dos irracionais. Outros irracionais como π e Φ (número de ouro), que podem ser definidos geometricamente, constituem excelentes temas da pesquisa para trabalhos de consulta individuais ou de grupo. · A evolução do conceito de número através dos tempos é um estudo cultural e formativo que mostra aos alunos como os obstáculos a vencer têm sido motivadores e fecundos na história da Ciência. · Problemas como a determinação do raio de uma bola conhecido o volume (por exemplo por imersão em água) ou da aresta de um cubo que tenha um volume dado devem ser resolvidos para mostrar a necessidade dos irracionais como medidas de grandezas. · Os alunos podem ser incentivados a inventar dízimas cuja lei de formação garanta irracionalidade. · A calculadora, apoio indispensável nesta unidade, pode ser usada em actividades de exploração como a procura por aproximações sucessivas do valor de $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{100}$, ... (antes da introdução das potências de expoente fraccionário) ou do menor valor de uma expressão como $x+\frac{1}{3x}$ em $\mathbb{R}^+$. Os símbolos $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}^-$ e $\mathbb{R}_0^-$ serão usados sempre que oportuno). · A simplificação de expressões com radicais inclui a passagem de factores «para dentro ou para fora de um radical» e a racionalização de denominadores. · Operar com radicais quadráticos é um objectivo de cálculo importante nesta unidade. Pressupõe que o significado dos símbolo $\sqrt{a}$ e $-\sqrt{a}$ é retomado e clarificado de modo que os alunos fiquem aptos a: · usar a equivalência $x^2=a \Leftrightarrow x=\sqrt{a} \vee x=-\sqrt{a}$ $(a \geq 0)$ donde $(\pm\sqrt{a})^2=a$. · identificar $\sqrt{x^2}$ com $\|x\|$; $\sqrt{25}$ com 5 (e não com ± 5); $-\sqrt{25}$ com -5. · indicar os valores de x para os quais $\sqrt{ax+b}$ e $\frac{1}{\sqrt{ax+b}}$ tem significado real. · usar as regras operatórias em $\mathbb{R}^+$, sabendo evitar erros como $\sqrt{(-3)^2 \cdot 5} = -3\sqrt{5}$.
· **Ordenação em $\mathbb{R}$:** · Comparação de números reais. Recta real. · Intervalos. A vizinhança como intervalo.	· Ordenar números reais.	· As propriedades das relações de ordem assim como o enquadramento da soma do produto e do inverso (em $\mathbb{R}^+$) serão intuidos a partir de exemplos.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
· Valor absoluto ou módulo, $\lvert r \rvert$, como distância à origem. · Propriedades das relações $<$, $\leq$, $>$, $\geq$: transitiva, monotonia da adição e monotonia parcial da multiplicação.		· As noções de Lógica devem ser introduzidas e usadas quando consideradas oportunas para clarificar e organizar o pensamento e simplificar a expressão escrita. A tradução de condições em intervalos deve ser vista como um caso particular de correspondência entre a lógica de condições e a lógica de conjuntos. A par do uso da notação de intervalo, os alunos devem interpretar sobre a recta real condições como $5<x\leq 2\sqrt{2}$; $\lvert x\rvert\geq -1 \vee x<-3$; $x\geq -2 \vee x>-1$; $x>3 \wedge x\leq 0$; $x^2<0 \wedge x=\sqrt{3}$
· Conjunção e disjunção de inequações (ou de outras condições) e sua interpretação em termos de intersecção e de reunião de conjuntos. Negação de uma condição e complementar de um conjunto. · Majorantes e minorantes de um conjunto. Enquadramento da soma e do produto; enquadramento do inverso em $\mathbb{R}^+$. · Enquadramento de expressões com uma variável.	· Interpretar na recta real e em termos de intervalos a conjunção e a disjunção de inequações e a negação de uma condição. · Enquadrar expressões a partir de um enquadramento da variável (ou das variáveis).	Ao praticar a conjunção e a disjunção de condições usar universos numéricos e não esquecer condições impossíveis e condições universais; analogamente, efectuar intersecções e reuniões de conjuntos nomeadamente com o universo e com o vazio. O aluno deve saber negar uma condição e determinar o complementar de um conjunto. · As propriedades das relações de ordem permitem enquadrar expressões como $10-\frac{x}{2}$ sabendo que $-\sqrt{2}\leq x<3$ e indicar majorantes e minorantes de conjunto dos valores que a expressão pode tomar. Considera-se, também, actividade com interesse a pesquisa directa de máximo e de mínimo de expressões, usando a calculadora, se necessário. Por exemplo: $\lvert x-2\rvert-0{,}5$ para $-\sqrt{5}\leq x<3$, $x+\frac{1}{2x}$ com $x\in\mathbb{R}^+$.

Número de aulas previstas: 18.

3. GEOMETRIA ANALÍTICA — I. Introdução ao método cartesiano

Visando consolidar a compreensão do espaço tridimensional ampliam-se os conhecimentos de Geometria no espaço, numa perspectiva hipotético-dedutiva, antes desta primeira abordagem ao método cartesiano.

O estudo de $\mathbb{R}$ e da recta real permite clarificar a correspondência entre o plano e $\mathbb{R}^2$ e entre o espaço e $\mathbb{R}^3$. Condições muito simples serão interpretadas em paralelo no plano e no espaço.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
· **Ampliação de conhecimentos de Geometria no espaço:** · Referência a noções primitivas (ponto, recta e plano) e noções derivadas. Axiomas e teoremas. · Os axiomas: · Dois pontos definem uma recta. · Três pontos não colineares definem um plano. · Recta com dois pontos num plano está contida no plano. · A intersecção de dois planos concorrentes é uma recta. · Axioma de Euclides.	· Identificar a posição de rectas e planos no espaço. · Usar os critérios de paralelismo e de perpendicularidade de rectas e planos na justificação de propriedades e na resolução de problemas.	· Esta introdução relativa à Geometria no espaço, a qual não deverá ser demorada, amplia conhecimentos do 9.º ano e permite uma visão mais clara do espaço, indispensável ao estudo da Geometria Analítica, ao mesmo tempo que proporciona ao aluno algumas ideias sobre a construção hipotético-dedutiva de uma ciência. A compreensão dos axiomas e a demonstração dos teoremas propostos deve apoiar-se no uso de modelos que facilitem a visualização de várias situações. É importante que o aluno compreenda, à luz destes conhecimentos, factos da vida corrente (uso do fio do prumo, do nível de bolha de ar, diversos tipos de esquadros, ... a estabilidade de um banco de 3 pés, ...). Os vários casos de «existência e unicidade» serão apenas intuídos com modelos e exercícios; isto é, teoremas como «Por um ponto passa uma e uma só recta perpendicular a um plano» não serão demonstrados nem mesmo enunciados, mas apenas usados nas aplicações.
· Modos de definir um plano. · Posições relativas de rectas, de planos e de rectas e planos. · Critérios de paralelismo de recta e plano e de planos (com demonstração).		· Por «critérios» entende-se «condições suficientes» para garantir paralelismo ou perpendicularidade. · As demonstrações pedidas recorrem ao método de redução ao absurdo, e sugere-se que, pelo menos uma delas, seja proposta como trabalho individual ou de grupo. A título de exercício deverá propor-se a determinação de secções de sólidos por planos dados, em casos simples.
· Noção de diedro e de rectilíneo; · Perpendicularidade no espaço; critérios de perpendicularidade de recta e plano e de planos. · Projecção ortogonal de um ponto sobre uma recta e sobre um plano. · Referência a Euclides e à Geometria Euclideana como construção hipotético-dedutiva.	· Usar raciocínios por redução ao absurdo e, em especial, na demonstração dos teoremas: «Planos paralelos são cortados por outro segundo rectas paralelas». · «Dois planos perpendiculares a uma recta são paralelos entre si».	· Sugere-se a realização de um trabalho de grupo relativo a Descartes, se possível em colaboração com a disciplina de Filosofia. · A marcação de pontos num referencial cartesiano no plano é já conhecida: pretende-se, agora, aperfeiçoar a capacidade de usar o referencial cartesiano na determinação de pontos e de conjuntos obedecendo a condições que, sendo elementares, são todavia pré-requisitos para o estudo da recta e doutros conjuntos, a fazer nas diversas abordagens previstas nos três anos deste curso.

<table>
<tr><th>DESENVOLVIMENTO DO TEMA</th><th>OBJECTIVOS</th><th>OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS</th></tr>
<tr><td>

• Alusão à arbitrariedade na escolha das noções primitivas e dos axiomas; referência à existência de Geometrias não euclideanas.

• **O método cartesiano para estudar Geometria no plano e no espaço:**
· Nota histórica sobre Descartes.
· Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos do plano; correspondência entre o plano e $\mathbb{R}^2$; conjuntos de pontos e condições.
· Distância entre dois pontos: circunferência, círculo e mediatriz.

· Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos do plano; correspondência entre o espaço e $\mathbb{R}^3$; conjuntos de pontos e condições.
· Distância entre dois pontos; superfície esférica, esfera e plano mediador.

</td><td>

• Identificar conjuntos de pontos do plano ou do espaço a partir de condições e reciprocamente, em casos muito simples envolvendo:

• no plano:
· rectas paralelas aos eixos coordenados, circunferência, círculo, mediatriz.

• no espaço:
· planos paralelos aos eixos coordenados, super-fície esférica, esfera, plano mediador.

</td><td>

De início as condições devem ser expressas por palavras. Exemplos:
• Qual o conjunto dos pontos do plano
de abcissa igual a 3?
de ordenada maior que −2?
com abcissa simétrica da ordenada?

Seguir-se-á a interpretação de condições simples expressas nas variáveis x e y. Exemplos:
$x = 5, \quad y \geq 1, \quad y = -x$

E depois a interpretação geométrica, da conjunção e da disjunção de condições como as anteriores, por exemplo,
$x > 3 \land y \geq 1, \quad \lvert x \rvert \geq 2, \quad \ldots$

• No estudo da circunferência o aluno deverá ser capaz de transformar uma equação, como $x^2 - 6x + y^2 = 3$ em $(x-3)^2 + y^2 = 12$, para identificar, então, o centro e o raio.
• Uma vez que o estudo da recta será feito em unidades subsequentes, a obtenção da equação da mediatriz tem como objectivo aplicar a noção de distância e associar uma equação a uma recta.
• A apresentação dos referenciais ortogonais no espaço far-se-á com recurso a modelos e a desenhos em perspectiva, recorrendo de preferência ao 1.º octante.
Para obter a correspondência Espaço $\Leftrightarrow \mathbb{R}^3$ pode ser mais fácil começar por escolher três coordenadas e obter a partir delas o ponto correspondente (como vértice de um paralelepípedo).
• É importante aproveitar as analogias mas também salientar as diferenças no tratamento analítico do plano e do espaço. Por exemplo propor a interpretação de condições como $x = 4$ sucessivamente na recta, no plano e no espaço.

Número de aulas previstas: 20.

</td></tr>
</table>

4. FUNÇÕES — I Generalidades. Função quadrática. Função módulo.

Os conhecimentos sobre funções, indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos, vão ser ampliados com base no estudo numérico e gráfico privilegiando funções que relacionam variáveis da vida corrente, da Geometria, da Física, da Geografia ou de outras disciplinas.

Em particular faz-se o estudo mais detalhado da função quadrática — simetria, concavidade, sinal — e resolvem-se inequações do 2.º grau. Pressupõe-se que a função afim já foi estudada no 3.º ciclo. A função $x \mapsto |x|$ *permite afinar o conceito de módulo ou valor absoluto.*

O traçado de gráficos, instrumentos poderosos de análise e comunicação, será reabordado nos 11.º e 12.º anos à luz de novos conhecimentos.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA

- **Gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal:**
  - Esboço e interpretação do gráfico de uma função dada por uma tabela ou por uma fórmula da Geometria, de outra Ciência ou da vida corrente.
  - Noções gerais relativas a funções de uma variável.

OBJECTIVOS

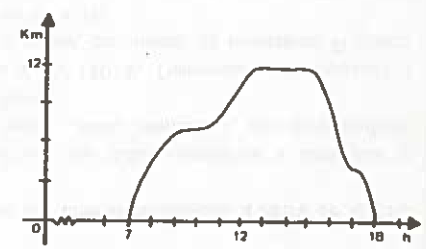
- Analisar fórmulas da Geometria e de outras disciplinas para identificar funções de uma variável.
- Identificar em gráficos dados ou construídos (calculadora) domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonias, extremos, taxa de variação média num dado intervalo, injectividade da função e interpretar o fenómeno por ela descrito.
- Determinar, com o auxílio do gráfico e da calculadora, o comportamento da função numa vizinhança de pontos especiais do domínio.
- Resolver problemas envolvendo a expressão de uma variável em função de outra, ou recorrendo a um gráfico.

OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS

- As variáveis a relacionar devem ter significado concreto e ser representadas pelas letras mais sugestivas para cada caso.
- A interpretação de gráficos dados, fornecidos por um computador ou construídos pelo aluno, começará pela identificação das variáveis e do significado das divisões dos eixos e incluirá a pesquisa de domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonias, extremos, taxa de variação média num dado intervalo, mas estes conceitos serão apresentados de forma progressiva e aperfeiçoados de exemplo para exemplo. As definições não devem preceder este estudo concreto e não devem ser dadas fora de um contexto.

  Exemplo de um gráfico a construir ponto por ponto:
  Uma população bacteriana aumenta 50% de hora a hora. Em certo instante ($t = 0$) há 900 bactérias por ml ($n = 900$). Representar a função de t, desde $t = -3$ até $t = 5$ (h)

  Exemplo de um gráfico dado para interpretar:

  Refere-se a uma excursão ao pico de um monte, com partida às 7 h e regresso às 18 h (pedir o significado das subdivisões dos eixos, paragens, tempo de subida e descida, velocidade média em certa etapa ...).
- Os gráficos a estudar a partir de fórmulas devem ser constituídos, de preferência, por partes de recta, de parábolas, de hipérboles, de parábola cúbica.

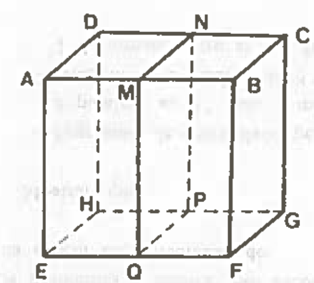
  Exemplos: $v = 2{,}5\ t$ (velocidade; recta), $e = 5t^2$ (espaço; parábola), $V = \frac{24}{P}$ (vo-

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
· **Funções quadráticas:** · Estudo dos gráficos de $x \mapsto ax^2$; $x \mapsto ax^2+c$, $x \mapsto a(x+h)^2$, $x \mapsto ax^2+bx+c$ Eixo de simetria. · Estudo do sinal de $ax^2 + bx + c$ a partir de a e de Δ. Inequações do 2.º grau. Uso de quantificadores.	· Estudar o sinal de uma função quadrática e resolver inequações do 2.º grau.	lume de gás; hipérbole), $V = \frac{4}{3}\pi IR^3$ (volume, parábola cúbica), $T=2\sqrt{l}$ (período de oscilação; parábola). · Os problemas a resolver poderão estar associados à construção e interpretação de um gráfico. Exemplos: · Dispõe-se de 40 m de rede para vedar um terreno rectangular à beira de um rio (só três lados). Exprimir a área vedada em função de um dos lados, representar e interpretar o gráfico da função (domínio, contradomínio, zeros, monotonia, não injectividade, dimensões do rectângulo de área máxima).
· **Função módulo:** · Gráfico de $x \mapsto \|x-a\|$ · A definição. $\|x\|=\begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ · As propriedades: $\|x\| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ e $\|x\| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$, $\forall a \in \mathbb{R}^+$ $\|x\| \gtreqless \|a\| \Leftrightarrow x^2 \gtreqless a^2$ · Implicação e equivalência de condições; inclusão e igualdade de conjuntos.	· Representar graficamente funções definidas por troços e envolvendo polinómios de grau não superior a dois. · Resolver inequações com 1 módulo.	· A tensão nos terminais de um motor é de 180 V. Determinar a intensidade I (Amperes) da corrente que atravessa o motor, em função da resistência R (ohm) do motor, sabendo que se aplica a lei V = RI. Esboçar o gráfico, usando calculadora ou computador, e verificar o comportamento de I. · O uso da calculadora permite uma aproximação experimental das noções de limite, de «+∞» e de «−∞», em casos como $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ quando x se aproximar de 2 e quando toma valores cada vez maiores em módulo. · Quanto ao estudo da função quadrática, aceita-se que o gráfico de $x \mapsto ax^2$ é uma parábola e mostra-se que nos restantes casos o gráfico se obtém daquele por uma isometria pelo que continua a ser parábola. · As propriedades relativas a $\|x\| < a$ e $\|x\| > a$ embora válidas para qualquer a, só interessam, neste programa, para $a > 0$, tendo em vista posteriores aplicações à Análise Infinitesimal. Assim, as inequações a resolver, com fundamento nestas propriedades, deverão conter apenas um módulo e a variável não deve figurar fora do sinal de módulo. · É importante que o aluno verifique que não há equivalência entre condições como $x^2 = a^2$ e $x = a$, $x^2 < a^2$ e $x < a$, $x^2 > a^2$ e $x > a$ e que indique os casos em que há implicação. · Dificuldade a não exceder nas funções definidas por troços: $r \mapsto \|r-a\|$ $x \mapsto \|x-3\|+1$ $f(x)=\begin{cases} 4, & \text{se } x > 0 \\ x^2 - 5x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$
· **Funções de domínio $\mathbb{N}$:** · Generalidades, gráficos. · Sucessões monótonas. · Sucessões limitadas.	· Construir o gráfico de uma sucessão. · Investigar se uma sucessão é monótona e se é limitada.	· As sucessões serão apresentadas como funções de domínio $\mathbb{N}$ para as quais se usa uma terminologia própria. Os alunos podem usar a calculadora para determinar termos, pesquisar se há majorantes (minorantes) de (u_n) e prever se há monotonia; mas devem saber estudar o sinal de $u_{n+1} - u_n$ e mostrar que um dado número é majorante (minorante). Tipos de sucessões a considerar: $an+b$, $\frac{an+b}{cn+d}$, $\|an+b\|$, $(an+b)^2$. **Número de aulas previstas: 20.**

5. GEOMETRIA ANALÍTICA II — Vectores e Rectas. Paralelismo

O estudo da recta, que tem especial interesse em Análise Infinitesimal (assímptotas, tangentes, normais ...), será feito nesta unidade com apoio vectorial. O vector livre usa-se como instrumento de cálculo em referenciais o. n. sem abordar o conceito de espaço linear.

Pela facilidade com que se estendem ao espaço os conceitos relativos a vectores, propõe-se um estudo em paralelo das noções básicas de cálculo vectorial no plano e no espaço, embora, nesta fase, o estudo da recta seja feito essencialmente no plano.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
· **Vector livre do plano:** · O conjunto V_{π}: adição, multiplicação por um número real; propriedades. · Projecção de um vector sobre um eixo: Componentes e coordeandas num referencial ortonormado; correspondência entre V_{π} e $\mathbb{R}^2$.	· Operar com vectores do plano ou do espaço.	· As operações com vectores e respectivas propriedades serão apresentadas sem formalismo e terão apenas o desenvolvimento indispensável ao estudo em referencial o.n. As projecções de um vector sobre os eixos coordenados são vectores — as componentes do vector dado. As respectivas medidas algébricas, em relação ao vector unitário escolhido em cada eixo, são números reais — as coordenadas do vector dado.
· **Vector livre do espaço:** · Extensão da adição e da multiplicação por um número real ao espaço e permanência das propriedades. · Referencial ortonormado no espaço; componentes e coordenadas; correspondência entre V_{ε} e $\mathbb{R}^3$. · Norma, soma de um ponto com um vector, diferença de dois pontos, colinearidade, ponto médio no plano e no espaço. · Cálculo com vectores expressos nas coordenadas, no plano e no espaço. · Equação vectorial da recta no plano e no espaço. Paralelismo.	· Determinar a expressão nas coordenadas, da norma, do produto de um vector por um número real, da soma de vectores, da soma de um ponto com um vector e da diferença de dois pontos, no plano e no espaço. · Resolver situações que envolvem paralelismo de vectores ou de rectas, colinearidade de três pontos, ponto médio (no plano ou no espaço).	· Exemplos de questões a propor (espaço):  A figura representa 2 paralelepípedos iguais com a face [MNPQ] comum 1. Calcule: a) $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{PG}$ b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DH}$ c) $Q+\overrightarrow{HP}-2\cdot\overrightarrow{NC}$ 2. Sendo H a origem do referencial, $\dot{H}E$, $\dot{H}P$, $\dot{H}D$ os eixos coordenados, sendo $\Vert\overrightarrow{HE}\Vert=\Vert\overrightarrow{HP}\Vert=1$ e $\Vert\overrightarrow{HD}\Vert=2$ indique as coordenadas de: M, B, C, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{PC}$, $2\overrightarrow{GC}-3\overrightarrow{HB}$
· **Estudo da recta no plano:** · Equações vectoriais em referencial o.n., paramétricas e cartesianas. · Paralelismo. · Intersecção.	· Resolver problemas que conduzam à determinação de equações vectoriais ou cartesianas de rectas do plano, intersecção de duas rectas ou de uma recta e de uma circunferência.	· Propõe-se o estudo da recta por via vectorial, mas, em relação ao plano, o aluno deverá saber escrever directamente equações cartesianas de rectas obedecendo a condições dadas. Sendo (v_1, v_2) um vector director de uma recta não vertical $(v_1 \neq 0)$, o declive será $\frac{v_2}{v_1}=m$; convém que o aluno saiba que se relaciona com o ângulo α que a recta faz com $\dot{O}X$, pelo que se chama também «coeficiente angular». Mas só no 11.º ano será definido como tgα.
· **O método de redução para a resolução de sistemas de duas equações com duas incógnitas; interpretação gráfica.**		

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
	• Determinar regiões do plano definidas por equações ou inequações simples. • Usar o método cartesiano para resolver problemas simples de geometria plana, mediante escolha de um referencial.	• As equações cartesianas a estudar são da forma: $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}$ ou $y-y_0=m(x-x_0)$, em que $m=\frac{q}{p}$ (declive), e a equação reduzida $y = mx+b$. • Exercícios a resolver: · Interpretar a família de fórmulas $y = ax + b$, quando *a* ou *b* é constante (no plano). · Resolver problemas no plano envolvendo equações de rectas definidas por dois pontos e por um ponto e uma direcção em referencial o.n. · Determinar graficamente a região definida por condições simples, por exemplo $x^2+y^2\leq 9 \wedge y\geq\frac{x}{2}+1$ • Os problemas a resolver por escolha de referencial e uso do método cartesiano são da ordem de dificuldade de: · Mostrar que: – Segmento de recta dado pelos pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao 3.º lado e mede metade deste. – Determinar a medida do 3.º lado de um triângulo em que dois lados medem 1 e formam entre si um ângulo de 135° (ou de 45°)

Número de aulas previstas: 16.

11.º ANO

1 — PROBABILIDADES — I

Para entender muitas das informações que recebemos, nomeadamente nos campos económico, social, político, desportivo, há que conhecer a linguagem das probabilidades.

Esta unidade retoma e aperfeiçoa a terminologia e o cálculo de probabilidades pela lei de Laplace; faz-se ainda a aproximação entre o conceito de probabilidade e o de frequência relativa quando o número de experiência é muito elevado.

Faz-se um estudo breve de distribuições de probabilidades e referência à curva de Gauss e sua utilidade.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA

- **Noções gerais:**
  - Referência à origem, evolução, conteúdo e importância do Cálculo das Probabilidades.
  - Experiência aleatória; acontecimentos: elementar, não elementar, certo, impossível, contrário, incompatível com outro. Reunião de acontecimentos.
  - Lei dos grandes números; conceito frequencista de probabilidade.
  - Reconhecimento de que $0 \leq p(A) \leq 1$ (sendo 1 para o acontecimento certo e 0 para o acontecimento impossível) e de que $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ se $A \cap B = \emptyset$.
    A probabilidade como quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis.
- **Distribuição de frequências relativas e distribuição de probabilidades:**
  - Média, desvio padrão.
  - Representação gráfica; referência à curva de Gauss e a caracteres que se distribuem normalmente.
  - Probabilidade relativa ao intervalo $]\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma[$

OBJECTIVOS

- Realizar experiências, anotar resultados e tirar conclusões
- Provar que $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ e que $p(A_j) = \frac{1}{n}$ se A_j é um dos n acontecimentos elementares equiprováveis.
- Calcular probabilidades pela lei de Laplace.
- Calcular probabilidades conhecendo relações entre essas probabilidades.
- Elaborar gráficos de probabilidades (frequências relativas) e calcular a média, a variância e o desvio padrão.

OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS

- Poderá propor-se um trabalho de pesquisa bibliográfica sobre Pascal (séc. XVII), ou sobre Laplace (séc. XIX).
- Tem interesse referir a origem da palavra «aleatório» (de alea–dado, sorte, azar).
- Realizar experiências aleatórias de resultados equiprováveis ou não como: lançamentos de punaises  ; de um fósforo numa caixa para ver se corta, ou não, certa diagonal  ; de um «rapa»; ... Cada aluno pode fazer a experiência, por exemplo 20 vezes, e anotar os resultados, o que dará cerca de 600 provas na turma. A frequência relativa de cada acontecimento será tomada como valor aproximado da sua probabilidade nas condições da experiência.
  Experiências deste tipo podem ser simuladas no microcomputador recorrendo a um gerador de números pseudo-aleatórios, com a vantagem de poder obter um número de provas muito elevado e a contagem automática dos resultados.
- O conceito de «acontecimentos independentes» não é tratado nesta unidade. O que não impede que se proponham problemas do tipo: «Em dois lançamentos de um dado perfeito, qual a probabilidade de obter número par no 1.º e número ímpar no 2.º lançamento?».
- Nesta fase os casos favoráveis e os casos possíveis contam-se directamente recorrendo, eventualmente, ao cardinal do produto cartesiano. Tal como se disse é vantajoso estimular o uso de esquemas ou diagramas para essas contagens.
- Para os mesmos dados convém comparar dois gráficos de probabilidades (frequências relativas) tendo um deles classes de certa amplitude e outro com a amplitude metade ou um quarto da primeira, para ver como a poligonal se aproxima de uma curva contínua de probabilidade. Em seguida, far-se-á referência à curva de Gauss e à probabilidade relativa a $]\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma[$

Número de aulas previstas: 14.

2 — FUNÇÕES — II — Funções Racionais. Operações.

Com o estudo numérico e gráfico de novas funções polinomiais e depois, mais geralmente, de funções racionais, ampliam-se os conhecimentos do 10.º ano relativos a funções. Tal como no 10.º ano privilegiam-se funções que relacionam variáveis com significado concreto.

É apenas sobre este tipo de funções (racionais) que incidirá o estudo de limites e derivadas a fazer no 11.º ano.

As operações com funções são abordadas nesta unidade; a propósito da inversão aparecem funções com radicais, as quais serão objecto de um estudo muito breve.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
• **Polinómios:** · Divisão inteira. Regra de Ruffini. · Divisibilidade por $x-\alpha$.		• Consideram-se equações/inequações de grau superior a 2 apenas nos casos em que é fácil decompô-las noutras do 1.º ou 2.º grau (fornecendo, se necessário, uma das raízes) ou em que a equação toma a forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (equação biquadrada). • Ao decompor polinómios em factores dar a noção de raiz dupla.
• **Fracções algébricas:** · Domínio, equivalência, operações. · Equações e inequações fraccionárias.	• Resolver equações e inequações inteiras de grau superior a 2.	• Como exercício de aplicação da regra de Ruffini pode propor-se a obtenção das igualdades: $x^3 - a^3 = (x-a)\ (x^2 + ax + a^2)$ $\quad x^3 + a^3 = (x+a)\ (x^2 - ax + a^2)$ $x^5 - 1 = (x-1)\ (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ • Uma actividade interessante poderá ser a programação e o uso da regra de Ruffini, num computador.
• **Funções polinomiais. Funções racionais:** · Operações com funções; composição; inversão; restrição.	• Operar com fracções algébricas. • Resolver equações e inequações fraccionárias com termos de grau ≤2.	• Ao estudar equivalência e operações com fracções algébricas usar expressões simples como $x^2 - \frac{1}{x}$, $1 + \frac{1}{x} - \frac{x}{x-1}$, $\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2}$, $\frac{\frac{1}{x}}{x-3}$
• **Funções com radicais quadráticos ou cúbicos:** domínio.	• Esboçar e analisar gráficos de funções polinomiais de grau 3 ou 4 e de funções fraccionárias com termos de grau menor ou igual a 2, quanto a monotonia, extremos, domínio, paridade, zeros, taxa de variação média; exemplos de assímptotas verticais. • Compor e inverter funções (casos muito simples).	• Os gráficos a analisar, de funções polinomiais ou fraccionárias, podem ser apresentados em ficha de trabalho e incluir questões como: *a)* recorrendo ao gráfico e à sua calculadora procure valores aproximados de zeros. *b)* determine a taxa de variação média da função no intervalo [−2,3]. Quanto ao esboço de gráficos de funções fraccionárias (ponto por ponto) deve ser auxiliado pela determinação do domínio, assímptotas verticais, zeros, sinal e recorrendo à calculadora programável. • Algumas das funções a analisar na aula ou em casa, devem estar ligadas à Geometria ou à Física. Exemplos: *a)* Um gerador de força electromotriz E e de resistência interna r, está ligado a um reóstato de resistência R, variável; a potência aplicada ao reóstato é dada por $P = \frac{RE^2}{(R+r)^2}$. Esboce e analise o gráfico da função P(R) (watts) para E = 60V r = 5Ω. Use um referencial dimétrico e calculadora programável; verifique que a máxima potência é 180 watts para R = 5Ω.

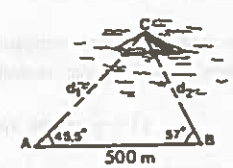
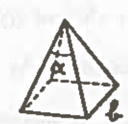
DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
		b) Num esquentador de potência P, a temperatura de saída da água é dada por $t = t_0 + \frac{2,1}{Q}$ (t_0 – temperatura da água à entrada; Q – débito em kg/s). Estudar a função t (Q) para $t_0 = 10°$ *c)* Exprimir o volume de um cone, de altura igual ao diâmetro da base, em função desse diâmetro e estudar a função obtida (pode tomar $\frac{\pi}{3} = 1$) • Depois do estudo das derivadas será útil retomar algumas das funções estudadas aqui para que o aluno compare e avalie a eficácia do contributo da Análise para o traçado de gráficos. • Tanto equações como inequações inteiras ou fraccionárias surgirão, de preferência, ligadas ao estudo dos zeros, do sinal ou de outras características de uma função (imagem maior que 1, por exemplo). Não está no espírito do programa a insistência em exemplos muitos técnicos e isolados de qualquer contexto. **Número de aulas previstas: 20.**

3 — TRIGONOMETRIA

Para o prosseguimento do estudo da Análise e da Geometria Analítica é necessário ampliar o conceito de ângulo que passa a ser encarado como «gerado» por uma semi-recta em movimento (sentido positivo ou negativo).

Estudam-se no círculo trigonométrico as funções seno, co-seno e tangente, cujos domínios, nesta fase, serão constituídos por amplitudes de ângulos.

Retoma-se e amplia-se o estudo de aplicações práticas da Trigonometria por serem úteis, motivadoras e formativas.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
• **Ângulo e arco generalizados:** · Radiano. · Expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados, em graus e radianos.		• A revisão dos conhecimentos de trigonometria do 9.º ano deve fazer-se com base numa actividade de resolução de triângulos aplicada a uma situação prática tal como interpretar o sinal de trânsito junto, ou determinar a altura de uma árvore. 
• **Funções seno, co-seno, tangente:** · Variação (estudo no círculo trigonométrico). · Valores em $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ radianos. · Relações as entre funções de α, e de $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$ e $-\alpha$.	• Simplificar expressões trigonométricas (interpretação no círculo trigonométrico). • Indicar sinal, zeros, monotonia, paridade, periodicidade de uma função trigonométrica.	• As relações entre as funções de α e de $\pi+\alpha$, $\pi-\alpha$, $-\alpha$, $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{\pi}{2}+\alpha$ devem ser vistas no círculo trigonométrico. • É importante verificar que se mantêm as relações $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ e $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$ donde $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ e usá-las na determinação de uma função trigonométrica, conhecida outra. • As expressões a simplificar não devem exceder a dificuldade de $\operatorname{sen}(5\pi - x)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \cos(\pi + x)$, ...
· Analogia dos senos. · Expressão geral das amplitudes dos ângulos com o mesmo seno/co-seno/tangente.	• Resolver equações trigonométricas elementares. • Resolver problemas que envolvam o cálculo de um elemento de um triângulo.	• A analogia dos senos, embora não resolva todos os triângulos, permite alargar as aplicações práticas, por exemplo, no cálculo de distâncias a pontos inacessíveis.  • Devem ser propostos exercícios diversos em que se precise de um elemento de um triângulo (rectângulo ou não). Exemplo: Determinar a área total de uma pirâmide quadrangular regular conhecidos b e α. 

Número de aulas previstas: 14.

4 — GEOMETRIA ANALÍTICA — III — Produto Escalar. Perpendicularidade no plano.

O estudo do produto escalar permite abordar novos problemas, nomeadamente os que se referem à perpendicularidade, e ainda estabelecer algumas propriedades geométricas.

Nesta unidade estuda-se a perpendicularidade no plano, ficando a perpendicularidade no espaço para ser estudada no 12.º ano.

À medida que os conhecimentos crescem os problemas relativos a conjuntos definidos por condições vão-se tornando mais ricos envolvendo os novos conhecimentos e os dos anos exteriores.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
· **Produto escalar de dois vectores:** · Definição e propriedades. · Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vectores. · Ângulo de duas rectas; inclinação de uma recta; declive como tangente da inclinação. · Perpendicularidade de vectores e de rectas. · Distância de ponto a recta e de duas rectas paralelas. · Aplicação do produto escalar à demonstração de algumas propriedades da Geometria e da Trigonometria.	· Calcular em referencial o.n. o ângulo de dois vectores. · Resolver problemas envolvendo perpendicularidade de vectores e de rectas, recorrendo ao produto escalar.	· A noção de produto escalar de dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, é apresentada usando a definição $\vec{u} \cdot \vec{v} = \\|\vec{u}\\| \cdot \\|\vec{v}\\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. O exemplo do trabalho realizado por uma força fornece uma boa concretização. Deverá salientar-se que: · O produto $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é um número (escalar); · O produto $\\|\vec{v}\\| \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ designa a projecção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ · Para vectores não nulos o anulamento ou o sinal de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dão a sua posição relativa; · Dado o produto interno a definição permite obter o ângulo de $\vec{u}$ com $\vec{v}$. · As propriedades básicas do produto escalar, podem facilmente ser verificadas; a propriedade distributiva será apresentada como informação. · Estas propriedades permitem obter uma expressão simplificada, $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$ em referencial o.n. Desta expressão deve deduzir-se que o vector $(-u_2, u_1)$ é perpendicular a (u_1, u_2). · Ao retomar a noção de declive de uma recta convém interpretá-lo como sendo a tangente da inclinação da recta.
· **Conjuntos definidos por uma condição.**	· Representar num referencial o.n. conjuntos definidos por condições que envolvem rectas, circunferências, parábolas. · Indicar uma condição que defina um dado domínio plano.	· Mostrar que a mediatriz de um segmento, já estudada no 10.º ano, pode obter-se agora vectorialmente. · Entre as actividasdes que se podem propor, envolvendo o produto escalar, podem incluir-se as demonstrações: · a fórmula do desenvolvimento de $\cos(a-b)$. · a altura relativa à hipotenusa é meio proporcional entre os segmentos que determina nela · qualquer cateto é meio proporcional entre a hipotenusa e a sua projecção sobre ela. · distância do ponto $P(x_0, y_0)$ à recta $y = mx + b$ como medida da $proj_{\vec{n}} \overline{PR}$, sendo $\vec{n} = \left(1, -\frac{1}{m}\right)$ e R um ponto da recta.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
		A fórmula obtida, $d = \frac{\lvert y_0 - mx_0 - b \rvert}{\sqrt{1 + m^2}}$ será usada nas aplicações práticas. • Os domínios planos a estudar integrarão progressivamente os novos conhecimentos de Geometria, sendo todavia de evitar exageros. **Número de aulas previstas: 10.**

5 — SUCESSÕES

Abordam-se aqui alguns conceitos indispensáveis para o estudo da Análise Infinitesimal; infinitamente grande, infinitésimo e sucessão convergente.

Estes conceitos deverão ser intuídos, numérica e geometricamente, antes de serem definidos; as definições, sem perda de rigor, serão dadas em linguagem corrente.

Esta unidade deve ser entendida como uma introdução ao conceito de limite (à Heine) de função real de variável real, razão porque a «prática» relativa a sucessões será reduzida a exemplos essenciais. A álgebra dos limites não é abordada aqui; pretende-se apenas que o aluno identique infinitésimos e infinitamente grandes, em casos simples. O conceito de sucessão convergente será dado a partir da noção de infinitésimo.

Pela sua importância estudam-se ainda as progressões aritméticas e geométricas e os respectivos limites.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA

- As sucessões de referência: $n, n^2, \sqrt{n}, 2^n$:
- Estudo numérico e gráfico.
- Infinitamente grande positivo / negativo / em módulo.
- As propriedades:

«Se $u_n \to +\infty$ e $v_n \geq u_n$ a partir de certa ordem, então $v_n \to +\infty$» (com demonstração).

«Se $u_n \to +\infty$, também $(u_n + \alpha) \to +\infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\lambda u_n \to +\infty$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$» (justificação em casos concretos).

«$a > 1 \Rightarrow a^n \to +\infty$» (estudo com calculadora)

- As sucessões de referência $\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2^n}$
- Estudo numérico e gráfico.
- Infinitésimos.
- As propriedades:
- «Se $v_n \to 0$, e, a partir de certa ordem, $|u_n| \leq v_n$, então $u_n \to 0$» (com demonstração)
- «Se $u_n \to 0$ também $ku_n \to 0$» (justificação em casos concretos).
- «$a^n \to 0$ se $0 \leq |a| < 1$.»

OBJECTIVOS

- Identificar infinitamente grandes (positivos, negativos ou em módulo) por comparação com outros infinitamente grandes já identificados.
- Reconhecer infinitésimos por comparação com outros infinitésimos já identificados.

OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS

- Analogamente ao que foi feito no 10.º ano para as funções, o estudo das sucessões de referência n, n^2, $\sqrt{n}$, 2^n será numérico e gráfico, com recurso à calculadora; o aluno poderá, assim, visualizar o crescimento dos termos e compreender que dado um número A por maior que ele seja, existe uma ordem a partir da qual os termos são *todos* maiores que A.
- Exemplos de identificação de infinitamente grandes por comparação com as sucessões de referência:

$n^3 \to +\infty$, porque $n^3 = n \cdot n^2 \geq n^2$; $(-n^3) \to -\infty$ porque é simétrico de n^3

$\frac{3n^2}{2n-5} \to +\infty$, porque $\frac{3n^2}{2n-5} > \frac{3n^2}{2n} = \frac{3}{2}n$ (λn é infinitamente grande) $(n>2)$

$0,5\,(n-2) \to +\infty$, porque $n + (-2) \to +\infty$ logo $0,5\,(n + (-2)) \to +\infty$

- Também o estudo dos infinitésimos de referência deverá ser feito, com recursos à calculadora e a representações gráficas que permitam visualizar a variação dos termos e a sua aproximação a zero.
- O reconhecimento de infinitésimos deverá também ser feito por comparação. Dificuldade a não exceder:

$$\frac{n+1}{2n^2+n+7} < \frac{n+1}{n^2+n} = \frac{1}{n}$$

- Só depois de bem adquiridas as noções de infinitamente grande e de infinitésimo é que surgirão as definições. Mas não se pretende que os alunos provem, por recurso à definição, que uma sucessão é infinitamente grande ou infinitésimo.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS
· Sucessão convergente para a ($u_n - a$ é infinitésimo): · Sucessão monótona limitada é convergente (informação) · Os teoremas (com demonstração): – Unicidade do limite. – «O inverso de um infinitamente grande é um infinitésimo e reciprocamente.»	· Mostrar que um dado número é limite de uma sucessão.
· Progressões aritméticas e progressões geométricas. · Termo geral; limite. · Soma de n termos consecutivos de uma progressão aritmética; · Soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica.	· Determinar a razão, o termo geral, o limite e a soma de n termos consecutivos de uma progressão.

OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS

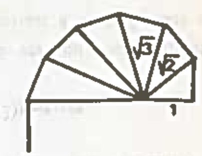
No entanto, são aconselháveis exercícios em que se pede a ordem depois da qual se verifica uma condição dada ($u_n < 10^{-3}$ ou $u_n > 10^6$ ...).

Para mostrar que um certo número é limite de uma dada sucessão recorrer a exemplos simples que se possam justificar claramente com os conhecimentos referidos, tais como:

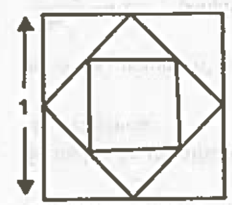
$$\frac{2n+3}{5n-1} \to \frac{2}{5}, \quad \frac{\sqrt{n}}{10\sqrt{n}+1} \to \frac{1}{10}, \quad \frac{3n^2-1}{n^2+2} \to 3, \quad 2-\frac{100}{n^2} \to 2$$

Deve dar-se exemplos de sucessões definidas geometricamente:

a) A sucessão $n \smile \sqrt{n}$ pode ser ligada à figura:

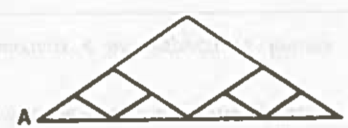


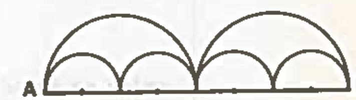
b)



A sucessão das áreas dos quadrados corresponde à progressão de termo geral $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) Um trabalho motivador é a descoberta do limite do comprimento das linhas de extremos A e B (que não é $\overline{AB}$, como parece à primeira vista)





Número de aulas previstas: 16.

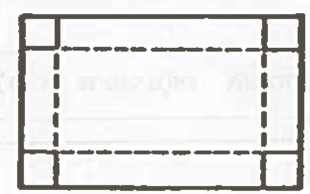
6 — FUNÇÕES — III — Limites, Derivadas

Estudam-se aqui alguns conceitos básicos de Análise Infinitesimal; limite (à Heine), continuidade e derivada num ponto e função derivada.

Estes conceitos serão intuídos a partir de exemplos e as definições serão dadas em linguagem corrente. As aplicações, nesta fase, referem-se a funções polinominais *e a* funções fraccionárias. *As regras operatórias com limites de funções serão apresentadas e usadas sem demonstração.*

A determinação de limites laterais em certos pontos, o estudo da continuidade, do sinal da 1.ª e da 2.ª derivadas, a determinação de assímptotas, serão entendidos como instrumentos precisos que contribuem para a interpretação da função e para o esboço rigoroso do gráfico.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
· **Limite de uma função real de variável real: definição** (Heine).	· Calcular limites de funções. · Investigar se uma função é contínua num ponto ou num intervalo dado.	· Recordar funções estudadas experimentalmente, como $\frac{1}{(x-1)^2}$ na vizinhança de 1 para clarificar o significado de $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$. Calcular os limites laterais, para distinguir do caso $\frac{1}{x}$ na vizinhança de 0.
· Limites laterais. · Regras operatórias com limites finitos e infinitos (informação). · Demonstração de: $\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} \frac{ax^n + bx^{n-1}\ldots}{px^m + qx^{m-1}\ldots} = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\to-\infty}} \frac{ax^n}{px^m}$		· A álgebra dos limites, que não foi incluída na primeira abordagem de limites de sucessões, permite agora calcular limites de sucessões em casos não tratados anteriormente; convém dar alguns exemplos, em especial calcular o limite da soma de n termos consecutivos de uma progressão geométrica, por exemplo, $\lim \sum_{k=1}^{n} 5\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$.
· Levantamento de outras indeterminações $\frac{0}{0}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$ · **Continuidade num ponto e num intervalo.** · Operações com funções contínuas (informação). · Teorema de Bolzano.	· Calcular limites de sucessões, nomeadamente da soma de n termos de uma progressão geométrica (aplicar as regras operatórias sobre limites de funções).	· Convém salientar a continuidade de toda a função racional (inteira ou fraccionária) e assegurar a noção intuitiva de que função contínua num intervalo corresponde a um gráfico contínuo (sem interrupção) nesse intervalo. · Devem ser dados exemplos de funções descontínuas como C(x), $g(x)=\begin{cases} \frac{\lvert x\rvert}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x=0 \end{cases}$ $f(x)=\begin{cases} 2x-1, & \text{se } x>1 \\ x^2-1, & \text{se } x\leq 1 \end{cases}$ · No levantamento de indeterminações evitar virtuosismos de cálculo que desviam a atenção do essencial. Têm nível de dificuldade suficiente: $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-x+1}{3-5x+2x^2}$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-x^7}{3x^6-10x^5}$, $\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (-\infty)}} \left(x^2 - \frac{x^2}{x-1}\right)$, $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+5x+6}{x^2-9}$, $\lim_{x\to -1} (x+1)\cdot\frac{2x+1}{x^3+x^2}$

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
· **Derivada de uma função num ponto como limite de taxa de variação:** · Interpretação geométrica. · Derivadas laterais. · Teorema relativo à derivabilidade e continuidade (com demonstração). · Derivada da soma e do produto (com demonstração), do quociente e da potência de expoente racional (sem demonstração).	· Calcular derivadas usando a definição (em casos simples), ou as regras de derivação. · Determinar a tangente ao gráfico de uma função dada num ponto dado.	· A derivada será apresentada como limite das taxas de variação média relativas a intervalos cada vez menores; convém observar a evolução das posições das secantes e dos respectivos declives, respectivamente para a tangente e para a derivada (declive da recta tangente ao gráfico no ponto). · O aluno deve calcular derivadas a partir da definição e em vários pontos, comparando os números obtidos com a variação mais ou menos rápida da função. · Só depois de compreender bem a noção de derivada o aluno deverá praticar o uso das regras de derivação no qual deve ganhar destreza. · É importante que o aluno saiba que dada a equação $e = f(t)$, de um movimento, a sua derivada $v = f'(t)$ ou $v = \frac{de}{dt}$, é a equação das velocidades e que $a = f''(t)$ é a equação das acelerações.
· Segunda derivada. · Aplicação da 1.ª e da 2.ª derivadas ao estudo de gráficos, de máximos e mínimos relativos, de concavidades.	· Fazer o estudo analítico de uma função racional e aplicá-lo no traçado de gráficos.	Assim, dada a lei do movimento o aluno deverá fazer o cálculo de velocidades instantâneas. · O estudo das funções racionais e a sua representação gráfica deve incluir domínio, assímptotas, zeros, continuidade, monotonias, extremos, sinal, concavidade, contradomínio. Funções estudadas anteriormente sem o auxílio da análise infinitesimal devem ser retomadas para que o aluno aprecie a diferença do tratamento analítico, quanto a eficiência e precisão.
· **Assímptotas verticais e não verticais.**	· Encontrar, em situações problemáticas concretas, funções que permitam resolvê-las. · Resolver problemas de «máximos e mínimos».	· Os problemas de optimização devem ser acessíveis e ter algum interesse prático. Exemplo: «De uma folha de cartão rectangular de $1m \times 0{,}8m$ retira-se um quadrado em cada canto, para construir uma caixa sem tampa». Quando é que a capacidade da caixa é máxima? 

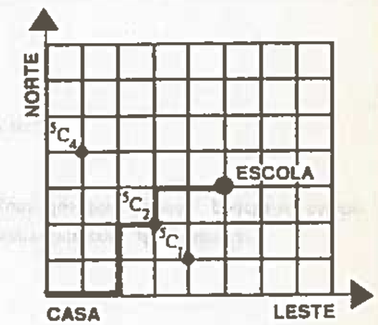
Número de aulas previstas: 20.

12.º ANO

1. COMBINATÓRIA E PROBABILIDADES

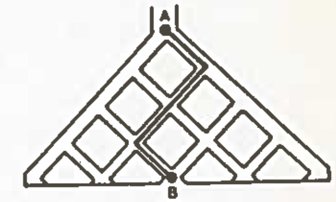
Esta unidade visa desenvolver no aluno estratégias de organização do pensamento que facilitem a contagem dos elementos de diversos conjuntos. Nela se desenvolvem técnicas e capacidades de grande utilidade no estudo das probabilidades.

Pelas actividades que permite desenvolver, ligadas a problemas concretos e a jogos, desperta o interesse, e pode motivar a totalidade dos alunos. O estudo do triângulo de Pascal ajuda ao estudo do binómio de Newton, o qual é importante para a compreensão do problema das provas repetidas.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
· **Técnicas de contagem:** · Arranjos com e sem repetição. · Permutações. O símbolo n!. · Combinações sem repetição; propriedades; triângulo de Pascal. · A fórmula do binómio de Newton. · **Aplicações ao cálculo de probabilidades:** · Acontecimentos independentes. · O problema das provas repetidas. · Referência à lei binomial de probabilidade.	· Resolver problemas de contagem e de probabilidades escolhendo uma estratégia adequada à situação. · Usar diagramas (em árvore ou outros) nos raciocínios. · Demonstrar as propriedades: ${}^{n}C_{p} = {}^{n}C_{n-p}$, ${}^{n}C_{p} + {}^{n}C_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$ · Simplificar expressões em que figuram factoriais ou potências de binómios. · Usar o desenvolvimento do binómio de Newton na demonstração de propriedades simples. · Calcular a probabilidade de um acontecimento se realizar k vezes em n provas repetidas.	· De início o aluno deve ser incentivado a contar os elementos um a um, organizadamente, até encontrar uma estratégia simplificadora; também pode começar por resolver um problema análogo com menos elementos: se forem só 3, só 4, ... Numa fase posterior o aluno conhecerá critérios para identificar o tipo de problemas (há repetição ou não, interessa a ordem ou não, ...) e fórmulas para as contagens elementares; mas, mais do que as «receitas» interessa a aquisição de métodos de pensar através da resolução de problemas. · São de efectuar, predominantemente, contagens que se referem a agrupamentos que serão usados no cálculo de probabilidades (número de casos possíveis, número de casos favoráveis, ...) · O triângulo de Pascal, ou de Tartaglia, pode ser relacionado com actividades interessantes como a contagem de «trajectórias úteis» sobre um quadriculado (Norte, Leste). Exemplo: Para chegar à escola há ${}^{8}C_{3}$ trajectórias úteis (3 troços Norte, num total de 8); as propriedades das combinações podem «ver-se» aqui facilmente. 

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS

Como alternativa analisar um esquema, do aparelho de Galton (direita/esquerda): para passar de A a B, há ${}^4C_2$ trajectos (2 «direita» em 4 total).



Outras actividades ligadas ao cálculo de probabilidades: de quantos modos diferentes se podem obter 2 «caras» lançando 4 vezes uma moeda? e 3 caras? e 4 caras? e 0 caras? o mesmo estudo para 5 lançamentos, etc.

- A fórmula do binómio permite fazer o desenvolvimento de potências: Aproveitando esse desenvolvimento, ou alguns dos seus termos, podem-se estabelecer relações úteis, como por exemplo:
  - se $x > 0$, então $(1 + x)^n \geq 1 + nx$;
  - $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2{,}3$ para $n \geq 3$;
  - se $\sqrt[n]{a} > 1$ vem $a > 1$.

- Ao tratar o problema das provas repetidas pode começar-se por contar casos favoráveis e casos possíveis e só depois concluir que $P = {}^nC_k\ p^k\ (1-p)^{n-k}$. Por exemplo qual a probabilidade de obter *3 e só 3* «seis» em 12 lançamentos de um dado perfeito? Casos possíveis: 6^{12}. Casos favoráveis: ${}^{12}C_3 .\ 1^3 .\ 5^9$ (queremos «sena» 3 vezes e «não sena» 9 vezes). Então

$$P = \frac{{}^{12}C_3 \cdot 1^3 \cdot 5^9}{6^{12}} = {}^{12}C_3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9$$

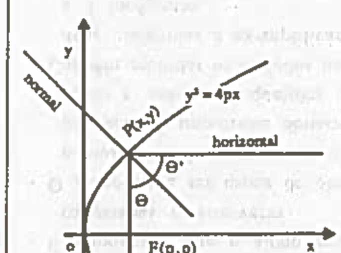
Fazer notar que cada lançamento de dado é uma experiência independente dos outros lançamentos e se 2 acontecimentos são independentes $P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B)$

- Convém fazer uma referência à história do desenvolvimento da análise combinatória e do triângulo de Pascal ou de Tartaglia.

Número de aulas previstas: 16.

2. GEOMETRIA ANALÍTICA IV — Cónicas. Complementos de Geometria Analítica no Espaço. Sistemas de equações

O estudo das cónicas impõe-se por razões de ordem histórico-cultural, científico-técnica, estética e pedagógica.
O estudo analítico dessas linhas será enriquecido com a determinação de tangentes e normais e com a propriedade reflectora da parábola.
Estudam-se, nesta unidade, equações vectoriais cartesianas de rectas e planos bem como o paralelismo e a perpendicularidade no espaço.
Aproveita-se a intersecção de planos e de uma recta com um plano para ampliar as técnicas de resolução de sistemas de equações.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
· **Cónicas:** · Perspectiva histórica e importância na tecnologia actual e na Astronomia. · Referência às secções da superfície cónica. · Definição a partir das propriedades focais; excentricidade. Equações reduzidas referidas a eixos de simetria ou paralelos a estes. · Como derivar uma função implícita. · Tangentes e normais; determinação analítica; propriedade reflectora da parábola: demonstração.	· Elaborar e apresentar, individualmente ou em grupo, um trabalho escrito ou oral sobre um tema ligado a cónicas. · Determinar características de uma cónica, dada a equação referida aos eixos de simetria ou a eixos paralelos a estes, e vice-versa. · Determinar as rectas tangente e normal a uma cónica, num ponto dado.	· Devem propor-se trabalhos de consulta e síntese a apresentar por escrito ou oralmente, ou realizar projectos interdisciplinares. São muitos os temas propícios à elaboração de monografias: · Histórico-culturais — Apolonius, Copérnico, Kepler, Galileu, Newton e as sucessivas interpretações do sistema solar. · Científico-técnicas — satélites artificiais, forno solar, antena parabólica, farol de automóvel, trajectória de um projéctil, ... · Geométricos — obtenção por secção de superfícies cónicas, construção com régua e compasso, processo do jardineiro, por dobragens, ... · Estéticos — fontes decorativas, pontes, o arco de parábola na arquitectura moderna, ... · A obtenção das equações reduzidas a partir das propriedades focais não deve ser exigida ao aluno, embora deva ser feita e explicada na aula; analogamente, no que se refere à propriedade reflectora da parábola: «Raio paralelo ao eixo reflecte-se passando pelo foco e vice-versa».  Sugestão de demonstração: De F(p,o) e $y^2=4p.x$ vem $y'=2p/y$ donde $\vec{n}(2p/y,-1)$ é vector normal. Sendo θ o ângulo de $\vec{n}$ com o versor de $\overrightarrow{PF}$ e θ' o de $\vec{n}$ com (1,0), mostre que $\cos\theta=\cos\theta'$ recorrendo ao produto escalar. Para obter tangentes e normais em pontos dados introduz-se a derivação na forma implícita. Exemplo: De $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}=1$ vem $\frac{2x}{5}-y\cdot y'=0$. No ponto $(5,\sqrt{8})$ vem $y'=\frac{\sqrt{2}}{2}$ tangente: $y-\sqrt{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-5)$ normal: $y-\sqrt{8}=-\sqrt{2}(x-5)$.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA

- **Complementos de Geometria Analítica no Espaço:**
  - Produto escalar: extensão ao espaço; informação da conservação das propriedades; expressão nas coordenadas; condição de perpendicularidade de dois vectores.
  - Equações da recta no espaço em referencial o.n.: vectoriais, paramétricas, cartesianas.
  - Plano definido por:
    - um ponto e duas direcções; equações vectoriais e paramétricas.
    - um ponto e um vector normal; equação cartesiana.
  - Paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos.
  - Intersecção de planos; resolução de sistemas de 3 equações com 3 incógnitas; método de Gauss; casos de impossibilidade e de indeterminação.

OBJECTIVOS

- Determinar analiticamente pontos, rectas e planos obedecendo a condições dadas.
- Resolver analiticamente situações que envolvem paralelismo, perpendicularidade de rectas e planos.
- Calcular a distância de um ponto a um plano.
- Determinar a intersecção de três planos ou de uma recta com um plano interpretando geometricamente o resultado.
- Resolver sistemas de três equações com três incógnitas, usando o método de eliminação de Gauss apoiado na matriz completa do sistema.

OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS

- Convém recordar alguns conhecimentos de Geometria no espaço já adquiridos.
- Recordar aos alunos a definição de produto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ e a partir dela estabelecer que $\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1 v_1+u_2 v_2+u_3 v_3$ e concluir que os vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com $\vec{u}\neq 0$ e $\vec{v}\neq 0$ são perpendiculares se e só se $\vec{u}.\vec{v}=0$.
- É importante que o aluno seja capaz de passar de equações vectoriais para as cartesianas e vice-versa.
- O aluno deve ser capaz de obter a equação vectorial do plano que passa por três pontos não colineares, por uma recta e um ponto fora dela, ou ainda, por duas rectas paralelas. É importante destacar o vector normal a partir da equação cartesiana do plano e usá-lo em questões de paralelismo e de perpendicularidade.
- Convém recordar os métodos usados na resolução de sistemas de duas equações com duas incógnitas e exemplificar como podem estender-se a sistemas de 3 equações a 3 incógnitas.
- É vantajoso mostrar num sistema triangular, ou escalonado, como a «substituição regressiva» o resolve facilmente. O aluno deve compreender a utilidade de passar de um sistema qualquer a um triangular equivalente.
- O método de Gauss, ou do *pivot*, consiste em tomar o coeficiente de x na 1.ª equação — *pivot* — para anular os coeficientes de x nas restantes equações; toma-se depois o coeficiente de y na 2.ª equação — 2.º *pivot* — e anulam-se os coeficientes de y nas seguintes; e assim sucessivamente. O *pivot* tem de ser diferente de zero, pelo que pode ser preciso trocar linhas.

Exemplo da resolução recorrendo à matriz completa e ao método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=10 \\ 6x_1+4x_2+4x_3=2 \\ 10x_1+8x_2+6x_3=2 \end{cases}
\qquad
\begin{array}{c} \\ (-3) \\ (-5) \end{array}
\overset{\text{pivot}}{\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 6 & 4 & 4 & 2 \\ 10 & 8 & 6 & 8 \end{array}\right]}
\longrightarrow
\begin{array}{c} \\ \\ (-3) \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 3 & 16 & -42 \end{array}\right]
\longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & -14 & 42 \end{array}\right]$$

Da última linha vem $x_3=-3$ donde, por *substituição regressiva*, vem $x_2=2$ donde $2x_1+2+6=10$ ou seja $x_1=1$.

Número de aulas previstas: 20.

3. FUNÇÕES IV — Áreas

Pelo seu valor formativo e cultural considera-se que a noção de integral definido deve figurar no currículo do ensino secundário, o que aliás se verifica em muitos outros países da Europa e da América.

Assim, faz-se uma iniciação informal ao conceito de integral definido, a partir de uma reflexão sobre o problema da determinação da área de uma figura. Pretende-se que esta iniciação vá apenas até ao ponto indispensável para se avaliar a potencialidade do método.

O conhecimento de que a área sob o gráfico se pode obter a partir da primitiva da função permite calcular, nesta unidade, áreas sob troços de parábolas ou de parábolas cúbicas.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA

- **Noção de integral definido:**
  - Área de uma figura irregular; métodos de cálculo exacto e cálculo aproximado.
  - «Área sob a curva», como limite de um somatório; integral definido.
  - Verificação com apoio gráfico de que

    $$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x), \text{ sendo } A(x)$$

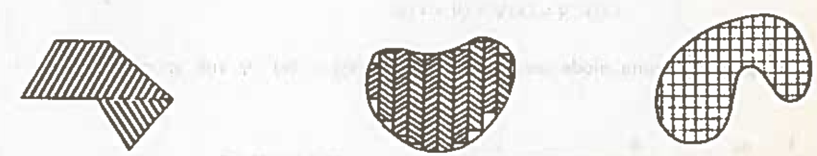
    a área sob a curva entre a e x.
  - Noção de primitiva de uma função; primitivas de funções polinomiais.
  - A fórmula de Barrow.
  - Referência histórica à evolução do Cálculo Integral e à importância das suas aplicações a diversas ciências.

OBJECTIVOS

- Calcular primitivas de funções polinomiais.
- Calcular, em intervalos dados, áreas sob parábolas, parábolas cúbicas ou outro gráfico de função racional cuja primitiva conheça.

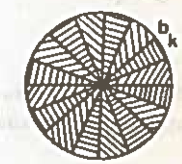
OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS

- É conveniente que o aluno calcule efectivamente áreas de figuras irregulares dadas (numa ficha de trabalho, por exemplo), decompondo-as em figuras cuja área se sabe calcular ou usando processos para obter valores aproximados por defeito e por excesso (pode sobrepor papel milimétrico transparente ou dividir em tiras aproximadamente regulares)

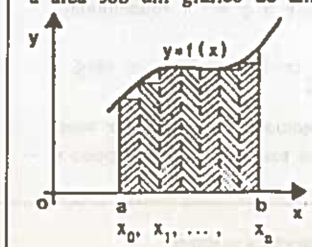


- O aluno deve conhecer a contribuição de Arquimedes (século III a.C.) e de Cavalieri (século XVII) para o cálculo de áreas e volumes e as de Newton e de Leibniz (século XVIII) para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.
- À semelhança do que acontece com a área do círculo que pode ser vista como

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k \cdot r}{2} = \frac{r}{2} \cdot \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{r}{2} \cdot 2\pi r = \pi r^2$$



a área sob um gráfico de uma função contínua f(x) será



$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot \Delta x_n, \text{ em que } \Delta x_n = \frac{b-a}{n}$$

A designa-se por $\int_a^b f(x) \cdot dx$

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS

- A conclusão de que a área sob um gráfico se calcula usando uma primitiva da função deve começar com exemplos simples como:

- Seja $e = v_o t + \frac{1}{2} a t^2$ e a sua derivada $e' = v_o + at$

Suponhamos $v_o = 2$ e $a = 0{,}5$ e represente-se a função derivada $e' = 2+0{,}5t$

Comparem-se as áreas sob o gráfico da derivada e' com os valores da função primitiva *e*, para o mesmo valor de t:

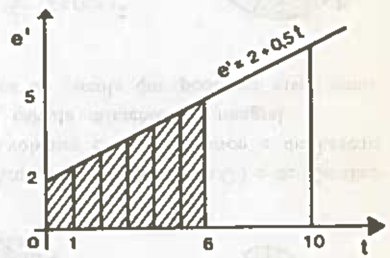
Por exemplo, para t=6s

Área: $A_6 = \frac{2+5}{2} \times 6 = 21$

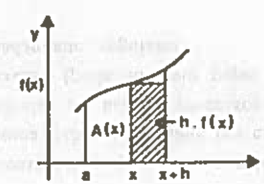
Função primitiva: $e = 2 \times 6 + \frac{1}{2} \times 0{,}5 \times 6^2$

$e = 12 + \frac{1}{2} \times 18$

$e = 12 + 9 = 21$



- A verificação de que A' (x) = f(x) deve ser feita com apoio numa figura do tipo

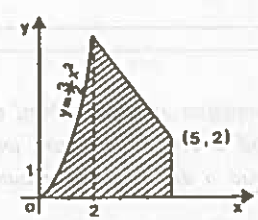


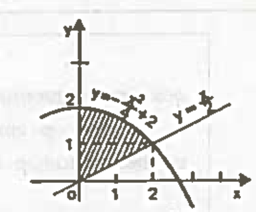
$$A(x+h) - A(x) \approx h \cdot f(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot f(x)}{h} = f(x)$$

ou seja $A'(x) = f(x)$ pelo que A(x) é uma primitiva de f(x)

- A partir do conhecimento anterior a regra de Barrow pode ser demonstrada.
- As áreas a calcular não devem exceder em dificuldade os exemplos:





- Sugere-se o cálculo de uma dessas áreas por um processo aproximado e a comparação com o valor obtido por integração.

Número de aulas previstas: 8.

4. FUNÇÕES V — Funções trigonométricas em $\mathbb{R}$.

As funções trigonométricas podem estudar-se agora como funções de variável real recorrendo aos instrumentos da Análise Infinitesimal.

A importância destas funções ultrapassa largamente as aplicações geométricas conhecidas dos alunos; elas intervêm no estudo de muitos fenómenos físicos nomeadamente nos de natureza periódica. Por isso se inclui nesta unidade a transformação de expressões, a resolução de equações e o estudo de funções trigonométricas simples.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
· **Seno, co-seno e tangente como funções reais de variável real:** · Domínio, período. Continuidade (informação). · Fórmulas da diferença, da soma e da duplicação. · Estudo do $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$ · Derivadas (com demonstração) do seno, do co-seno e da tangente. · Derivada da função composta. · Estudo analítico do seno, co-seno e tangente; gráficos. · Primitivas do seno e do co-seno.	· Transformar expressões trigonométricas. · Resolver equações trigonométricas. · Estudar analiticamente funções trigonométricas, (zeros, variação, concavidade, assímptotas...) · Calcular áreas sob gráficos de funções simples envolvendo sen x ou cos x.	· As fórmulas citadas referem-se a seno, co-seno e tangente; o uso de formulários deve ser consentido. O aluno deve saber usar cos2a como $1-2\text{sen}^2 a$ ou $2\cos^2 a-1$, o que permite linearizar $\text{sen}^2 a$ e $\cos^2 a$. · Precedendo o estudo da derivada do seno o professor demonstrará que $\text{sen } x - \text{sen } a = 2 \text{ sen } \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}$ · A regra da derivação da função composta será aplicada a outras funções além das trigonométricas · O limite de $\frac{\text{sen } x}{x}$ quando $x \to 0$ deve ser obtido a partir da intuição geométrica de que $\text{sen } x < x < \text{tg} x$ sendo x a medida do arco em radianos com valores próximos de zero. · A partir da conclusão sobre $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$ podem-se pedir ao aluno limites de sucessões como $u_n = n \text{ sen } \frac{1}{n}$. · No cálculo de áreas sob curvas chamar a atenção do aluno para o caso de a curva estar abaixo do eixo no intervalo pedido. · Níveis de dificuldade a não exceder: *a)* identidades a provar: $\frac{2 \text{ sen } 2a - \text{sen } 4a}{2 \text{ sen } a \cos a} = 4 \text{ sen}^2 a$ *b)* equações a resolver: $\frac{\sqrt{3} \cos x}{3} + \text{sen}(\pi + x) = 1$ ou $\text{sen } x - 2 \cos x = 0{,}5$ (calculadora) em $[0,\pi[$. *c)* indeterminações a levantar: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x - \text{tg } 2x}$ *d)* funções a estudar: $f(x) = \frac{x}{2} + \text{tg } x$ em $]-2\pi, 2\pi[$ *e)* primitivas a calcular: $P(3 \text{ sen } x)$

Número de aulas previstas: 14.

5. FUNÇÕES VI — Funções exponencial e logarítmica

Completa-se o conjunto de funções a conhecer no ensino secundário e aperfeiçoa-se o esboço de gráficos apoiado no estudo analítico.
As funções exponencial e logarítmica intervêm no estudo matemático de fenómenos diversos como o crescimento de populações de seres vivos, a desintegração radioactiva, a inflação, a acidez de uma solução... Estão na base do funcionamento de instrumentos de cálculo e têm enorme importância em Matemática superior quando a base é o número e.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA

- A sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
  - Estudo numérico; convergência; valores aproximados de *e*.
- A noção de exponencial a^x com $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$;
  - Propriedades. Informação de que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ e de que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$
- Noção de logaritmo de x na base a com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
  - Propriedades. Referência às bases 2 e 10. Operações com logaritmos.
- Função $x \to a^x$ com $a>1$.
  - Derivada, primitiva; estudo analítico e gráfico. Áreas sob o gráfico.
- Função $\log_a x$, com $a>1$.
  - Derivadas, estudo analítico e gráfico.
- Áreas sob o gráfico da função $\frac{k}{x}$.
- Levantamento de indeterminações dos tipos 1^∞, 0^0, ∞^0.
- Justificação de que $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} e^{g(x) \cdot (f(x)-1)}$, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$

OBJECTIVOS

- Fazer o estudo analítico de funções em cuja definição entram funções exponenciais ou logarítmicas.
- Caracterizar a função inversa de uma função exponencial (logarítmica) dada.
- Resolver equações em que intervêm logaritmos ou exponenciais.
- Calcular limites, nomeadamente levantar indeterminação dos tipos 1^∞, 0^0, ∞^0, de funções de variável real ou natural.

OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS

- Para obter valores aproximados de *e* a partir da sucessão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ programar a calculadora ou recorrer a um computador; a demonstração da convergência desta sucessão (monotonia e majoração) ficará ao critério do professor face ao tipo de turma que tiver.
- O estudo de uma função pode estar ligado à resolução de problemas concretos. Exemplos: 1. «Uma substância radioactiva perde 50% da sua massa em 10 anos. A quanto se reduzem 100 kg dessa substância em 50 anos? E em t anos? Estude a função de t obtida».
  2. «Um cabo estendido entre dois postes, em determinadas condições toma a forma do gráfico de $y = 4e^x + e^{-x}$; estude a função e mostre que a altura mínima é 4 (menor valor que y pode tomar)».
- Devem ser dedicadas várias aulas ao estudo completo de funções — domínio, continuidade, zeros, assímptotas, monotonia, extremos relativos e absolutos, concavidades, pontos de inflexão, gráfico.
  Pode-se pedir também a área sob troços do gráfico; a área sob um ramo da hipérbole $\frac{1}{x}$ entre 1 e α será igual a 1 quando α = e, o que sugere uma interpretação geométrica do número *e*.
  Os gráficos podem ser feitos em papel milimétrico e com o apoio complementar da calculadora. É uma óptima oportunidade para trabalhos de grupo os quais podem envolver, como é evidente, qualquer dos tipos de funções dados nas unidades anteriores. Exemplos de trabalhos de grupo (dificuldade e não exceder):

Faça o estudo analítico e gráfico 1. $x \mapsto f(x) = \frac{x}{1 - \log x}$

2. $x \mapsto g(x) = e^x \cdot \cos x$ em $]-2\pi, \frac{3}{2}\pi[$.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS

- O aluno deve usar transformações como: $2^x = e^{x \log 2}$; $\log\frac{1}{x} = -\log x$

  e deve saber deduzir que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$ a partir da informação sobre $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; este conhecimento deve ser usado na demonstração da derivada de logx.

  ($\log x = \ln x$ = logaritmo natural ou neperiano de x)

- Ao longo desta unidade a calculadora será um auxiliar importante.
- Sugere-se a realização de pelo menos uma actividade utilizando papel logarítmico.
- Pode fazer-se uma referência ao matemático escocês John Neper e à importância que os logaritmos tiveram no cálculo numérico.
- Quanto às indeterminações do tipo 1^∞ o aluno deve compreender que sendo f e g contínuas, com $f(x) > 0$ nas vizinhanças de a, é $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x).\log f(x)}$; se $f(x) \neq 1$ e $f(x) \to 1$ quando $x \to a$,

  então $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x).\frac{\log f(x)}{f(x)-1}(f(x)-1)} = \lim\limits_{x\to a} e^{g(x).\left(f(x)-1\right)}$

  porque $\lim\limits_{f(x)\to 1} \frac{\log f(x)}{f(x)-1} = 1$. Exemplos:

  a) $\lim\limits_{x\to 0} (1-2\,\text{sen}\,x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}(1-2\,\text{sen}\,x-1)} = \lim\limits_{x\to 0} e^{-2\frac{\text{sen}\,x}{x}} = e^{-2}$

  b) $\lim\limits_{x\to 0} \cos 2x^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\cos(2x)-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{-2\,\text{sen}^2 x}{x^2}} = e^{-2}$

  c) (variável natural) $\lim \left(\frac{n^2-2}{n^2+1}\right)^{5n} = \lim e^{5n\left(\frac{n^2-2}{n^2+1}-1\right)} = e^0 = 1$

Número de aulas previstas: 18.

6. NOÇÕES DE GRUPO E DE CORPO: Extensão de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$

Nesta unidade abordam-se os conceitos de grupo e de corpo com o objectivo de dar uma visão geral e unificadora dos mais importantes conjuntos numéricos.

Tal como o conjunto $\mathbb{R}$ surge como extensão de $\mathbb{Q}$, aparece agora, $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, como extensão de $\mathbb{R}$, dando solução a alguns problemas operatórios insolúveis no universo anteriormente conhecido. Os números complexos serão estudados na forma $a+bi$ com a, $b \in \mathbb{R}$.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA

- **Operações binárias:**
  - Propriedades; operação (ou lei de composição) interna; grupóide.
  - Grupo: definição, exemplos.
  - Corpo: definição, exemplos.

  Demonstração de que $-a.b = -(a.b) = a.(-b)$, de que $0.a = 0$ e de que $a.b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ em qualquer corpo.

- **Extensão de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$:**
  - O problema da raiz quadrada de um número negativo; o símbolo i.
  - Igualdade, adição e multiplicação de números complexos; conservação das regras de cálculo. Números conjugados; soma e produto. Divisão em $\mathbb{C}$.
  - Reconhecimento de que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é corpo.

- **Representação geométrica de um complexo:**
  - Correspondência entre $\mathbb{C}$ e o plano; entre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$, entre $\mathbb{C}$ e $\mathcal{V}_{\pi}$. O número i como operador da «rotação de 90°».

OBJECTIVOS

- Averiguar se um grupóide dado é grupo (suporte numérico, operações triviais)
- Averiguar se um terno $(A, +, .)$ é corpo (suporte numérico, operações triviais).
- Operar com números complexos na forma algébrica.
- Calcular as raízes quadradas de um real negativo.
- Interpretar geometricamente o produto de um complexo z por i e por $-i$.

OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS

- Os exemplos de grupóide, grupo e corpo a considerar incluirão os suportes $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou alguns dos seus subconjuntos algebrizados com as operações triviais, por exemplo $(\{a+b\sqrt{2}\}, +, \cdot)$ com a, $b \in \mathbb{Q}$.
- A título de exemplo poderão apresentar-se algumas operações não triviais, mas simples, como a média aritmética ou a, média geométrica para concluir se gozam ou não de dada propriedade.
- Uma perspectiva geral sobre a evolução do conceito de número é oportuna e importante para o enriquecimento cultural do aluno; pode constituir o tema de trabalhos de grupo a apresentar no final do ano lectivo para avaliação, desde que seja fornecida bibliografia adequada e acessível.
- O aluno deve realizar graficamente o produto de $a+bi$ por i $((0,1))$ o que se traduz por passar do vector (a,b) para o vector perpendicular $(-b,a)$: rotação de 90° no sentido directo; o mesmo quanto ao produto por $-i((0,-1))$: rotação de 90° no sentido retrógrado.

Número de aulas previstas: 10.

7. UNIDADE DE OPÇÃO — OPÇÃO A: O corpo C dos números complexos — Estudo na forma trigonométrica

Nas turmas onde predominam alunos que aspiram a cursos superiores de forte componente matemática / física esta será uma opção que constitui o prolongamento natural da unidade 6.

Os números complexos, trabalhados agora na forma trigonométrica, permitem esclarecer finalmente o problema da radiciação.

Algumas condições na variável z serão interpretadas no plano de Argand.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
· **Complexos na forma trigonométrica:** - Representação trigonométrica de um número complexo, do seu conjugado, do seu simétrico, do seu inverso. - Multiplicação, divisão, potenciação e radiciação de complexos na forma trigonométrica: fórmulas de Moivre. - Propriedades dos números conjugados. · **O módulo $\|z-z_0\|$ como distância:** - Propriedades do módulo em **C**. - Interpretação geométrica de condições simples na variável complexa.	· Converter a forma algébrica na trigonométrica e vice-versa. · Operar com números complexos na forma trigonométrica e na forma algébrica. · Representar graficamente as n raízes de índice n de um complexo. · Resolver equações simples. · Identificar domínios planos definidos por condições em z, com $z \in \mathbb{C}$. · Identificar, em casos simples, grupos com suporte contido em **C**.	· As condições a interpretar não excederão o nível de dificuldade de $\left\| \frac{z - z_0}{z - z_1} \right\| \leq 1$; $\|z - z_0\| + \|z - z_1\| = 2a$ $0 < \arg\ i\ (z - z_0) \leq \frac{\pi}{2}$ $\|z - 2\| \leq 2 + \text{Re}\ z$ (É necessário intepretar primeiro $\arg\ (z-z_0) = \alpha$ como semi-recta de origem z_0). Os domínios a identificar podem ser definidos por conjunção ou disjunção de condições e pode ser preciso transferir o problema para a representação cartesiana; os domínios serão limitados por rectas ou arcos de cónicas com equações conhecidas dos alunos. As situações não devem ser rebuscadas e devem envolver cálculos simples.

Número de aulas previstas: 12.

7. UNIDADE DE OPÇÃO — OPÇÃO B: ESPAÇO VECTORIAL (ou «espaço linear») SOBRE UM CORPO

Outro possível prolongamento da unidade 6, na qual se estudaram duas importantes estruturas algébricas — grupo e corpo — é o estudo do conceito de espaço vectorial de que os alunos já conhecem exemplos e propriedades embora sem deles ter abstraído a estrutura.

O conceito de espaço vectorial tem uma enorme importância em Matemática assim como a classe de aplicações compatíveis com esta estrutura (aplicações lineares). É um conceito unificador de diferentes ramos da Matemática que tem encontrado muitas aplicações em Estatística Economia, (por exemplo, na programação linear), na Física e na Engenharia.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
· **Conceito de espaço vectorial (ou linear) sobre um corpo:** · Exemplos. Propriedades: $o\vec{u} = \vec{o}$; $a\vec{o} = \vec{o}$; $a\vec{u} = \vec{o} \Leftrightarrow a = o \vee \vec{u} = \vec{o}$ · Subespaço linear: definição e critério; subespaço gerado por um conjunto de vectores.	· Averiguar se um conjunto dado é espaço/subespaço, vectorial real.	· $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{V}_\pi$, $\mathcal{V}_E$ e $\mathbb{C}$, são conjuntos que o aluno já conhece, algebrizados com a operação +; é fácil salientar agora que são todos grupos comutativos e que os seus elementos podem ser multiplicados por um número real (escalar); das analogias entre as respectivas estruturas pode abstrair-se o conceito de espaço vectorial sobre um corpo. · A título de exemplo poderá referir-se $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$ como corpo de escalares mas as questões a propor aos alunos serão sobre espaços vectoriais reais, nomeadamente $\mathbb{R}^n$ com $n = 2, 3, 4$.
· **Dependência e independência linear:** · Teoremas elementares (com demonstração). · Base: definição; informação de que todo o espaço tem uma base. · Teorema (com demonstração): Se E tem uma base de cardinal p, quaisquer p vectores independentes geram E e formam nova base. · Corolário (com demonstração): Se E tem uma base de cardinal p quaisquer p+1 vectores são dependentes ou seja, não pode haver em E mais de p vectores livres. · *Dimensão* de um espaço linear; $\mathbb{R}^n$ tem dimensão n; base canónica.	· Averiguar se determinados vectores são linearmente dependentes ou independentes. · Reconhecer e determinar bases e dimensões de um espaço linear real (ou subespaço).	· Entre os exemplos a trabalhar, individualmente ou em grupo, poderão aparecer espaços reais como {polinómios de grau $\leq n$}; {funções contínuas em [a,b]}; {sucessões convergentes}, {matrizes 3×3},... · As demonstrações dos teoremas referidos no programa podem fazer-se para um número determinado (3 ou 4 ou 5) de vectores; é o estilo de raciocínio que interessa e o aluno entenderá que a demonstração será análoga para qualquer número finito de vectores.

Número de aulas previstas: 12.

7. UNIDADE DE OPÇÃO — OPÇÃO C: Complementos sobre primitivação. Iniciação às equações diferenciais

Esta opção interessa a alunos que se destinam a bacharelatos ou licenciaturas técnico-industriais, a engenharias, a biologia.

Visa dar uma ideia de como se podem resolver equações em que figura uma função desconhecida e a sua derivada ou derivadas — equações diferenciais — as quais surgem no estudo de certos fenómenos em Cinemática, Electricidade, Biologia e outros campos. Só exemplos muito elementares podem ser resolvidos.

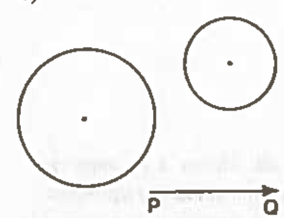
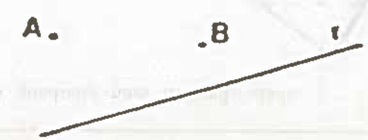
Precedendo esta abordagem há um reforço do cálculo de primitivas e introduz-se a noção de diferencial.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
· **Primitivação por decomposição e por partes.** · **Noção de diferencial de uma função:** · Aplicações numéricas. Derivada como quociente de diferenciais. · **Equações diferenciais elementares:** · Exemplos de situações em que podem surgir resolução dos tipos: $y' = f(x)$; $y'' = f(x)$; $y' = ay + b$; $y'' = ay$; $y' = ay^2$.	· Primitivar funções (simples); determinar a primitiva que verifica uma dada condição. · Calcular áreas entre 2 gráficos de equações dadas. · Calcular o diferencial de uma função. · Determinar uma solução de uma equação diferencial satisfazendo a uma condição dada. · Resolver problemas simples usando equações diferenciais.	· As funções a primitivar não devem exceder a dificuldade de: $ax^2+\mathrm{sen}(ax+b)$; $\cos^2x$; $\mathrm{sen}\,(mx)\,\cos\,(nx)$; $x^2.e^{ax}$; $\log x$. Pode-se exemplificar como o diferencial permite resolver problemas práticos como calcular o volume de tinta necessário para cobrir um depósito esférico com 3 m de raio, de forma que a camada de tinta tenha 4 mm de espessura. · Exemplo de equações muito simples para encontrar a solução que satisfaz a dada condição: 1) Sendo $y' = 6x$, determine y de modo que o gráfico da função passe em (2,3) (vem $y = 3x^2+c$ donde $c = -9$) 2) Dada a equação diferencial $y' = y+1$ vem $\frac{y'}{y+1} = 1$ donde, primitivando, $\log\|y+1\| = x+c$; pondo $c = \log k$ vem $\log\|y+1\| = \log(k.e^x)$; $\|y+1\| = k.e^x$; se $y(0) = 3$ será $k = 4$ donde $\|y+1\| = 4e^x$ · Temas da Geometria, da Física, do crescimento de populações, de transformações radioactivas, dão origem a problemas que se resolvem usando equações diferenciais simples. Exemplos: 1) Calcular a equação dos espaços do movimento de um corpo, sabendo que a velocidade em cada instante é o dobro do tempo gasto e no instante t=1 o espaço percorrido é e=4 m. Temos $v = \frac{de}{dt}$ e $\frac{de}{dt} = 2t$, donde $e = t^2 + c$ Como t=1 implica que seja e=4, vem $4 = 1^2+c$, c=3 e $e = t^2+3$. $v = \frac{de}{dt} = 2$ m/s

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
		2) A aceleração de um móvel é $a=10\ m/s^2$ e no instante $t=0$ vem $v=\frac{de}{dt}=-2m/s$ e $e=3\ m$. Determinar a equação do espaço. Tem-se $a=\frac{d^2e}{dt^2}=10$, $\frac{de}{dt}=10\ t+c_1$, $e=5t^2+c_1t+c_2$; com $t=0$, vem $-2=10\times0+c_1$, e $3=5\times0^2+c_1\times0+c_2$, donde $c_1=-2$ e $c_2=3$ e, por isso, $e=5t^2-2t+3$. 3) A população de uma cidade aumenta proporcionalmente à mesma. Se nos primeiros 40 anos aumentou de 40 000 para 90 000, qual será a população ao fim de 60 anos? $y'=ky \rightarrow \frac{y'}{y}=k \rightarrow \log y=kt+\log c \rightarrow \log\frac{y}{c}=kt \rightarrow \frac{y}{c}=e^{kt}$ e, ainda $y=c\ e^{kt}$. Como $t=0 \Rightarrow y=40\ 000$, vem $40\ 000=c\ e^{k.0}$ $c=40\ 000$ e $y=40\ 000\ e^{kt}$ Como $t=40 \Rightarrow y=90\ 000$, vem $90\ 000=40\ 000.e^{40k}$ $e^{40k}=\frac{9}{4}$ $k=\frac{1}{40}\log 2{,}25$ Por isso $y=40.000\ .\ e^{\frac{1}{40}(\log 2{,}25)\ t}$ ou seja $y=40.000 \times (2{,}25)^{\frac{t}{40}}$ Com $t=60$ vem $y=40.000\ .\ (2{,}25)^{\frac{60}{40}}=40.000 \times (2{,}25)^{1,5}=135.000$. **Número de aulas previstas: 12.**

8. UNIDADE DE OPÇÃO — OPÇÃO D: Tranformações geométricas do plano

O conceito de transformação permite simplificar de forma unificadora e dinâmica o estudo das propriedades das figuras, lançando uma nova luz sobre a ligação entre vários domínios da Geometria. Por outro lado a noção de grupo ajuda a sistematizar as diversas transformações geométricas já conhecidas do aluno (translações, rotações, simetrias, isometrias) e ainda homotetias e semelhanças. Esta é uma boa opção para alunos que se destinam a cursos ou profissões ligados a desenho técnico, design *ou arquitectura.*

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
· **Transformação geométrica do plano:**		· Com excepção das questões relacionadas com a estrutura de grupo, todas as actividades a propor ao aluno serão de natureza gráfica como, por exemplo, determinar o centro de uma homotetia dados objecto e imagem; determinar eixos de simetrias para decompor uma rotação (ou translação) dada; determinar imagens dadas pela composta de uma homotetia com uma simetria ou uma isometria positiva; determinar uma homotetia e uma isometria que apliquem uma figura dada noutra semelhante dada; determinar o centro e a amplitude da composta de uma translação com uma rotação dadas. · A composição de rotações e de rotação com translação pode ser feita decompondo estas tranformações em simetrias.
· definição; exemplos; pontos invariantes; figuras globalmente invariantes.		
· **Grupos de transformações geométricas:**	· Justificar que um dado conjunto de transformações é grupo.	Exemplos de problemas a resolver:
· Conjunto $\mathcal{T}$ das translações do plano. O grupo $(\mathcal{T}, o)$. Propriedades que se conservam na translação.		1)  a) determinar cordas da circunferência maior paralelas e iguais a [PQ]. b) «apoiar» nas duas circunferências um segmento igual e paralelo a [PQ].
· Conjunto $\mathcal{R}_o$ das rotações de centro o; o grupo $(\mathcal{R}_o, o)$. Propriedades que se conservam. Simetria central.	· Justificar raciocínios recorrendo às propriedades que se conservam em dada transformação.	
· Simetria axial de eixo e: invariantes. Propriedades que se conservam numa simetria.		
· Verificação gráfica dos teoremas: · «A composta de duas simetrias de eixos paralelos é uma translação» e «toda a translação se pode decompor em duas simetrias».	· Decompor uma rotação ou uma translação em duas simetrias e compor simetrias.	2) Determinar o caminho mais curto de A a B tocando a recta r 
· «A composta de duas simetrias de eixos concorrentes é uma rotação» e «toda a rotação se pode decompor em duas simetrias».		
· Justificação gráfica de que: «A composta de rotação com translação é rotação. «A composta de 2 rotações é translação ou rotação».	· Caracterizar graficamente a composta de rotação com translação e de duas rotações de centros diferentes. (determinar centro e amplitude da rotação ou vector da translação).	

DESENVOLVIMENTO DO TEMA

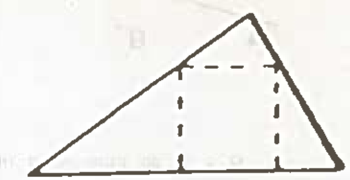
- O grupo $(\mathcal{T}\cup\mathcal{R}_o)$ (grupo das isometrias positivas do plano ou dos deslocamentos do plano).
- O grupo das isometrias. Isometrias negativas.
- O conjunto das homotetias do plano com centro em o: $\mathcal{H}_o$.
- O grupo $(\mathcal{H}_o)$. Propriedades que se conservam na homotetia.
- Noção de semelhança. Informação de que toda a semelhança é composta de homotetia com isometria.
- O grupo das semelhanças do plano (informação).
- Propriedades que se conservam na semelhança.

OBJECTIVOS

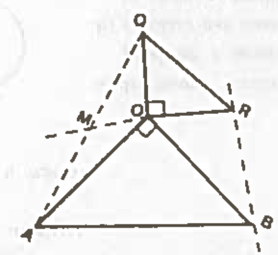
- Pesquisar transformações que deixem globalmente invariante numa figura dada.
- Obter imagens ou o centro ou a razão numa homotetia dada.
- Resolver graficamente problemas recorrendo a transformações.

OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS

3) Inscrever um quadrado num triângulo dado.



4) Dados dois triângulos rectângulos isósceles [OAB] e [ORQ] e sendo M o ponto médio de AQ prove que MO⊥BR. Sugestão: usar a rotação de centro O que aplica R sobre Q e mostre que a imagem de BR fica paralela a OM.



Número de aulas previstas: 12.

MÉTODOS QUANTITATIVOS

PARTE I

1 — INTRODUÇÃO

A frequência do Ensino Secundário deve permitir que o aluno adquira uma formação de base sólida e uma cultura geral suficiente para compreender melhor os fenómenos da vida real e ainda as competências necessárias para a integração imediata no mundo do trabalho e para a prossecução de estudos com perspectivas de sucesso. Conhecimentos básicos de Cálculo, Estatística e Funções, são, hoje em dia, indispensáveis em numerosos ramos de actividade e na interpretação de fenómenos das ciências humanas. Um aluno que faz o seu curso secundário em áreas de estudos humanísticos, sem qualquer contacto com números e gráficos, fica com uma formação tão incompleta como um aluno de áreas científico-tecnológicas que não tivesse frequentado qualquer disciplina de índole humanística.

O presente programa de Métodos Quantitativos destina-se a todos os alunos do ensino secundário que não integram a disciplina de Matemática no seu currículo. Pressupõe a formação matemática obtida no 3.º ciclo e é leccionado num único ano com três horas semanais. Por isto parece conveniente que o aluno frequente a disciplina, logo no 10.º ano, o que, embora não sendo obrigatório, tem ainda a vantagem de poder servir de suporte a outras disciplinas. É evidente que o ensino desta disciplina e, consequentemente, a respectiva avaliação, têm de se adequar ao carácter próprio destas áreas e às aptidões e gostos que normalmente manifestam os alunos que as escolhem. Temos de ter em conta um facto do conhecimento dos professores das áreas de letras: que muitos alunos as escolhem como fuga à disciplina de Matemática. Aguarda-se que esta situação se venha a alterar com os novos currículos, que alunos e encarregados de educação sejam informados e sensibilizados para a necessidade de estudos quantitativos em classes literárias, prática que noutros países da Europa já tem muitos anos de experiência. Procurando manter a coerência e a consistência do currículo ao longo de toda a escolaridade, seleccionaram-se objectivos que, vindo na sequência dos do Ensino Básico, contemplam a especificidade da disciplina e a maturidade psicológica dos alunos. Implicam ainda uma renovação metodológica que urge levar a cabo, assentando no pressuposto de ser o aluno o agente da sua aprendizagem.

Os temas seleccionados para o programa de Métodos Quantitativos são:

— Estatística e Probabilidades;
— Lógica e números;
— Funções.

Estão organizados de forma a:

— abordar de forma intuitiva e sem formalismos exagerados os conceitos e técnicas, destacando a sua operacionalidade;

— preservar o papel estruturante da Lógica na compreensão dos método quantitativos;

— promover o enriquecimento cultural dos alunos pelo enquadramento histórico dos conceitos e pela respectiva importância no mundo moderno;

— contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico: pesquisar, observar, intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar.

A avaliação considera-se parte integrante do processo de ensino-aprendizagem, com a função de o regular e orientar, com um papel formativo e promotor da confiança em si próprio.

Ao estabelecer as finalidades da disciplina de Métodos Quantitativos, tem-se em conta que:

— é importante o papel da Matemática, quer como instrumento de intervenção no real, quer como factor de desenvolvimento de uma estrutura dinâmica de pensamento;

— a disciplina de Métodos Quantitativos, para além do eminente carácter formativo, propicia saberes e técnicas indispensáveis no tratamento da informação e na resolução e formulação de problemas;

— o centro do processo ensino-aprendizagem é o aluno como pessoa;

— os Métodos Quantitativos se aprendem construindo, vivendo experiências que ligam o concreto ao abstracto.

2 — FINALIDADES

Consideram-se finalidades da disciplina de Métodos Quantitativos:

- Desenvolver a capacidade de quantificar dados para descrever, interpretar e intervir no real.

- Aprofundar elementos de uma cultura científica, técnica e humanística, que constituem suporte cognitivo e metodológico, visando a inserção na realidade social e económica.

- Promover a realização pessoal do aluno mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e de solidariedade.

3 — OBJECTIVOS GERAIS

VALORES / ATITUDES

- **Desenvolver a autonomia e a solidariedade:**
  - Exprimir e fundamentar as suas opiniões.
  - Respeitar as opiniões dos outros e aceitar as diferenças.
  - Responsabilizar-se pelas suas iniciativas e tarefas, tanto individuais como colectivas.
  - Manifestar hábitos de trabalho e persistência.
  - Elaborar e apresentar os seus trabalhos de forma organizada e cuidada.
  - Procurar a informação de que necessita.
  - Revelar espírito crítico e de rigor, e confiança nos seus raciocínios.
  - Abordar situações novas com interesse e espírito de iniciativa.
  - Avaliar situações e tomar decisões.
  - Colaborar na resolução de problemas da comunidade em que se insere.

CAPACIDADES / APTIDÕES

- **Desenvolver a capacidade de utilizar métodos quantitativos:**
  - Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução.
  - Seleccionar uma estratégia adequada à resolução de um problema.
  - Formular hipóteses e prever resultados.
  - Interpretar e criticar resultados no contexto do problema.
  - Resolver problemas de natureza quantitativa no âmbito das Ciências Humanas.
- **Desenvolver o raciocínio lógico-quantitativo:**
  - Descobrir relações entre conceitos.
  - Formular generalizações a partir de experiências.
  - Validar conjecturas.
  - Justificar conclusões recorrendo ao raciocínio lógico.
  - Compreender a relação entre o avanço científico e o progresso da humanidade.
- **Desenvolver a capacidade de comunicação:**
  - Comunicar conceitos, raciocínios e ideias com clareza, oralmente e por escrito.
  - Interpretar textos que envolvem símbolos lógicos e matemáticos.
  - Apresentar o mesmo conceito em diversas formas ou linguagens.
  - Argumentar com lógica e bom senso.
  - Apresentar os textos de forma clara e organizada.

CONHECIMENTOS

- **Ampliar o conhecimento de Estatística e Probabilidades:**
  - Interpretar e comparar distribuições estatísticas atendendo às medidas de localização e dispersão.
  - Calcular probabilidades, sendo os acontecimentos elementares equiprováveis ou não.
  - Resolver problemas simples relativos à distribuição bidimensional.
- **Ampliar o conceito de número e desenvolver o cálculo e o estudo de funções:**
  - Aperfeiçoar o cálculo em $\mathbb{R}$
  - Aplicar conhecimentos de lógica indispensáveis à clarificação de conceitos.
  - Operar com a calculadora.
  - Interpretar o gráfico de uma função.
  - Esboçar o gráfico de uma função e reconhecer algumas das suas características.
- **Conhecer aspectos da História da Matemática:**
  - Conhecer personalidades e factos marcantes da História da Matemática relacionados com momentos históricos de relevância cultural e social.

4 — CONTEÚDOS

Conteúdos temáticos

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADES

A interpretação da informação estatística e probabilística é indispensável para compreender a sociedade em que vivemos, nomeadamente para compreender e avaliar a informação veiculada pelos meios de comunicação social.

As técnicas de tratamento de informação e o cálculo de probabilidades fazem hoje parte da bagagem exigida por qualquer carreira científica ou técnica.

O estudo da Estatística não se resume à elaboração de tabelas e gráficos nem ao cálculo de medidas de localização ou de dispersão; estas são instrumentos que, devidamente interpretados, apoiam a compreensão de propriedades globais da população a que se referem.

Neste tema dá-se continuidade aos estudos feitos no 3.° ciclo, ampliando a capacidade de interpretar e comparar distribuições.

As actividades a desenvolver devem referir-se de preferência a dados reais e recentes (informação meteorológica, desportos, agricultura) ou ligadas a outras disciplinas como a Geografia, Economia, ...

A possibilidade de quantificar a incerteza mediante o conceito de probabilidade abre novas perspectivas sobre a aplicação dos métodos quantitativos que enriquecem a cultura dos jovens e a sua preparação para compreender o mundo que os rodeia.

— Importância da Estatística;

— Representação, interpretação e comparação de distribuições estatísticas;

— Medidas de localização e de dispersão;

— Distribuição bidimensional: estudo gráfico e intuitivo;

— Evolução e importância do Cálculo das Probabilidades;

— Conceito frequencista de probabilidade;

— Lei dos grandes números;

— Probabilidade de acontecimentos elementares equiprováveis: lei de Laplace;

— Determinação da probabilidade de um acontecimento.

LÓGICA E NÚMEROS

A consolidação de noções básicas de Lógica, o desenvolvimento da capacidade de ler e interpretar um texto em que figurem símbolos lógicos e matemáticos, de calcular valores lógicos ... são importantes para a estruturação do pensamento, da expressão e da capacidade de raciocínio.

Pretende-se que o aluno adquira as técnicas essenciais à transformação ou à simplificação de expressões lógicas, sem contudo se exigir dele virtuosismos sem justificação neste programa.

Deverá ser dada atenção aos silogismos e aos raciocínios que devem ser exemplificados sobretudo com temas relacionados com universos não numéricos.

Recordam-se algumas técnicas de cálculo com números racionais e com números reais, usando, nomeadamente, a notação científica.

As sucessivas extensões do conceito de número, nomeadamente do conjunto $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ e a $\mathbb{C}$, deverão ser vistas como respostas à necessidade de superar a impossibilidade de efectuar certas operações.

— Designações e proposições: operações; implicação e lei da conversão; silogismos e método de redução ao absurdo;

— Expressões designatórias: domínios; condições e conjuntos de soluções:

Operações com condições e com conjuntos;
Condições impossíveis, universais e incompatíveis;
Quantificadores universal e existencial;
Equivalência formal e implicação; negação;

— Números reais:

Potências de base 10 e expoente inteiro: notação científica. Resolução de problemas;
Números irracionais e sua descoberta; as dízimas;
Conservação das regras operatórias em $\mathbb{R}$; ordenação; intervalos;

— Números complexos:

Referência histórica à descoberta e uso generalizado dos números complexos;
O conjunto $\mathbb{C}$ como extensão de $\mathbb{R}$.

FUNÇÕES

O estudo de funções é fundamental para a interpretação das leis que regulam os mais variados fenómenos do mundo em que vivemos.

Retomam-se e ampliam-se conhecimentos do 3.º ciclo sobre funções, estudando o comportamento de funções reais de variável real, através de exemplos da vida corrente, da Geometria, da Economia, da Geografia, ...

A interpretação da realidade económica e social pressupõe a leitura e interpretação de gráficos.

Entre as funções a abordar inclui-se a função exponencial que caracteriza o desenvolvimento de certas populações e de vários fenómenos que interessam ao homem moderno.

— Características gerais de uma função; interpretação e construção de gráficos;

— Sucessão exponencial;

— Função exponencial.

5 — ORIENTAÇÃO METODOLÓGICA

Considerações gerais

As finalidades e os objectivos gerais indicados mostram que o programa preconiza um desenvolvimento equilibrado de aptidões e atitudes, a par da aquisição de alguns conhecimentos básicos sobre Estatística, Funções e Lógica.

Tendo como pressuposto ser o aluno agente da sua própria aprendizagem, propõe-se uma metodologia em que os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas, dando especial atenção à comunicação oral e escrita, à capacidade de estruturar um trabalho e de procurar a informação de que necessita com espírito de iniciativa. Neste contexto, destaca-se a importância das actividades a propor para trabalho de grupo ou individual, as quais contribuem para o reforço das atitudes de solidariedade e autonomia e desenvolvem as capacidades de investigação e de comunicação.

Devem escolher-se situações que estimulem o raciocínio lógico e o pensamento científico, sem exigir muitos pré-requisitos de cálculo; a interpretação de gráficos de funções e de distribuições estatísticas é também um objectivo essencial. Naturalmente será preciso aperfeiçoar algumas rotinas de cálculo para o desenvolvimento dos conteúdos previstos, como operações com números na notação científica e equações de 1.º grau envolvendo números muito grandes (ou muito pequenos) e necessários à resolução de problemas práticos (conta bancária, orçamentos, percentagens, descontos, impostos, ...).

O uso da calculadora é obrigatório (de preferência com notação científica) e deve ser encarado não só como «ferramenta» de cálculo mas também como meio de pesquisa e aprendizagem.

Raciocínio lógico

Uma introdução à lógica das proposições e das condições tem por objectivo melhorar o rigor do pensamento e da linguagem escrita e clarificar alguns tipos de inferência lógica em que se decompõe o raciocínio dedutivo.

Comunicação

Tendo em conta a estreita dependência entre processos de estruturação do pensamento e a linguagem, é absolutamente necessário que as actividades a propor melhorem a capacidade de expressão.

O aluno deve verbalizar os raciocínios, discutir processos e habituar-se a usar a linguagem simbólica da Lógica e da Matemática, rica pela sua precisão e poder de síntese.

Deve proporcionar-se ao aluno oportunidades para expor um tema previamente preparado, a resolução de uma questão ou a parte que lhe cabe num trabalho de grupo.

Os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer pequenos relatórios, quer monografias, devem ser apresentados de forma clara e organizada. Constituindo um dos seus objectivos o desenvolvimento da capacidade de autonomia dos alunos, deve, no entanto, na respectiva fase de planificação, garantir-se o acompanhamento do professor.

Perspectiva histórico-cultural

A procura de informações sobre a génese e o percurso de um conceito ao longo da História e as respectivas ligações com o progresso da Humanidade, a compreensão da importância de um conteúdo na Ciência e na Tecnologia do século XX e, portanto, para o bem-estar dos cidadãos, o conhecimento de episódios e de personalidades que contribuiram decisivamente para o estado actual dos conhecimentos..., podem fomentar ou aumentar o interesse pelos temas em estudo, ao mesmo tempo que constituem fonte de cultura.

Papel do professor

Na concretização da metodologia proposta, cabe ao professor ser simultaneamente dinamizador e regulador do processo ensino-aprendizagem, criando situações motivadoras que aliem os saberes e técnicas a adquirir às capacidades a desenvolver.

A função formativa desta disciplina só é concretizada se o professor conseguir estabelecer uma relação positiva dos alunos com ela. Neste sentido, sugerem-se algumas medidas a desenvolver logo no início do ano: as considerações feitas nos textos anteriores podem ser veiculadas aos alunos cujos receios e inibições têm de ser ouvidos e considerados; os objectivos gerais, conteúdos e metodologias da disciplina devem ser comentados nas primeiras aulas; os trabalhos a realizar e o seu peso na avaliação devem ser negociados. Esta apresentação inicial pode ser decisiva para o êxito da disciplina.

Recursos

A didáctica prevista pressupõe a possibilidade de usar diversos materiais e equipamento:

— Material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso);

— Quadro quadriculado; papel milimétrico;

— Meios audiovisuais (retroprojector, acetatos, canetas, *slides*, vídeo, ...);

— Livros para consulta;

— Outros materiais escritos (folhas com dados estatísticos, fichas de trabalho e de avaliação, ...);

— Calculadoras com notação científica;

— Computador.

Prevê-se ainda a possibilidade de recorrer a fontes diversas para a recolha de dados estatísticos (autarquias, clubes, hospitais, empresas, fábricas, cooperativas, ...)

6 — AVALIAÇÃO

A avaliação é entendida na sua função reguladora e orientadora do processo ensino-aprendizagem, numa «óptica formativa favorecedora da confiança em si próprio», visando desenvolver a autonomia numa perspectiva de realização pessoal.

Assim, terá de ser uma constante no quotidiano da aula, de modo a orientar e a ajustar permanentemente o processo ensino-aprendizagem, permitindo ao professor controlar e melhorar a sua prática pedagógica e ao aluno implicar-se no próprio processo.

Uma vez que os conteúdos de aprendizagem abrangem os domínios dos conhecimentos, das capacidades e das atitudes, é objecto de avaliação a progressão do aluno em todos estes domínios.

Em rigoroso acordo com o ensino desenvolvido, a avaliação na disciplina de Métodos Quantitativos deve dar informação sobre:

— a capacidade para mobilizar conhecimentos e técnicas na resolução de problemas da vida real;

— a criatividade na resolução de situações;

— a capacidade para utilizar a linguagem lógica e matemática para comunicar ideias;

— a capacidade para raciocinar e analisar e para interpretar um texto com símbolos lógicos ou matemáticos;

— o conhecimento e compreensão de conceitos e métodos;

— a capacidade de elaborar um texto escrito sobre um tema do âmbito do programa;

— a perseverança e o cuidado postos na realização dos trabalhos individuais e a cooperação no trabalho de grupo.

Os parâmetros enunciados poderão ser objecto de maior pormenorização, tal como se encontra explicitado nos objectivos gerais da disciplina, devendo o professor estabelecer as prioridades de acordo com as experiências de aprendizagem desenvolvidas.

A avaliação da progressão do aluno, de forma sistemática, intencional e contínua, quer em relação aos processos utilizados, quer em relação aos resultados obtidos, desenvolve a autoconfiança e a capacidade de resolver situações em vários contextos.

A avaliação da capacidade de comunicar em matemática faz-se observando o modo como o aluno descreve processos, enuncia propriedades, expressa conceitos, critica resultados, compreende e avalia ideias, estando o professor particularmente atento ao desenvolvimento da clareza, precisão e adequação da linguagem utilizada oralmente e nos trabalhos escritos.

Na avaliação da capacidade de raciocínio colher-se-á informação sobre os diferentes tipos de raciocínio utilizados, observando se o aluno justifica processos, faz e valida conjecturas, relaciona, generaliza, demonstra, tira conclusões e argumenta.

Incidindo a avaliação sobre a progressão de cada aluno, são de admitir ainda no Ensino Secundário diferentes ritmos na aquisição de um conceito, não se exigindo que todos os alunos atinjam o mesmo nível ao mesmo tempo. Critério semelhante é de aplicar quanto ao desenvolvimento de capacidades e atitudes.

Uma avaliação formativa e contínua, que contemple todos os domínios de aprendizagem e respeite o ritmo do aluno, implica uma mudança na escolha de meios e instrumentos de avaliação.

É preciso prestar especial atenção à recolha de dados, que tem de ser sistemática, recorrendo à observação e registo regular, através de instrumentos adequados e diversificados.

São de utilizar:

— grelhas de observação;

— listas de verificação;

— questionários de opinião;

— trabalhos individuais e de grupo;

— testes, etc.

A observação, embora sistemática, pode ser breve e não é de excluir a observação intuitiva e pontual. À partida, nenhum tipo de informação deve ser excluído; no entanto, a avaliação formativa, para ser eficaz, não exige uma acumulação de verificações, mas apenas as essenciais para que o professor e o aluno possam, de modo contínuo, ir efectuando o balanço do processo, permitindo ao professor desenhar actividades específicas de ajuda, tanto de recuperação como de reforço e aprofundamento, e ao aluno consciencializar os seus progressos e dificuldades, experimentar novos caminhos e aumentar a confiança em si próprio.

Para tanto, constituem meios de avaliação todas as actividades de aprendizagem (trabalhos individuais e de grupo, discussões e debates, exposições escritas e orais, entrevistas...), assumindo relevo especial os trabalhos, tanto individuais como de grupo.

Compete ao professor construir o seu próprio sistema de observação, registo e intervenção, de acordo com a situação pedagógica e com a colaboração dos alunos, os quais deverão conhecer previamente os aspectos que serão objecto de observação, bem como os critérios a ter em conta na avaliação a efectuar, no âmbito dos objectivos seleccionados.

A auto-avaliação e a participação activa na avaliação de trabalhos individuais ou atitudes pessoais, a par da co-avaliação das várias tarefas, constituem modos de participação e implicação dos alunos na sua própria formação; contribuem para o desenvolvimento de atitudes de responsabilidade, cooperação e tolerância, fomentam a auto-estima, a afirmação progressiva da autonomia e a aceitação das diferenças.

Para que a avaliação assuma o seu carácter orientador e incentivador, é necessário que o professor comunique e comente, com cada aluno, os resultados das sucessivas avaliações, para efeitos de correcção ou reforço imediato e de valorização do esforço e progressão de cada um.

Uma avaliação formativa eficaz atenuará conflitos afectivos e contribuirá para fomentar uma atitude positiva face à Matemática, sem a qual não haverá aprendizagem.

PARTE II

PLANO DE ORGANIZAÇÃO E SEQUÊNCIA DO ENSINO-APRENDIZAGEM

Para esclarecimento dos pressupostos que presidiram à elaboração deste programa e dos objectivos que ele pretende alcançar é imprescindível a leitura da PARTE I onde estão expressos: finalidades do ensino de Métodos Quantitativos, objectivos, linha metodológica, materiais e recursos, justificação das escolhas feitas, apresentação global dos conteúdos temáticos e avaliação.

Nesta PARTE II incluem-se os objectivos gerais quanto a atitudes, aptidões e conhecimentos, o plano de distribuição e sequência dos conteúdos, um gráfico com os pesos relativos dos temas e finalmente o desenvolvimento das várias unidades com objectivos específicos, sugestões metodológicas e gestão do tempo.

Gestão do programa

Na proposta de ordenação dos temas e unidades considerou-se que:

— Ao iniciar o ano se deve escolher uma unidade que permita desenvolver actividades ligadas a situações concretas; de utilidade óbvia e que não exija muitos pré-requisitos para poder motivar a totalidade dos alunos.

— O estudo da Lógica, contributo importante para o desenvolvimento e aperfeiçoamento do raciocínio e da capacidade de expressão, deve ser feito cedo e relembrado sempre que oportuno.

— Há conteúdos cuja sequência não pode ser alterada:

Estatística → Probabilidades; Números reais → Funções reais.

Para cada unidade indica-se o número de aulas previstas, o qual pode ser encarado com flexibilidade mas que, no entanto, exprime o peso relativo e a profundidade do tratamento desejado.

No início do ano, o professor deve fazer uma planificação que contemple momentos para actividades de recuperação e para actividades de desenvolvimento, nomeadamente a elaboração de trabalhos de consulta e de outros trabalhos individuais e de grupo que ocupam mais tempo.

Se numa certa unidade o professor usou uma metodologia que tenha exigido mais tempo que o previsto, será conveniente que noutra unidade procure ganhar tempo, nomeadamente recorrendo a uma pedagogia mais directiva e fazendo algumas sínteses.

4 — CONTEÚDOS

1 — NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA

- Representação, interpretação e comparação de distribuições estatísticas, com utilização de medidas de localização e de dispersão.

- Distribuição bidimensional: estudo intuitivo.

2 — NOÇÕES BÁSICAS DE LÓGICA

- Designações e proposições. Universo $L = \{V,F\} = \{0,1\}$
  Operações em L: conjunção, disjunção exclusiva e inclusiva, negação.

- Implicação: expressão na disjunção; negação; lei de conversão.

- Silogismos: disjuntivo, transitivo, *modus ponens*, *modus tollens;* método de redução ao absurdo.

- Expressões designatórias; condições e conjuntos de soluções.

- Operações com condições e com conjuntos.

- Quantificadores universal e existencial; segundas leis de De Morgan.

- As relações de equivalência formal e implicação formal; correspondência com conjuntos, propriedades transitiva e reflexiva; negação da implicação.

3 — EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO

- Números reais: potências de expoente inteiro; números irracionais, extensão de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$.

- Números complexos; operações algébricas, extensão de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

4 — PROBABILIDADES

- Origem, evolução e importância.

- Experiências aleatórias, acontecimentos; conceito frequencista de probabilidade; lei dos grandes números.

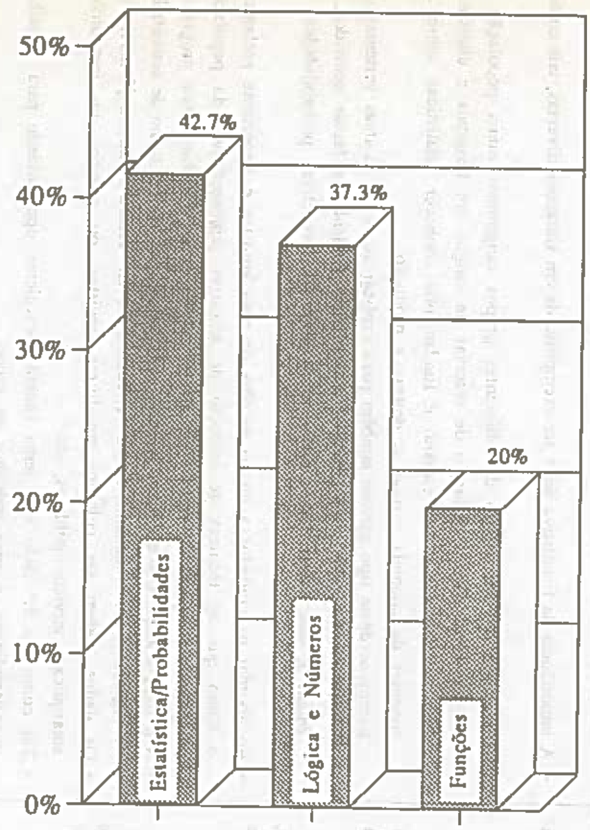
- Cálculo de probabilidade de um acontecimento.

5 — FUNÇÕES

- Referenciais cartesianos o.n. no plano, interpretação de condições simples.

- Funções definidas por tabelas e por fórmulas ($y = ax + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = \sqrt{x}$, ...) interpretação e elaboração de gráficos cartesianos por pontos; características gerais de uma função.

- Noção de sucessão; sucessão exponencial. Função exponencial: gráfico cartesiano, variação, sinal, zeros.



PESO RELATIVO DOS TEMAS

Estatística / Probabilidades — 32 aulas

Lógica e Números — 28 aulas

Funções — 15 aulas

Total — 75 aulas

1. NOÇÕES BÁSICAS DE ESTATÍSTICA

A organização e a representação de dados são retomados nesta unidade para um aperfeiçoamento e comparação de distribuições estatísticas (ou de informações estatísticas diversas).

Faz-se uma abordagem intuitiva e elementar da noção de correlação.

Tal como no 3.º ciclo, este tema proporciona excelente oportunidade para actividades interdisciplinares e para trabalhos de grupo.

Aconselha-se o uso da calculadora.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
• **Introdução:** Objecto; história; Estatística descritiva/indutiva; caracteres estatísticos; população e amostra, censo e sondagem.	• Indicar situações da vida quotidiana ou das Ciências onde a Estatística presta relevantes serviços.	• A importância da Estatística deve ser exemplificada em situações diversas, tais como: · O estudo da distribuição dos diferentes grupos sanguíneos numa população é indispensável para a definição de reservas de sangue em hospitais e clínicas. · Para um fabricante de vestuário é fundamental conhecer estatísticas sobre as medidas da clientela à qual se destina a produção. · Exemplos deste tipo servem também para explicar ao aluno as duas vertentes da Estatística: *Descritiva*, que trata os dados correspondentes a factos ocorridos, e *Indutiva*, que extrai desses dados previsões e as respectivas probabilidades.
• **Organização e interpretação de dados:** · Tabelas de frequência; · Gráficos.	• Construir tabelas de efectivos de frequências relativas (percentagens) e de frequências acumuladas a partir de dados fornecidos.	• Ao abordar os cuidados a ter na escolha de uma amostra é importante esclarecer o aluno que as técnicas de selecção de amostras representativas da população completa são objecto de estudos específicos que excedem o âmbito deste programa.
· Medidas de localização: moda, média, mediana e quartis; o símbolo Σ. · Diagramas de «extremos e quartis».	• Construir e interpretar gráficos de barras poligonais, circulares, histogramas, diagramas de «extremos e quartis». • Usar o símbolo Σ nos cálculos.	• A revisão e ampliação de conhecimentos deve desenvolver-se em torno de actividades de organização e tratamento de dados, fornecidos em estado bruto ou já tabelados. • Os dados podem ser colhidos em livros, revistas, ou pedidos em instituições autárquicas, serviços públicos, etc.
· Medidas de dispersão: · Amplitude, variância e desvio de padrão; · Fórmula para o cálculo abreviado.	• Interpretar uma distribuição recorrendo à análise conjunta de medidas de localização e de dispersão.	• Tal como no 3.º ciclo este tema constitui excelente oportunidade para trabalhos interdisciplinares e para trabalhos de grupo. Assim, todo o aluno deve participar num trabalho (individual ou de grupo) envolvendo tratamento e interpretação de dados ou pesquisa sobre a evolução e importância da Estatística no nosso tempo.
• **Referência a distribuições bidimensionais:** · Diagrama de dispersão; ideia intuitiva de covariância e de recta de regressão. · Noção intuitiva de correlação; coeficiente de correlação e sua variação em $[-1,1]$.	• Identificar em gráficos muito simples e claros situações de correlação positiva/negativa/nula.	• Os alunos da turma podem ser tomados como população para o estudo de diversas variáveis. Estas distribuições muito simples são úteis para exemplificar os cálculos a efectuar. São úteis no início, mas devem ser seguidas imediatamente do estudo de outras distribuições com maior significado social e cultural. • É importante comparar distribuições, para tirar conclusões acerca do papel dos diversos tipos de medida; a realização de dois gráficos no mesmo referencial pode facilitar certas análises.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
		• No cálculo do desvio padrão aconselha-se o uso da fórmula abreviada $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma n_k x_k^2}{N} - \bar{x}^2}$ • Ainda que os cálculos sejam feitos geralmente com a máquina, o aluno tem de conhecer e compreender as fórmulas que está a usar, para um melhor domínio dos conceitos. Nomeadamente no caso de desvio padrão deve saber usar uma disposição prática dos cálculos que clarifique a sequência das operações. • No caso do professor ter acesso a um computador, poderá exemplificar as potencialidades deste no tratamento de dados estatísticos e até promover a participação dos alunos em actividades estatísticas que interessem à escola. • A partir de exemplos de nuvens de pontos identificar o tipo de correlação sem envolver o cálculo do valor do coeficiente de correlação nem o de recta de regressão. A referência à recta de regressão deve fazer-se de forma intuitiva destacando a sua importância na previsão de acontecimentos.

Número de aulas previstas: 22.

2. NOÇÕES BÁSICAS DE LÓGICA

O estudo de noções básicas de lógica é importante para a melhoria do rigor do pensamento, da expressão e da capacidade de raciocínio. Não se pretende que o aluno adquira virtuosismo desnecessário na simplificação de expressões ou na determinação de soluções de condições. As técnicas a exercitar serão apenas as indispensáveis para consolidar os conceitos de forma a torná-los operatórios.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
• **Designação e proposições:** · Universo $L = \{V, F\} = \{0,1\}$	• Conhecer e usar as propriedades da conjunção e da disjunção, a dupla negação e as leis de De Morgan.	• Os exemplos a usar deverão referirir-se a termos e frases da linguagem corrente, sem prejuízo de alguma exemplificação de natureza matemática.
• **Operações em L:** · Conjunção, disjunção exclusiva e inclusiva, negação.	• Simplificar expressões e calcular o valor lógico de uma expressão. • Tirar a conclusão de um silogismo.	• Operações lógicas com proposições da linguagem corrente constituem uma boa motivação para a compreensão das operações em L e suas propriedades, mas não se deve gastar demasiado tempo com elas. • O grau de dificuldade das expressões a simplificar não deve exceder o dos seguintes exemplos: «$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)$», ou «Sendo $p = F$, calcule o valor lógico de $\sim(p \wedge q) \vee p$».
• **Implicação:** · Expressão na disjunção; negação; lei da conversão.	• Determinar as soluções de uma condição num dado universo.	• É evidente que devem predominar os silogismos em linguagem corrente, mas alguns deles devem ter significado matemático, como, por exemplo:
• **Silogismos:** · Disjuntivo, transitivo, *modus ponens*, *modus tollens*. · Método de redução ao absurdo.	• Resolver, com segurança, condições simples nessa variável.	Transitivo: $a > \pi \Rightarrow a > 3$; $a > 3 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$; $\therefore\ a > \pi \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$ Disjuntivo: $n = 10 \vee n = 10^{-1}$; $n \in N$; $\therefore\ n = 10$ *Modus ponens*: $A > B \Rightarrow A-B \in \mathbb{R}^+$; Ora $A>B$; $\therefore\ A-B \in \mathbb{R}^+$ *Modus tollens*: N é primo $\rightarrow$ N é impar; Ora N não é impar; $\therefore$ N não é primo (¹) (¹) Este exemplo mostra como um silogismo bem construído pode conduzir a conclusões erradas por partir de promissas erradas.
• **Expressões designatórias:** · Domínios de expressões algébricas e de outras.	• Interpretar em termos de conjuntos operações com condições e vice-versa.	
• **Condições e conjuntos:** · Soluções num dado universo.	• Traduzir propriedades das operações com condições nas correspondentes para conjuntos e vice-versa.	
• **Operações com condições e com conjuntos:** · Conjunção — Intersecção; · Disjunção — Reunião; · Negação — Complementação; · Condição impossível — Conjunto vazio; · Condição universal — Universo; · Condições incompatíveis — Conjuntos disjuntos.	• Ler e interpretar um texto com símbolos lógicos e matemáticos.	Algumas das condições a resolver podem ser diferentes das já estudadas. Exemplos: $\frac{1}{x} < 1$; $x^2 = 5$; $1 < \frac{1}{x} < 3$; $\mid x \mid < 2$; $0.1 < \frac{x}{10} < 0.3$; $x^2 \geqslant 0$; ...
• **Quantificador universal e quantificador existencial:** · Segundas leis de De Morgan.	• Traduzir proposições em que entrem as palavras «TODOS» ou «ALGUNS» ou «NEM TODOS» ou «NENHUNS» em expressões quantificadas e vice-versa.	• A tradução da linguagem de condições na linguagem de conjuntos deve ficar familiar ao aluno. Por exemplo «$p(x) \wedge \sim p(x)$ é condição impossível» correspondente a $P \cap \overline{P} = \emptyset$ (e vice-versa).

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
• **Equivalência formal e implicação formal como relações:** · Correspondência com a igualdade e com a inclusão de conjuntos. Propriedade transitiva. · Negação da implicação formal usando quantificador.	• Usar correctamente os símbolos $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ entre condições e $=$, $\supset$, $\subset$ entre conjuntos.	• O aluno deve traduzir em termos de intervalos operações em condições elementares como $x>0{,}3 \wedge x\geq 0{,}2$ ou $\sim(-1<x<1)$. • Os alunos devem trabalhar sobretudo com condições relativas a universos não numéricos, por exemplo em P = {portugueses}, x é médico, x é algarvio, x é maior ... • É fundamental insistir na não equivalência entre $x = a$ e $x^2 = a^2$, entre $x\geq a$ e $x^2\geq a^2$, entre $\sqrt{x^2} = a$ e $x = a$. Por outro lado é bom ver que $\|x\| = \|a\| \Leftrightarrow x^2 = a^2$ e que $\sqrt{x^2} = a \Leftrightarrow \|x\| = a$ • A negação da implicação material ou formal pode ser boa oportunidade para explicar o método de redução ao absurdo: se a negação de $H\Rightarrow T$ for falsa, então o teorema é verdadeiro; e $\sim(H\Rightarrow T) \Leftrightarrow H\wedge\sim T$ (ou $\exists x{:}H(x) \wedge \sim T(x)$). • A demonstração por conversão deve também ser explicada e exemplificada.

Número de aulas previstas: 18.

3. EVOLUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO

Uma perspectiva histórica sobre a evolução do conceito de número constitui uma introdução indispensável a esta unidade.

Ao estudar a extensão de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ deve-se salientar a necessidade de alargamentos sucessivos da noção de número para superar impossibilidades de cálculo.

Um melhor conhecimento dos números reais facilitará o estudo das funções reais de variável real.

Esta unidade deve constituir uma oportunidade para recordar algumas técnicas de cálculo e, especialmente, para operar com números na notação científica.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA

- Números reais:
  - Potências de base 10 e expoente inteiro (relativo); informação sobre a conservação das regras do cálculo. Referência histórica à descoberta dos números irracionais.
  - Números irracionais e as dízimas correspondentes.
  - O conjunto $\mathbb{R}$; conservação das regras operatórias.
    Recta real e os subconjuntos de $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^-$
  - Ordenação de números reais; a transitividade e as monotonias das relações $<$, $\leq$, $>$, $\geq$; intervalos.
  - Significado de $|a|$, $|x| = \delta$, $|x| < \delta$ e $|x| > \delta$.
- Números complexos:
  - Verificação de que $\sqrt{-1}$ não é real.
  - Números complexos (forma algébrica); igualdade; operações na forma algébrica.
  - Referência histórica à descoberta e uso generalizado dos números complexos.
  - O conjunto $\mathbb{C}$ como extensão de $\mathbb{R}$.

OBJECTIVOS

- Conhecer aspectos da evolução do conceito de número.
- Operar com potências de base 10 de expoente inteiro relativo e com números usando a notação científica.
- Enquadrar a soma e o produto de dois números reais, com uma dada aproximação.
- Resolução de problemas envolvendo a resolução de equações e de inequações de 1.º grau com uma incógnita.
- Interpretar na recta real e em termos de intervalos, condições como:
  $0.5 < x < 2\sqrt{2}$; $|x| \geq -1 \vee x < -3$
  $x > -2 \vee x > -1$; $x < 3 \vee x \leq 0$;
  $x^2 < 0 \wedge x = \sqrt{3}$
- Indicar raízes quadradas de reais negativos.

OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS

- O aluno deve recordar o conceito e as regras operatórias relativos às potências de expoente natural; a seguir e, mantendo as regas do cálculo, estende-se o conceito de potência aos casos de expoente zero e de expoente negativo (inteiro).
- Embora se vise operar com potências de base 10, com vista à notação científica, pode-se apresentar aos alunos exemplos de potências noutras bases.
- É útil que o aluno saiba transformar, com facilidade, 10^3 em 1000, 10^6 em 1 000 000, 10^{-3} em 0,001, 10^{-6} em 0,000001;... e vice-versa, e resolver problemas (1.º grau) em que intervenham estas potências.
- Também alguns exercícios de transformação como :

  $3850 = 3{,}85 \times 10^3 \qquad 0{,}0725 = 7{,}25 \times 10^{-2}$

  permitem efectuar mais facilmente operações como:

  $(3{,}25 \times 10^{-3}) \times (1{,}6 \times 10^2)$; $(6{,}25 \times 10^{12}) : (25 \times 10^9)$; $3{,}54 \times 10^{-3} + 0{,}275$
- As referências históricas são oportunidade para propor trabalhos/monografias feitas em grupos.
- Com a resolução de problemas pretende-se consolidar conhecimentos do 3.º ciclo e ganhar maior consciência das diversas fases do processo; os problemas e as respectivas equações não devem exceder em dificuldade os que são propostos no 3.º ciclo mas tanto os enunciados como as resoluções deverão ser cuidadosamente analisados.
- O uso da recta real permite mais facilmente apreciar ou concluir as soluções da conjunção, da disjunção de condições ou mesmo da negação.

Número de aulas previstas: 10.

4. PROBABILIDADES — I

Para entender muitas das informações que recebemos, nomeadamente nos campos económico, social, político, desportivo, há que conhecer a linguagem das probabilidades.

Esta unidade retoma e aperfeiçoa a terminologia e o cálculo de probabilidades pela lei de Laplace; faz-se ainda a aproximação entre o conceito de probabilidade e o de frequência relativa quando o número de experiências é muito elevado.

Far-se-á um estudo breve de distribuições de probabilidades e referência à curva de Gauss e sua utilidade.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA

- Noções gerais:
  - Referência à origem, evolução, conteúdo e importância do Cálculo das Probabilidades.
  - Experiência aleatória; acontecimento: elementar, não elementar, certo, impossível, contrário, incompatível com outro. Reunião de acontecimentos.
  - Lei dos grandes números; conceito frequencista de probabilidade.
  - Reconhecimento de que $0 \leq p(A) \leq 1$ (sendo 1 para o acontecimento certo e 0 para o acontecimento impossível) e de que $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ se $A \cap B = \emptyset$.
  - A probabilidade como quociente do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis.
- Distribuição de frequências relativas e distribuição de probabilidades:
  - Média, desvio padrão.
  - Representação gráfica.
  - Referência à curva de Gauss e a caracteres que se distribuem normalmente.
  - Probabilidade relativa ao intervalo $]\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma[$.

OBJECTIVOS

- Realizar experiências, anotar resultados e tirar conclusões.
- Provar que $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ e que $p(A_j) = \frac{1}{n}$ se A_j é um dos n acontecimentos elementares equiprováveis.
- Calcular probabilidades pela lei de Laplace.
- Calcular probabilidades de acontecimentos não equiprováveis conhecendo relações entre essas probabilidades.

OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS

- Poderá propor-se um trabalho de pesquisas bibliográfica sobre Pascal (séc. XVII), ou sobre Laplace (séc. XIX).
- Tem interesse referir a origem da palavra «aleatório» (de alea — dado, sorte, azar).
- Realizar experiências aleatórias de resultados não equiprováveis nem previsíveis como: lançamentos de *punaises* ; de um fósforo numa caixa para ver se corta, ou não, certa diagonal ; de um «rapa». Cada aluno pode fazer a experiência, por exemplo, 20 vezes e anotar os resultados, o que dará cerca de 600 provas na turma. A frequência relativa de cada acontecimento será tomada como valor aproximado da sua probabilidade nas condições da experiência.
  Experiências deste tipo podem ser simuladas no microcomputador recorrendo a um gerador de números pseudo-aleatórios, com a vantagem de poder obter um número de provas muito elevado e a contagem automática dos resultados.
- O conceito de «acontecimentos independentes» não é tratado nesta unidade, o que não impede que se proponham problemas do tipo: «Em dois lançamentos de um dado perfeito, qual a probabilidade de obter número par no 1.º e número ímpar no 2.º lançamento?»
- Nesta fase os casos favoráveis e os casos possíveis contam-se directamente recorrendo eventualmente ao cardinal do produto cartesiano. Tal como se disse, é vantajoso estimular o uso de esquemas ou diagramas para essas contagens.
- Para os mesmos dados convém comparar dois gráficos de probabilidades (frequências relativas) tendo um deles classes de certa amplitude e outro com a amplitude de metade ou um quarto da primeira para ver como a poligonal se aproxima de uma curva contínua de probabilidade.
  Em seguida far-se-á uma referência à curva de Gauss e à probabilidade relativa a $]\bar{x}-\sigma, \bar{x}+\sigma[$.

Número de aulas previstas: 10.

5. FUNÇÕES — Generalidades.

Esta unidade, além de retomar e ampliar conhecimentos adquiridos no 3.º ciclo sobre funções, estuda o comportamento de funções reais de variável real com base em gráficos cartesianos (referenciais ortogonais), privilegiando o estudo de funções que relacionem variáveis da vida corrente, da Geometria e de outras disciplinas. Efectivamente, a interpretação da realidade económica e social pressupõe a leitura e interpretação de gráficos.

Apresenta-se a noção de sucessão e passa-se a analisar a «sucessão exponencial» para melhor compreensão do comportamento da função exponencial.

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES / SUGESTÕES METODOLÓGICAS
• Funções: · Noções gerais; gráfico; esboço e interpretação. · Análise de fórmulas simples da Geometria ou de outras ciências para identificação de funções de uma variável. · Definição analítica de função crescente (decrescente), de máximo (mínimo) e de função injectiva; reconhecimento no gráfico da função.	• Construir e interpretar gráficos quanto a domínios, contradomínios, zeros, sinal, intervalos de monotonia, extremos, taxas de variação média e ainda aspectos relacionados com o fenómeno descrito pela função. • Resolver problemas envolvendo a expressão de uma variável em função de outra, ou recorrendo a um gráfico.	• A construção de gráficos por pontos fornece uma visão aproximada do gráfico de uma função. As variáveis a relacionar devem ter um significado concreto e ser representadas pelas letras mais sugestivas para essa grandeza. • Exemplo de gráfico que se pode mandar construir ponto por ponto: · Uma população bacteriana aumenta 50% de hora a hora. Em certo instante ($t = 0$) há 900 bactérias por ml ($n = 900$). Representar a função n de t, desde $t = -3$ até $t = 5$ (h). · A interpretação de gráficos começará pela identificação das variáveis e do significado das divisões dos eixos e incluirá a pesquisa de domínio, contradomínio, zeros, sinal, monotonias, extremos, taxa de variação média num dado intervalo, mas estes conceitos serão apresentados de forma progressiva e melhorados de exemplo para exemplo. Só próximo do final da unidade será oportuna a sua definição analítica. · Os gráficos a estudar a partir de fórmulas devem ser constituídos de preferência por partes de rectas, de parábolas, de hipérboles, de parábola cúbica. Exemplos: $v = 2{,}5\,t$ (velocidade; recta); $e = 3 + 5\,t^2$ (espaço; parábola); $v = \frac{24}{p}$ (volume de gás; hipérbole) $v = \frac{4}{3}\pi\ r^3$ (volume; parábola cúbica).
· Noção de sucessão; sucessão exponencial; · Função exponencial: gráfico cartesiano; variação, sinal, zeros.	• Construir e interpretar, quanto à variação, gráficos de sucessões, nomeadamente de sucessões do tipo $u_n = k,\ r^n$, com $k,\ r \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. • Conhecer as condições em que funções do tipo $x \mapsto a^x$, com $a \in \mathbb{R}^+$ e $x \in \mathbb{R}$ é crescente/decrescente.	• Os alunos devem elaborar um trabalho individual (a classificar) sobre uma situação traduzida por uma função e respectivo estudo gráfico. • Os problemas a resolver poderão ser associados à construção e interpretação de gráficos. Exemplo: · Dispõe-se de 40 m de rede para vedar um terreno rectangular à beira de um rio (só três lados). Exprimir a área vedada em função de um dos lados, representar graficamente a função e interpretar o gráfico (domínio, contradomínio, zeros, monotonias, não injectividade de função, dimensões do rectângulo de área máxima).

DESENVOLVIMENTO DO TEMA	OBJECTIVOS	OBSERVAÇÕES/SUGESTÕES METODOLÓGICAS
		• As sucessões aparecem com casos particulares de funções, quando o domínio é $\mathbb{N}$ Também neste caso a representação gráfica pode apoiar a aprendizagem da terminologia específica e estudo da monotonia. • O estudo de sucessões exponenciais poderá servir de apoio ao estudo e compreensão do gráfico e da variação da função exponencial. • Deverá ser feita uma referência à exponencial de base *e*; informando que *e* é um número irracional cujo valor aproximado é 2,718, muito usado nas fórmulas de crescimento de populações. • É importante que o aluno tenha a noção da importância desta função no estudo de diversos fenómenos como o crescimento de populações de seres vivos, na desintegração radioactiva, na inflação, etc. **Número de aulas previstas: 15.**

SUGESTÕES BIBLIOGRÁFICAS

BIBLIOGRAFIA GERAL

ALLAL, L., CARDINET, J., PERRENOUD, P., *A Avaliação Formativa Num Ensino Diferenciado*, Coimbra, Almedina, 1986.

ANZIEU, J., MARTIN, Y., *La dynamique des groupes restreints*, Paris, P.U.F., 1976.

ARDOINO, J., *Education et relations — Introduction à une analyse plurielle des situations éducatives*, Paris, Gauthier-Villars, 1980.

AUBRY, Jean Marie, SAINT-ARNAUD, Yves, *Dynamique des groupes*, Paris, Editions Universitaires, 1970.

BARRÉ, Michel, *Acquisition des conduites autonomes d'apprentissage et participation des élèves de 8 à 16 ans à la gestion de leur formation*, Paris, Unesco, s/d.

BEAL, George M., BOHLEN, Joe M., RAUDABAUGH, J. Neil, *Liderança e Dinâmica de Grupo*, Rio de Janeiro, Zahar Editores, 1970.

BENAVENTE, Ana, NEVES, Manuela Castro, *O Outro Lado da Escola*, Lisboa, I.E.D., 1987.

BLANCHARD, M., *et al.*, *O Líder Num Minuto*, Lisboa, Editorial Presença, 1986.

BORDENAVE, J. D., PEREIRA, A. M., *Estratégias de Ensino-Aprendizagem*, Petrópolis, Editorial Vozes, 1985.

BRU, Marc, NOT, Lorris, *Où va la pédagogie du projet?*, Toulouse, Editions Universitaires du Sud, 1987.

CARDINET, J., *Évaluation scolaire et pratique*, Bruxelles, De Boeck, 1986.

———, *Les Contradictions de l'évaluation scolaire*, Bruxelles, De Boeck, 1986.

———, *Pour apprécier le travail des élèves*, Bruxelles, De Boeck, 1986.

———, *Objectifs pédagogiques et fonctions de l'évaluation*, Neuchâtel, Institut Romand de Recherche et de Documentation Pédagogiques, 1977.

———, «Évaluer sans juger», *Revue Française de Pédagogie*, nº 88, 1989, pp. 41-51.

———, *Les deux visées de l'évaluation formative*, Neuchâtel, Institut Romand de Recherche et de Documentation Pédagogiques, 1979.

CICFF, (Comissão Instaladora de um curso para Formação de Formadores), *Dinâmica de grupo* — curso para professores, Ministério da Educação e Ciência, G.E.P., s/d.

CONQUET, A., *Como Trabalhar em Grupo*, Lisboa, Editorial Pórtico, s/d.

CORTESÃO, Luísa, *A Escola, que Sociedade?*, Lisboa, Edições Afrontamento.

DE KETELE, Jean-Marie, *L'évaluation: approche descriptive ou prescriptive?*, Bruxelles, De Boeck, 1986.

DE LANDSHEERE, G., *Dictionnaire de l'évaluation et la recherche en éducation*, Paris, P.U.F., 1989.

DE LANDSHEERE, Viviane et Gilbert, *Definir os Objectivos da Educação*, Lisboa, Moraes Editores, 1983.

DELORME, C., *L'évaluation en questions*, Paris, Editions E.S.F., 1987.

DOTTRENS, *O Ensino Individualizado*, Lisboa, Editora Civilização, 1973.

DUPONT, P., *La dynamique de la classe*, Paris, P.U.F., 1982.

———, *Prática da Aula*, Coimbra, Almedina, 1987

DURAND, D., *La Systémique*, Paris, P.U.F., 1987.

EISNER, Eliot, *Educational Imagination*, New York, MacMillan, 1978.

ESTRELA, Maria Teresa e Albano, *A Técnica dos Incidentes Críticos no Ensino*, Lisboa, Editorial Estampa, 1978.

FELOMANN, *Aprender a Aprender*, Barcelona, Plaza e Janes Editores, 1990.

FERRY, Gilles, *La pratique du travail en groupe*, Paris, Dunod, 1972.

GOURGANA, P., *As Técnicas de Trabalho de Grupo*, Lisboa, Moraes Ed., 1971.

GROLUND, Norman E., *Elaboração de Testes Para o Ensino*, São Paulo, Livraria Pioneira Editora.

_____, *Stating Objectives for Classroom Instructions*, New York, MacMillan, 1978.

HUBERMAN, M., *S'évaluer pour s'illusionner?*, Genebra, Universidade de Genebra, 1988.

_____, *Maîtriser les processus d'apprentissage. Fondements et perspectives de la pédagogie de maîtrise*, Paris, Delachaux Niestlé, 1988.

HADJI, Ch., «Élements pour un modèle de l'articulation formation/évaluation», *Revue Française de Pédagogie*, nº 86, 1989.

LA BORDERIE, René, *Aspects de la communication éducative*, Paris, Casterman, 1979.

LEITE, Elvira, MALPIQUE, Manuela, SANTOS, Milice Ribeiro dos, *Trabalho de Projecto*, vols. 1 e 2, Lisboa, Edições Afrontamento.

LEMOS, V., *O Critério do Sucesso*, Lisboa, Texto Editora, 1988.

MACCIO, Charles, *Animação de Grupos*, Lisboa, Moraes, 1977.

MARCHAND, François, *Évaluation et conseil de classe*, Paris, Epi, 1989.

MEIRIEU, Philippe, *Apprendre oui... mais comment?*, Paris, Editions E.S.F., 1989.

MORALES, P., *Manual de Avaliação Escolar*, Coimbra, Almedina, 1979.

MUCCHIELLI, Roger, *La dynamique des groupes*, Paris, Editions E.S.F., 1980.

NOT, Louis, «A propos des modèles d'enseignement et apprentissage», *Cahiers Pédagogiques*, 281, 1990.

PADRES Y MAESTROS, *Técnicas de Conduccion de Grupos*, La Coruña, Ediciones Paulinas, 1981.

PARREIRA, Artur, *O Processo de Liderança nos Grupos e Reuniões de Trabalho*, Lisboa, Plátano Editora, 1981.

PEDRO, Emília Ribeiro, *O Discurso na Sala de Aula*, Lisboa, Rolim, 1982.

PERRENOUD, P., *L'évaluation est-elle créatrice des inégalités de réussite scolaire?* Genève, Service de la Recherche Sociologique, 1982.

_____, «La place d'une sociologie de l'évaluation dans l'explication de l'échec scolaire et des inégalités devant l'école», *Revue Européenne des Sciences Sociales*, nº 70, 1985.

_____, *Pour une approche pragmatique de l'évaluation formative*, Genève, Service de la Recherche Sociologique, 1989.

PONTE, João, *O Computador, um Instrumento da Educação*, Lisboa, Texto, 1986.

POPHAM, James, BAKER, Eva, *Sistematização do Ensino*, Porto Alegre, Ed. Globo, 1976.

RESWEBER, Jean Paul, *Pedagogias Novas*, Lisboa, Teorema, 1988.

RIBEIRO, António Carrilho, *Objectivos Educacionais no Horizonte do Ano 2000*, Lisboa, Texto Editora, 1988.

RIDING, Jonh, *Aprendizagem Escolar: Mecanismos e Processos*, Lisboa, Livros Horizonte, 1980.

ROSNAY, J., *O Macroscópio*, Lisboa, Arcádia, 1977.

SANTOS, João dos, *Ensaios sobre Educação I e II*, Lisboa, Livros Horizonte, 1983.

THURLER, M. Gather, PERRENOUD, Philippe, *Savoir évaluer pour mieux enseigner. Quelle formation des maîtres?*, Genève, Service de la Recherche Sociologique, 1988.

VALENTE, Bartolomeu, *Por uma Escola-Projecto*, Lisboa, Livros Horizonte, 1988.

UNESCO, *O Educador e a Abordagem Sistémica*, Lisboa, Editorial Estampa, 1980.

BIBLIOGRAFIA ESPECÍFICA

MATEMÁTICA

1 — OBRAS DE CARÁCTER GERAL

BARRA, e outros, *Mathématiques — 2ème, 1ère, Terminal*, Nathan.

BUCKWELL, Geoff, e outros, *GESE Mathematics for today*, Mc. Millau, 1991.

CARAÇA, Bento de Jesus, *Conceitos Fundamentais de Matemática*, Lisboa.

GAUTHIER, e outros, *Mathématiques — 2ème, 1ère, Terminal*, Hachette.

GOUIN, Serge, e outros, *Dimathéme*, Didier, 1990.

GUZMAN, e outros, *Matemáticas — Bachillerato 1, 2, 3*, CON — Anaya, 88/89/90.

GUZMAN, M. *Aventuras Matemáticas*, Gradiva, 1990.

IREM de Strasbourg, *MATH 1ères Scientifiques*, Ed. Casteilla, 1988.

JOHN Davitith, e outros, *Diccionary of Mathematics*, Pinguin Books, 1984.

ROANES Macias, *Didáctica de las Matemáticas*.

SEBASTIÃO e Silva, *Compêndio de Matemática* (3 volumes), GEP.

———, *Guia para o Compêndio de Matemática*, GEP.

SEBASTIÃO e Silva, e SILVA Paulo, *Compêndio de Álgebra*, 6.º ano.

TERRACHER, Pierre-Henri, *Mathématiques 1ère S. E.*, Hachette Classiques, 1988.

2 — HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Além das obras citadas em 1:

ALBUQUERQUE, Luís de, *As Navegações e sua Projecção na Ciência e na Cultura*, Ed. Gradiva.

———, *Ciência e Experiência nos Descobrimentos Portugueses*.

ASGER, Aaboe, *Episódios da História Antiga da Matemática*, Sociedade Brasileira da Matemática.

BELL, E. T., *Les grands mathematiciens* — Payot, Paris, 1961.

BOLL, Marcel, *As Etapas da Matemática*, Col. Saber, Europa-América.

BOYER, Carlos, e outros, *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc., 1989.

DAHAN, e outros, *Une histoire des mathematiques*, Ed. du Seuil, 1986.

DANTZIG, Tobias, *Número, Linguagem da Ciência*, Aster.

DEDRON, Itard, *Mathématiques et Mathematiciens*, Magnard, Paris.

KLINE, Morris, *Mathematics in Western Culture*, Penguin Books, 1990.

STRUIK, Dirk, *História Concisa das Matemáticas*, Ed. Gradiva, 1989.

3 — ANÁLISE INFINITESIMAL

Além das obras citadas em 1:

APOSTOL, Tom, *Cálculo* (volume 1), Ed. Reverté, Barcelona.

FERREIRA, J. Campos, *Introdução à Análise Matemática*, Ed. Fundação Gulbenkian.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, *Números Irracionais e Transcendentes*, Sociedade Brasileira de Matemática.

KLEPPNER, Ramsey, *Ensino Rápido do Cálculo Diferencial e Integral*, Clássica Editora.

NUNEN e FOULIS, *Cálculo, Volume I*, Ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1982.

SWOKOWSKI, Earl, *Cálculo com Geometria Analítica, 1.º volume*, Mc. Graw-Hill, 1983.

4 — GEOMETRIA. ÁLGEBRA LINEAR. TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Além das obras citadas em 1:

ALSINA, C, e outros, *Invitacion a la Didáctica de la Geometria*, Ed. Sintesis, Madrid, 1987.

BARBOSA, J. H. Marques, *Geometria Euclideana Plana*, Sociedade Brasileira de Matemática.

BARRA, Raymond, e outros, *Terminales CE*, t. 2, Ed. Nathan, 1989.

FETISSOV, A., *A Demonstração em Matemática*, Colecção Iniciação à Matemática, Ed. Mir.

GODEAUX, Lucien, *As Geometrias*, Col. Saber, Ed. Europa-América.

HILBERT, Doria, *Fundamentos da Geometria*, IAC, Lisboa, 1952.

ILLIOVITCI e ROBERT, *Géométrie*.

LEBOSSÉ et HÉMERY, *Géométrie et Géométrie Analytique*, Terminale C, 1966.

LENTIN, Rivaud, *Eléments d'Algébre Moderne*, Ed. Vuibert.

MODENOV e PARKHOMENKO, A. S., *Geometric Transformations*, vol. I.

PALMA FERNANDES, António, *Compêndio de Geometria*.

SEBASTIÃO e Silva, José, *Transformações Geométricas*, Ed. Associação de Estudantes da Faculdade de Ciências de Lisboa.

STRANG, Gulbert, *Linear Algebra and its applications*, Academic Press, 1980.

YAGLON, e outros, *Introduccion en la Geometria*, Lecciones Populares de Matemática, Ed. MIR.

YOUNG, Frank, e outros, *Linear Algebra, A concret Introduction*, Mc Millau.

Compêndios de Matemática para o 9.º ano, programas em vigor até 1990-1991 (Geometria no espaço).

5 — ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

Além das obras citadas em 1:

BENTO Murteira, e GEORGE Black, *Estatística Descritiva*, Mc. Graw-Hill, 1983.

GALVÃO de Melo, *Introdução aos Métodos Estatísticos*, vols. 1 e 2, Cadernos do I. O. P.

LIPSCHUTZ, Seymour, *Probabilidades (Teoria e Problemas)*, Mc. Graw-Hill.

MORONEY, M. J., *Dos Números aos Factos*, Porto, Ed. Despertar.

USPENSKI, V., *O Triângulo de Pascal*, Colecção Iniciação Matemática, Ed. Mir.

VIEIRA, Sónia, e outros, *Estatística, Introdução Ilustrada*, São Paulo, Edição Allas, 1988.

6 — CALCULADORA E COMPUTADOR

Além das obras já citadas em 1:

ALBANO, Silva, e outros, *Calculadora na Educação Matemática*, APM, 1989.

COLERA, e outros, *la calculadora de bolsillo como instrumento pedagógico*, Ed. do Instituto de Ciências e de la Educacion, Universal Autónoma de Madrid.

FONSECA, Eduarda, *Vamos Trabalhar com a Folha de Cálculo*, Projecto Minerva, FCUL, 1987.

PONTE, João, *O Computador e o Trabalho de Projecto*, Projecto Minerva, FCUL, 1987.

7 — REVISTAS

Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática.

Bulletin da A. P. M. E. P. (Associação de Professores de Matemática), Paris.

Educação e Matemática, Revista da Associação de Professores de Matemática.

Jornal de Matemática Elementar.

Mathematics Teacher, NCTM, EUA.

Mathématiques et Pedagogie, Sociedade Belga de Professores de Matemática.

Nonius, Folha Informativa do Projecto «Computador no Ensino da Matemática» (CMUC/INIC — Coimbra).

MÉTODOS QUANTITATIVOS

BOLL, Marcel, *As Etapas da Matemática,* Col. Saber, Europa-América.

COLERA, e outros, *La calculadora de bolsillo como instrumento pedagógico,* Ed. do Instituto de Ciências de la Educacion, Madrid.

CURVELO, Edmundo, *Introdução à Lógica,* Biblioteca Cosmos.

DANTZIG, Tobias, *O Número e a Linguagem da Ciência,* Aster, Lisboa.

GALVÃO de Mello, F., *Introdução aos Métodos Estatísticos,* vols. 1 e 2, Cadernos do I. O. P., 1971/73.

GAUTHIER, e outros, *Mathématiques* 1ère e 2ème, Hachette, 1987.

GNENTA, B. V. e Kninchire, A. I., *Introdução à Teoria da Probabilidade e Estatística,* Estúdio Cor.

GUZMAN, e outros, *Matemáticas, Bachillerato 1, 2, 3,* Anaya, 1990.

HOGBEN, Lancelot, *Man Must Mesure,* Ed. Rathbone Books, 1955.

IREM de Strasbourg, *Mathématiques 2ème,* Editions Casteilla.

JAVIER, Etayo, e outros, *Matemáticas,* Anaya, 1985.

LIPSCHUTZ, Seymour, *Probabilidade,* Col. Schaun, Mc. Graw-Hill.

MURTEIRA e Black, *Estatística Descritiva,* Ed. Mc. Graw-Hill, 1983.

SEBASTIÃO e Silva, *Compêndio de Matemática,* Edição GEP.

SEBASTIÃO e Silva, e SILVA Paulo, 1.º e 2.º anos do Curso Complementar, *Compêndio de Álgebra,* 6.º ano, Liv. Cruz.

STRUICK, Derk, *História Concisa da Matemática,* Ed. Gradiva, 1989.

SUPPES, Patrícia, *Primeiro Curso de Lógica Matemática,* Ed. Reverté, S. A., Barcelona.

TARSKY, Alfred, *Introdução a la Lógica,* CALPE, Madrid.

VENNEREEAU, André, *La Statistique,* PUF.

ZEISEL, Hans, *Fale com Números,* Américo e Alvim, 1974.

Compêndios de Matemática do Ensino Francês para as Classes A e B da 2ème e da 1ère.

V — REVISTAS

Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática.

Boletim da A. P. M. E. P. (Association des Professeurs de Mathématiques) França

Educação e Matemática. Revista da Associação de Professores de Matemática.

Jornal de Matemática Elementar.

Mathematics Teacher. NCTM. EUA

Mathématiques et Pédagogie. Associação Belga de Professores de Matemática

Notícias; Folha Informativa do Projecto «Computador no Ensino da Matemática» (CMEC/PRC — Coimbra).

MÉTODOS QUANTITATIVOS

BOLL, Marcel, As Etapas da Matemática, Col. Saber, Europa-América.

CORBERA, e outros, La enseñanza de la estadística con ... Ed. do Instituto de Ciencias de la Educación, Madrid

CORVELLO, Armando, ... e ..., Biblioteca Cosmos

DANTZIG, Tobias, O Número e a Linguagem da Ciência, Aster, Lisboa

GALVÃO de Mello, F., Introdução aos Métodos Estatísticos, vols. 1 e 2, Gabinete de I. O. P., Lisboa

GAUTHIER e outros, Mathématiques 1re e 2me, Hachette, 1982

GNEDENKO, B. V. e Khinchine, A. I., Introdução à Teoria da Probabilidade e Estatística, Edição Cor

GUZMAN e outros, Matemáticas, Bachillerato 1, 2, 3, Anaya, 1980

HOBBEN, Lancelot, Man Must Measure, Ed. Rathbone Books, 1955

IREM de Strasbourg, Mathématiques, 2ème, Édition Cassella

JAMES, Glenn, e outros, Matemáticas, Anaya, 1983

LIPSCHUTZ, Seymour, Probabilidades, Col. Schaum, Mc. Graw-Hill

MURTEIRA e Black, Estatística Descritiva, Ed. Mc. Graw-Hill, 1983

SEBASTIÃO e Silva, Compêndio de Matemática, Edição GEP

SEBASTIÃO e Silva, e SILVA, Paulo, 1º e 2º anos do Curso Complementar, Compêndio de Álgebra, 6º ano, Liv. Cruz

STRUIK, Dirk, História Concisa das Matemáticas, Ed. Gradiva, 1989

SUPPES, Patrick, Primer Curso de Lógica Matemática, Ed. Reverté S.A., Barcelona

TARSKY, Alfred, Introdução à la Lógica, CALPE, Madrid

VERNOCHEAU, André, La Statistique, PUF

ZEISEL, Hans, Dizê com Números, Assírio e Alvim, 1978

Compêndios de Matemática do Ensino Primário para os Cursos A e B do 3º e do 1º

Composto e impresso
nas Oficinas Gráficas
da Imprensa Nacional-Casa da Moeda, E. P.

Julho de 1991

Depósito Legal n.º 48 000/91

Livro/Modelo n.º 2032 (Exclusivo da INCM, E. P.) C