MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO

MATEMÁTICA

PROGRAMAS

10º, 11º E 12º ANOS

JANEIRO 1997

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

DEPARTAMENTO DO ENSINO SECUNDÁRIO

MATEMÁTICA

PROGRAMAS

10º, 11º E 12º ANOS

JANEIRO 1997

Ficha Técnica

Título: MATEMÁTICA — Programas 10.º, 11.º e 12.º anos
Depósito legal n.º 106 775/97
Capa: Ana Campos — Departamento do Ensino Secundário
Composição: Arsélio Martins — Escola Secundária de José Estevão, Aveiro
Tiragem: 4000 exemplares para oferta
Edição: Editorial do Ministério da Educação

SUMÁRIO

➤

INTRODUÇÃO

A Lei de Bases do Sistema Educativo, aprovada em Outubro de 1986, obrigava a uma reforma do sistema de ensino e definia princípios e orientações básicas para uma reorganização dos planos curriculares dos ensinos básico e secundário. A Comissão de Reforma do Sistema Educativo encarregou-se de interpretar as orientações curriculares da Lei de Bases, tomando as opções curriculares fundamentais, no que respeita aos critérios de selecção das matérias curriculares e aos princípios orientadores da estrutura curricular. Ficou definida então a configuração da educação secundária, nos seus objectivos, organização estrutural e plano de estudos. Neste quadro geral, a Matemática aparece como disciplina da Formação Específica de vários agrupamentos a que é atribuída uma carga horária semanal de 4 horas em cada um dos anos do ensino secundário. Assim é publicado em forma de lei, em 1989.

É neste quadro que é elaborado o programa do ensino secundário de Matemática, com uma primeira aplicação experimental em algumas escolas e depois, desde 1993, com aplicação generalizada em todas as escolas do país.

Se durante a aplicação experimental do programa surgiram dificuldades de concretização, mesmo contando com cargas horárias excepcionais, a generalização da sua aplicação em todas as escolas multiplicou essas dificuldades e deu-lhes uma visibilidade nacional que o quadro da experiência, pela sua própria natureza, não podia ter dado. Ao segundo ano da generalização, o volume dos problemas tornou clara a necessidade de proceder a ajustamentos desse programa. Este ajustamento não vem constituir um novo programa. Procurando preservar os objectivos da renovação do ensino da matemática, este ajustamento pretende estabelecer maior clareza e melhor organização dos conteúdos temáticos, explicitar a articulação entre metodologias, objectivos e conteúdos, reforçar a articulação vertical com o 3° ciclo do ensino básico e harmonizar no tempo, quando possível, algumas articulações interdisciplinares.

Porque uma das principais dificuldades dos professores nas escolas e um dos principais problemas residia na extensão do programa, o ajustamento do programa considerou também a exclusão de itens de conteúdo que a experiência mostrou constituírem sobrecarga e impedimento para que aos alunos fosse dado acesso a temas fundamentais e fundadores.

O programa ajustado, agora aprovado, foi elaborado sobre uma base de relatos de experimentadores e professores e de pareceres de professores e especialistas em Matemática e no ensino da Matemática, que, em vários momentos, foram chamados para se pronunciarem individual ou institucionalmente sobre os problemas e as versões de propostas de ajustamento. Foram consultadas e participaram as escolas do ensino superior e do ensino secundário público e privado, sociedades científicas, associações de professores e instituições. Também os autores dos programas de Matemática e de Física foram consultados e participaram, a esse nível, no desenvolvimento do trabalho deste ajustamento do programa.

Os fundamentos do programa - finalidades, objectivos gerais, orientações metodológicas - permanecem sem alterações ou com alterações de pormenor. Assim também aconteceu com a explicitação dos recursos necessários à leccionação da Matemática, em que se procurou fazer simples adequações à evolução tecnológica, particularmente relativas à emergência das calculadoras com capacidades gráficas, que mantendo as capacidades das calculadoras científicas, bem como a portabilidade e o preço, vêm permitir novas e significativas aprendizagens que, até há pouco tempo, só eram possíveis com o uso de computadores.

No que respeita à organização dos temas e ao seu desenvolvimento, bem como às metodologias utilizadas, há alterações significativas, não só porque foram excluídos alguns conteúdos de cada tema, mas principalmente porque foram organizados de outro modo no sentido de possibilitar e encorajar a abordagem temática. Ao mesmo tempo pretende-se desencorajar o aprofundamento deslocado deste ou daquele conteúdo por exercícios e técnicas rotineiros que, muitas vezes, foram e são tomados como único meio de consolidar aprendizagens.. Foram retirados todos os capítulos facultativos enquanto tal, embora se mantenham alguns itens assinalados com (*) que podem ou não ser leccionados.

Neste ajustamento, as questões de Lógica, Teoria de Conjuntos e de formas de raciocínio foram retirados do corpo do programa e passam a estar referidas como tema à parte, com um determinado desenvolvimento. Procura-se, deste modo, influenciar os professores no sentido de não abordar estas questões como conteúdo em si, mas de as utilizar quotidianamente em apoio do trabalho de reflexão científica que os actos de ensino e de aprendizagem científica sempre comportam, e só na medida em que elas vêm esclarecer e apoiar uma apropriação verdadeira dos conceitos. Neste tema, para além das questões clássicas de lógica, teoria dos conjuntos e raciocínio demonstrativo, introduzem-se também itens integradores dos diversos tipos de raciocínio científico e formas de organizar o pensamento e as actividades de resolução de problemas. Estes assuntos podem e devem ser abordados com os alunos do ensino secundário, mas com oportunidade e virados para necessidades sentidas de racionalizar, melhorar ou dar organização a métodos pessoais, ou como suporte de momentos de reflexão sobre a natureza do conhecimento.

Em muitos aspectos, a organização dos temas e as indicações metodológicas integram informações sobre oportunidade de abordar questões sobre a experimentação no ensino da matemática, de lógica e raciocínio, de história da matemática mas também informações sobre novos tipos de instrumentos de avaliação. As indicações sobre avaliação devem ser, pois, procuradas não tanto no pequeno texto sob esse título, mas mais no corpo do programa, nos diversos elementos de trabalho sugeridos.

FINALIDADES

São finalidades da disciplina no ensino secundário:

- Desenvolver a capacidade de usar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real.
- Desenvolver as capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade.
- Promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constituam suporte cognitivo e metodológico tanto para o prosseguimento de estudos como para a inserção na vida activa.
- Contribuir para uma atitude positiva face à Ciência.
- Promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade

OBJECTIVOS GERAIS

São objectivos gerais da disciplina no ensino secundário:

VALORES/ATITUDES

Desenvolver a confiança em si próprio:
- Exprimir e fundamentar as suas opiniões.
- Revelar espírito crítico, de rigor e de confiança nos seus raciocínios.
- Abordar situações novas com interesse, espírito de iniciativa e criatividade.
- Procurar a informação de que necessita.

Desenvolver interesses culturais:
- Manifestar vontade de aprender e gosto pela pesquisa.
- Interessar-se por notícias e publicações relativas à Matemática e a descobertas científicas e tecnológicas.
- Apreciar o contributo da Matemática para a compreensão e resolução de problemas do Homem através do tempo.

Desenvolver hábitos de trabalho e persistência:
- Elaborar e apresentar os trabalhos de forma organizada e cuidada.
- Manifestar persistência na procura de soluções para uma situação nova.

Desenvolver o sentido da responsabilidade:
- Responsabilizar-se pelas suas iniciativas e tarefas.
- Avaliar situações e tomar decisões.

Desenvolver o espírito de tolerância e de cooperação:
- Colaborar em trabalhos de grupo, partilhando saberes e responsabilidades.
- Respeitar a opinião dos outros e aceitar as diferenças.
- Intervir na dinamização de actividades e na resolução de problemas da comunidade em que se insere.

CAPACIDADES/APTIDÕES

Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real:
- Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução.
- Seleccionar estratégias de resolução de problemas.
- Formular hipóteses e prever resultados.
- Interpretar e criticar resultados no contexto do problema.
- Resolver problemas nos domínios da Matemática, da Física, da Economia, das Ciências Humanas, ...

Desenvolver o raciocínio e o pensamento científico:
- Descobrir relações entre conceitos de Matemática.
- Formular generalizações a partir de experiências.
- Validar conjecturas.
- Fazer raciocínios demonstrativos usando métodos adequados.
- Compreender a relação entre o avanço científico e o progresso da humanidade.

Desenvolver a capacidade de comunicar:
- Comunicar conceitos, raciocínios e ideias, oralmente e por escrito, com clareza e progressivo rigor lógico.
- Interpretar textos de Matemática.
- Exprimir o mesmo conceito em diversas formas ou linguagens.
- Usar correctamente o vocabulário específico da Matemática.
- Usar a simbologia da Matemática.
- Apresentar os textos de forma clara e organizada.

CONHECIMENTOS

Ampliar o conceito de número e desenvolver o cálculo:
- Aperfeiçoar o cálculo em $\mathbb{R}$ e usar a calculadora tirando partido das suas potencialidades.
- Operar com expressões racionais, irracionais e exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.
- Resolver equações, inequações e sistemas.
- Usar as noções de lógica indispensáveis à clarificação de conceitos.

Ampliar os conhecimentos de Geometria no Plano e no Espaço:
- Resolver problemas de incidência, paralelismo e perpendicularidade no plano e no espaço, por via intuitiva e analítica.
- Utilizar vectores no estudo do plano e do espaço, em referencial ortonormado.
- Compreender e utilizar noções básicas de cónicas.

Iniciar o estudo da Análise Infinitesimal:
- Interpretar fenómenos e resolver problemas recorrendo a funções e seus gráficos.
- Estudar sucessões definidas de diferentes formas.
- Aplicar conhecimentos de Análise Infinitesimal no estudo de funções de variável real.

Ampliar os conhecimentos de Estatística e Probabilidades:
- Interpretar e comparar distribuições estatísticas.
- Resolver problemas de contagem.
- Resolver problemas envolvendo cálculo de probabilidade.

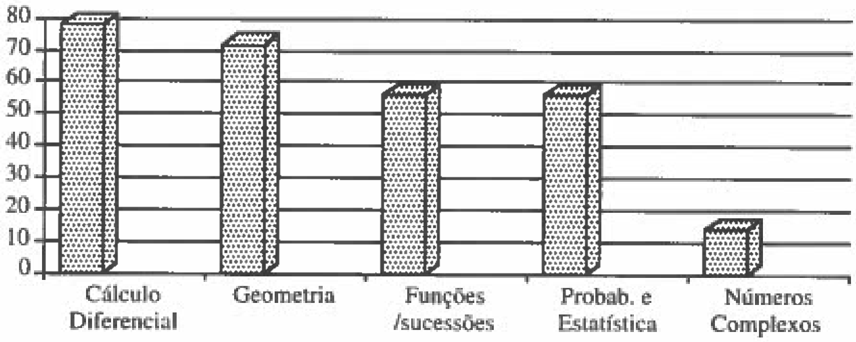
Conhecer aspectos da História da Matemática:
- Conhecer personalidades e factos marcantes da História da Matemática e relacioná-los com momentos históricos de relevância cultural ou social.

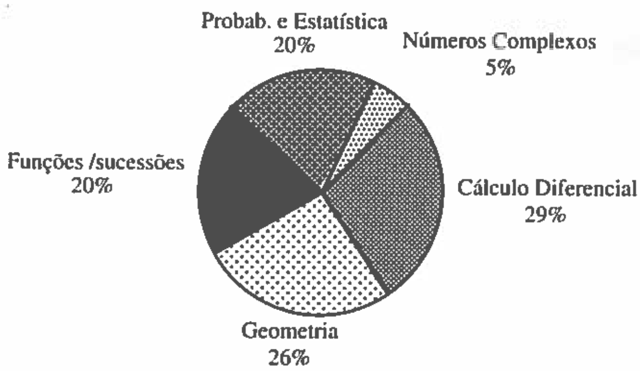
CONTEÚDOS

A escolha dos temas foi feita tendo em conta os conteúdos presentes no anterior programa e a preocupação de algum equilíbrio entre áreas diversas da Matemática. Os quadros seguintes mostram que existe um grande equilíbrio entre as quatro grandes áreas seleccionadas:

- Cálculo Diferencial
- Geometria (no plano e no espaço)
- Funções e sucessões
- Probabilidades (com Análise Combinatória) e Estatística

10º, 11º e 12º anos





A quantidade de temas programáticos, a sua extensão e profundidade foi substancialmente diminuída em relação a programas anteriores, parecendo exequível a sua leccionação; uma maior diminuição poderia conduzir a uma deficiente formação dos alunos do ensino secundário.

Os temas clássicos de Análise, Álgebra e Geometria estão presentes nestes conteúdos, embora o segundo se encontre dividido pelos outros temas. Esta classificação deve ser considerada de forma muito relativa, pois, no corpo do programa, assumem importância significativa não só técnicas específicas, mas estratégias que, constituindo uma base de apoio que os alunos utilizam na sua actividade matemática independentemente do tema, atravessam o programa de forma transversal. Referimo-nos a

- Resolução de Problemas
- Modelação Matemática
- Lógica e Raciocínio Matemático
- Tecnologia e Matemática
- História da Matemática

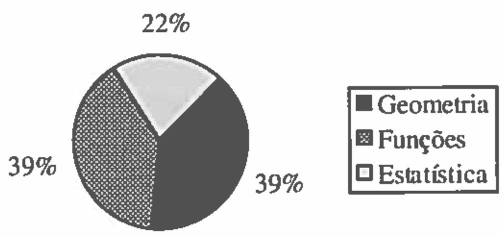
que, sendo de difícil quantificação, não são por isso menos importantes que os temas antes referidos.

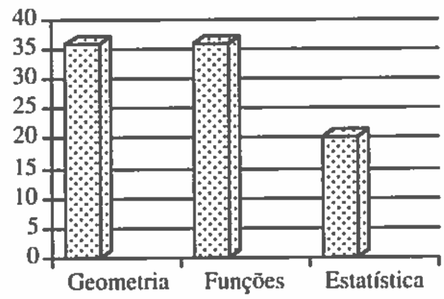
Além do mais o estudo dos diversos temas está integrado tanto quanto possível sendo estabelecidas um grande número de conexões, para que os alunos possam ver que são aspectos complementares de uma mesma realidade. Foi dada uma posição de destaque à Geometria por ser o tema tratado em primeiro lugar tanto no 10º como no 11º anos e são dadas indicações que permitem que seja retomada em praticamente todos os outros temas do Ajustamento. Deu-se prioridade à criação de condições para uma grande diversidade de tipos de trabalho em Matemática, tanto de carácter geral como específicos de cada tema, em detrimento de um aprofundamento que na maioria das vezes é ilusório se não for cimentado na compreensão dos processos elementares.

Nos temas de Geometria, procura-se um equilíbrio entre a Geometria por via intuitiva e a Geometria Analítica de modo a desenvolver tanto o raciocínio geométrico directo como a resolução de problemas de geometria por via algébrica, sem esquecer o desenvolvimento de capacidades de visualização geométrica.

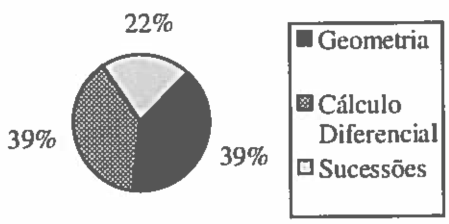
Existe ainda um equilíbrio entre os diversos temas a nível de cada um dos anos de escolaridade, como se pode observar nos quadros seguintes:

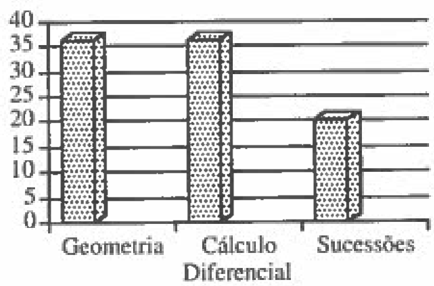
10º ano



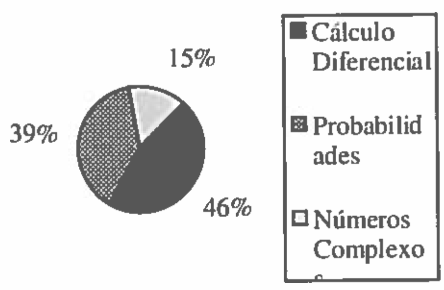


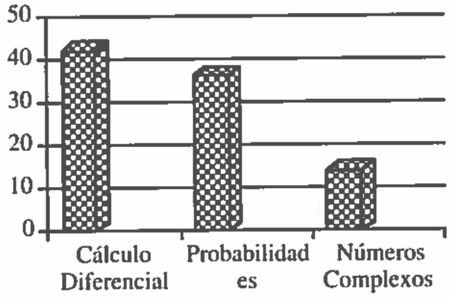
11º ano





12º ano





O estudo do Cálculo Diferencial é precedido de um tema em que se estudam as propriedades elementares das funções e respectivos gráficos, dando oportunidade a que os alunos se familiarizem com este tópico fundamental da matemática actual. No estudo do Cálculo Diferencial dá-se prioridade ao trabalho com a noção de derivada, sendo deixada a formalização da definição de limite para uma fase posterior. Ao contrário dos programas anteriores, a noção de limite é visada primeiro de forma apenas intuitiva; em seguida é formalizada no tema de sucessões, sendo mais tarde generalizada para funções quaisquer (via definição de Heine).

ORIENTAÇÃO METODOLÓGICA

As finalidades e objectivos enunciados determinam que o professor, ao aplicar este programa, contemple equilibradamente:

- o desenvolvimento de atitudes;
- o desenvolvimento de capacidades;
- a aquisição de conhecimentos e técnicas com vista à resolução de problemas.

Tendo como pressuposto ser o aluno agente da sua própria aprendizagem, propõe-se uma metodologia em que

- os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas;
- os conceitos são abordados sob diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização;
- se estabelece maior ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas, ajudando a enquadrar o conhecimento numa perspectiva histórico-cultural.

Neste contexto, destaca-se a importância das actividades a seleccionar, as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o aluno a intuir, conjecturar, experimentar, provar, avaliar e ainda para o reforço das atitudes de autonomia e de cooperação.

Cabe ao professor, de acordo com a realidade da turma, encontrar o equilíbrio entre o número de trabalhos individual e de grupo (a realizar dentro e fora da aula), assim como o espaço para a sua intervenção: dinamizando, questionando, fazendo sínteses, facultando informação ...

O programa pretende dar continuidade, sem brusca mudança de nível, às aprendizagens realizadas no 3.º ciclo, agora coincidente com o ensino obrigatório, ajustando-se ao nível de desenvolvimento e de cultura dos alunos. Parte-se, quando possível, de problemas e situações experimentais para que, com o apoio na intuição, o aluno aceda gradualmente à formalização dos conceitos. São identificadas situações para estabelecer conexões entre os diversos temas de forma a proporcionar uma oportunidade de relacionar os vários conceitos, promovendo uma visão integrada da Matemática.

A utilização obrigatória da tecnologia que, além de ferramenta, é fonte de actividade, de investigação e de aprendizagem, pretende preparar os alunos para uma sociedade em que os meios informáticos terão um papel considerável na resolução de problemas de índole científica.

Capacidade de utilizar a Matemática

A análise de situações da vida real e a identificação de modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução, nomeadamente a propósito do estudo da Estatística e das Funções, constituem uma oportunidade de abordar o método científico.

A resolução de problemas, meio privilegiado para desenvolver o espírito de pesquisa, deve contemplar, além de situações do domínio da Matemática, outras, da Física, da Economia, da Geografia, ...

Raciocínio dedutivo

No ensino secundário, o aluno será solicitado frequentemente a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a confirmar conjecturas, a demonstrar fórmulas e alguns teoremas.

Noções muito elementares de Lógica serão introduzidas à medida que se revelem úteis à clarificação de processos e de raciocínios.

A Axiomática das Probabilidades (muito simplificada) visa dar aos alunos alguma cultura sobre a construção hipotético-dedutiva de uma Ciência. Alguns problemas de Geometria no Espaço podem ser excelentes oportunidades para praticar o raciocínio dedutivo.

Comunicação

Tendo em conta a estreita dependência entre os processos de estruturação do pensamento e da linguagem, é absolutamente necessário que as actividades tenham em conta a correcção da comunicação oral e escrita. O aluno deve verbalizar os raciocínios e discutir processos, confrontando-os com outros. Deve ser capaz de argumentar com lógica e recorrer, cada vez mais, à linguagem simbólica da Matemática, à sua precisão e ao seu poder de síntese.

Esta evolução decorrerá naturalmente da necessidade de comunicar aos outros as suas ideias.

É necessário proporcionar ao aluno oportunidade para expor um tema preparado, a resolução de um problema ou a parte que lhe cabe num trabalho de grupo.

Os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, ..., devem ser apresentados de forma clara, organizada e com aspecto gráfico cuidado.

Perspectiva histórico-cultural

Actividades com uma perspectiva histórica humanizam o estudo da disciplina, mostrando a Matemática como ciência em construção. Proporcionam também excelentes oportunidades para pesquisa de documentação.

A informação sobre a génese e o percurso de um conceito ao longo dos tempos e a sua relação com o progresso da humanidade pode fomentar, ou aumentar, o interesse pelo tema em estudo, ao mesmo tempo que constitui uma fonte de cultura.

Papel do professor

Na concretização da metodologia proposta cabe ao professor ser simultaneamente dinamizador e regulador do processo de ensino-aprendizagem, criando situações motivadoras e adoptando uma estratégia que implique o aluno na sua aprendizagem e desenvolva a sua iniciativa.

Assume, neste nível de ensino, importância fundamental o contrato pedagógico a estabelecer com o aluno, na negociação e definição de consensos para os projectos de trabalho, na participação activa e responsável na gestão do processo ensino-aprendizagem.

A valorização da vertente formativa da disciplina, só pode ser alcançada fomentando uma atitude positiva do aluno face à Matemática.

RECURSOS

A didáctica prevista para a Matemática no ensino secundário pressupõe a possibilidade de uso de materiais e equipamentos diversificados:

- Material de desenho para o quadro e para o trabalho individual (régua, esquadro, compasso, transferidor);
- Material para o estudo da Geometria no espaço (sólidos geométricos, construídos em diversos materiais: placas, arames, palhinhas, acetatos, acrílico, plástico...);
- Quadro quadriculado e papel milimétrico;
- Meios audiovisuais (retroprojector, acetatos e canetas, diapositivos, vídeo, ...);
- Livros para consulta e manuais;
- Outros materiais escritos (folhas com dados estatísticos, fichas de trabalho, fichas de avaliação, ...). Prevê-se a possibilidade de recorrer a fontes para fornecimento de dados estatísticos (autarquias, clubes, hospitais, empresas, institutos, cooperativas,...);
- Calculadoras gráficas com possibilidade de introdução de um ou dois pequenos programas;
- Computador.

É considerado indispensável o uso de

- calculadoras gráficas que desempenham uma parte das funções antes apenas possíveis num computador e que apresentam uma sofisticação crescente e preços cada vez mais acessíveis (para demonstrações com todos os alunos, calculadora com "view-screen);
- um computador ligado a um "data-show" para demonstrações, simulações ou trabalho na sala de aula com todos os alunos ao mesmo tempo.

Deve tender-se para a constituição nas Escolas Secundárias de Laboratórios de Matemática que integrem estes recursos e outros que se venham a revelar necessários.

Tecnologia

Nos *objectivos gerais* indica-se que o aluno deve ser capaz de:

- “Interpretar fenómenos e resolver problemas recorrendo a funções e seus gráficos”(conhecimentos)
- “Exprimir o mesmo conceito em diversas formas e linguagens” (capacidades/aptidões)
- “Analisar situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução” (capacidades/aptidões)
- “Formular generalizações a partir de experiências” (capacidades/aptidões)

Não é possível atingir estes objectivos sem recorrer à dimensão gráfica, e essa dimensão só é plenamente atingida quando os alunos traçam uma grande quantidade e variedade de gráficos com apoio de tecnologia adequada (calculadoras gráficas e computadores).

Não se trata aqui de substituir o cálculo de papel e lápis pelo cálculo com apoio da tecnologia, mas, uma vez compreendidos os processos de cálculo envolvidos, os alunos devem saber tirar partido da tecnologia para os cálculos mais laboriosos. Na expressão feliz de Miguel de Guzmán, os alunos devem ser preparados para um "diálogo inteligente com as ferramentas que já existem".

O uso de tecnologia facilita ainda uma participação activa do aluno na sua aprendizagem como já era preconizado por Sebastião e Silva, quando escrevia no "*Guia para a utilização do Compêndio de Matemática*" que "haveria muitíssimo a lucrar em que o ensino ... fosse ... tanto quanto possível laboratorial, isto é, baseado no uso de computadores, existentes nas próprias escolas ou fora destas, em laboratórios de cálculo".

O aluno deve contudo ser confrontado, através de exemplos concretos, com os limites da tecnologia e, caso haja tempo, pode ser referido o problema da máquina de Turing, tal como o faz Ian Stewart quando aborda os limites da computabilidade no seu livro "*Os problemas da Matemática*".

Uso de calculadoras gráficas

Hoje já estão muito difundidas e a preços acessíveis as calculadoras gráficas que, além de serem também calculadoras científicas completíssimas, possuem capacidades de programação numa linguagem elementar, têm funções estatísticas e traçam gráficos estatísticos. Isto é, realizam todas as funções das calculadoras científicas e têm uma dimensão gráfica que nelas não estava presente.

As calculadoras gráficas, que cada vez mais se utilizarão correntemente, devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas também como meios incentivadores do espírito de pesquisa. O seu uso é obrigatório neste programa.

Tal como indica Bert Waits no seu texto "*The Power of Visualization in Calculus*"*(1992)* e tendo em conta a investigação e as experiências realizadas até hoje, devem ser explorados com a calculadora gráfica os seguintes dez tipos de actividade matemática:

- Abordagem numérica de problemas;
- Uso de manipulações algébricas para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos gráficos;
- Uso de métodos gráficos para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos algébricos;
- Modelação, simulação e resolução de situações problemáticas;
- Uso de cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos;
- Uso de métodos visuais para resolver equações e inequações que não podem ser resolvidas, ou cuja resolução é impraticável, com métodos algébricos;
- Condução de experiências matemáticas, concepção e testagem de conjecturas;
- Estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções;
- Antevisão de conceitos do cálculo diferencial;
- Investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática.

Os alunos devem ter oportunidade de entender que aquilo que a calculadora apresenta no seu écran pode ser uma visão distorcida da realidade; além do mais, o trabalho feito com a máquina deve ser sempre confrontado com conhecimentos teóricos, assim como o trabalho teórico deve ser finalizado com uma verificação com a máquina. É importante que os alunos descrevam os procedimentos utilizados e aquilo que se lhes apresenta. Não é de admitir o uso da calculadora gráfica desligado de quaisquer considerações teóricas.

A calculadora vai permitir que se trabalhe com um muito maior número de funções em que diversas características, como os zeros e os extremos, não se podem determinar de forma exacta; estas funções são importantes pois aparecem no contexto da resolução de problemas aplicados. É muito importante desenvolver a capacidade de lidar com elementos de que apenas uma parte se pode determinar de forma exacta; é importante ir sempre treinando os alunos na confrontação dos resultados obtidos com os conhecimentos teóricos; sem estes aspectos não se pode desenvolver a capacidade de resolver problemas de aplicações da matemática e a capacidade de analisar modelos matemáticos.

Com os cuidados referidos, e como experiências em Portugal e noutros países mostram, a calculadora gráfica dará uma contribuição positiva para a melhoria do ensino da Matemática.

Uso de computadores

O computador, pelas suas potencialidades, nomeadamente nos domínios da representação gráfica de funções e da simulação, permite actividades não só de exploração e pesquisa como de recuperação e desenvolvimento, pelo que constitui um valioso apoio a alunos e professores, devendo a sua utilização considerar-se obrigatória neste programa.

Segundo estatísticas recentes, existem em Portugal em média 20 computadores por Escola Secundária. Estes computadores devem também estar ao serviço da disciplina de Matemática.

Os alunos devem ter oportunidade de trabalhar directamente com um computador, com a frequência possível de acordo com o material disponível.

Vários tipos de programas de computador são úteis e enquadram-se no espírito do programa. Programas de Geometria como o ***Cabri-Géomètre***, de Cálculo Numérico e Estatístico com uma **Folha de Cálculo**, de Gráficos e demonstração como o ***Funções*** (Vitor Teodoro - editado pelo *ex-GEP*, disponível, tal como outros, no *DEP-GEF*), o ***MicroCalc*** *(Harley Flanders)*, de Álgebra Computacional como o ***DERIVE*** ou o ***Mathematica***, ou de simulação como os da série ***Soft-Ciências*** (editados pelas *SPF*, *SPQ* e *SPM*), fornecem diferentes tipos de perspectivas tanto a professores como a alunos. Outros programas começam igualmente a aparecer no mercado português.

Neste sentido recomenda-se enfaticamente o uso de computadores, tanto em salas onde os alunos poderão ir realizar trabalhos práticos, como em salas com condições para se dar uma aula em ambiente computacional, além do partido que o professor deve tirar como ferramenta de demonstração na sala de aula usando um "data-show" com retroprojector.

O trabalho com computadores deverá ainda ser explorado e desenvolvido em todos os trabalhos da *Área Escola* em que tal se proporcionar e ainda nas disciplinas de Informática constantes do currículo (como a *Introdução às Tecnologias da Informação*), em ligação com a disciplina de Matemática.

AVALIAÇÃO

A avaliação deve ter em conta dois dados fundamentais.

- A nível do Ensino Secundário existirão sempre um certo número de provas de âmbito nacional ou regional. Por um lado o professor deve ter em conta na sua avaliação a existência destas provas (realizando provas de estilos diversificados, incluindo por exemplo algumas questões de escolha múltipla, que preparem os alunos para enfrentar os momentos de avaliação global), mas por outro lado deve dessacralizá-las pois a verdadeira preparação para essas provas é feita trabalhando com regularidade e afinco ao longo do ano.

- O professor não deve reduzir as suas formas de avaliação aos testes escritos, antes deve diversificar as formas de avaliação de modo a que *cerca de metade* seja feita usando outros instrumentos que não testes clássicos. Os testes escritos em si mesmos poderão ter aspectos muito positivos se a sua utilização for ponderada com outros elementos de avaliação. Só assim se poderão testar outras competências e capacidades que se pretendem desenvolver no ensino secundário. Em particular recomendamos fortemente que em cada período um dos elementos de avaliação seja obrigatoriamente uma redacção matemática (sob a forma de resolução de problemas, demonstrações, composições/reflexões, projectos, relatórios, notas e reflexões históricas, etc) que reforce a importante componente da *comunicação matemática* (o trabalho pode ser proveniente de um trabalho individual, de grupo, de um trabalho de projecto ou da participação na Área-Escola). No corpo do programa aparecem muitas referências que poderão propiciar este tipo de avaliação.

GESTÃO DO PROGRAMA

É indispensável que o professor, além de conhecer bem o programa de cada ano que vai leccionar, tenha um conhecimento global do programa do ensino secundário, bem como uma perspectiva integradora dos programas dos ciclos do ensino básico.

O professor deve prever, desde o início do ano, momentos para o desenvolvimento de trabalhos individuais, trabalhos de grupo, trabalhos de projecto e actividades investigativas.

O programa de cada ano desenvolve-se por três grandes temas. O professor deve aproveitar todas as ligações entre os temas em cada ano e de cada ano com os anos anteriores, por forma que o aluno encare a Matemática como um todo integrado e não como um conjunto fragmentado em temas, ao mesmo tempo que possibilita a ampliação e consolidação de cada conceito, sempre que ele é retomado.

Inicia-se o 10º ano com o estudo da Geometria no Plano e no Espaço, porque a Geometria é, por excelência, um tema formativo no sentido mais amplo do termo que, pela resolução de problemas apropriados desenvolve variadas capacidades, desde a observação ao raciocínio dedutivo, ao mesmo tempo que deixa perceber verdadeiras conexões entre os vários temas da Matemática, da Álgebra à Análise e à Estatística. É por isso que é tão importante, desde o início, trabalhar com a Geometria, tentando superar algumas (não todas necessariamente) eventuais dificuldades ou lacunas que os alunos tragam dos ciclos anteriores. Começar por este tema permite o desenvolvimento de capacidades de visualização e representação através de figuras que tão necessárias são para o estudo de todos os outros temas.

Os conteúdos de Estatística já abordados no terceiro ciclo do ensino básico permitem resolver as situações que os alunos podem ter de enfrentar em projectos suscitados pela *Área Escola*. Mas cabe ao professor decidir se é ou não oportuno aproveitar o tema de cada projecto em desenvolvimento e antecipar o estudo do tema de Estatística do 10º ano ou para o leccionar sobre um molde de trabalho de projecto.

Sempre que o professor detectar nos alunos lacunas inultrapassáveis em temas de ciclos anteriores, deve desencadear mecanismos de remediação, como os previstos apoios pedagógicos acrescidos.

Em cada tema é importante encontrar-se um equilíbrio entre o desenvolvimento significativo dos conceitos, capacidades e aptidões e o domínio do cálculo. Do mesmo modo, a introdução da lógica, da linguagem matemática e simbólica, das formas de raciocínio científico (matemático e outros) deve aproveitar todas as oportunidades, impregnar o quotidiano da aprendizagem matemática, sem se transformar num conteúdo com valor em si mesmo. O grau de formalismo deve sempre ter em conta o nível de maturidade matemática dos alunos e deve surgir, se possível como necessidade, depois de o professor ter a certeza que o aluno apropriou verdadeiramente o conceito. Outro cuidado tem a ver com o uso da tecnologia: é preciso ter sempre presente que a "tecnologia" em si não está em causa como conteúdo de ensino, mas que são as aprendizagens que ela pode proporcionar que justificam o seu uso.

Para cada tema indica-se uma previsão do número de aulas necessárias à sua abordagem na leccionação. Não sendo mais do que uma previsão, essa indicação deve ser encarada com flexibilidade, sem prejuízo do peso relativo e da profundidade do tratamento desejado que o número de aulas previsto indicia. O professor deve ter como preocupação fundamental abordar e desenvolver, em cada ano, os variados tópicos do programa, pois eles fornecem métodos matemáticos diversificados e desempenham funções diferentes todas imprescindíveis para, em conjunto, contribuírem para a formação integral do cidadão autónomo e livre. Nunca se deve valorizar um conteúdo de tal forma que se possa prejudicar irremediavelmente a formação em algum dos grandes temas ou no desenvolvimento de alguma das capacidades/aptidões reportadas na redacção das finalidades e dos objectivos gerais deste programa de ensino.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARES

Recomenda-se que os professores desenvolvam as seguintes actividades complementares, em estreita ligação com os objectivos definidos para a disciplina de Matemática:

a) A **participação na Área Escola deve envolver sempre uma componente matemática**, como por exemplo: recolha de dados e sua análise estatística, elaboração de gráficos a partir de funções conhecidas, estudo ou elaboração de modelos matemáticos simples que se ajustem às situações em estudo, pôr em evidência a contribuição histórica que a matemática deu para o tema em apreço,...

b) O **trabalho desenvolvido na Área Escola deve poder ser um trabalho de base matemática**, em que as outras disciplinas irão dando contribuições conforme as áreas (história, aplicações, filosofia, etc)

c) Deve ser incentivada (mas não forçada) a **participação dos alunos nas Olimpíadas de Matemática**; complementarmente deve ser incentivada a discussão dos problemas que foram sendo propostos ao longo dos anos; devem ser organizadas sessões de resolução de problemas em regime de clube de Matemática, como preparação para as Olimpíadas de matemática ou para simples recreação dos alunos mais interessados; devem ser incentivadas realizações tipo Olimpíadas, desde o **Problema da Semana, da Quinzena,...** até à realização de pequenos torneios escolares (tipo 'rally-paper') ou inter-escolas.

d) Devem ser convidados professores da escola ou exteriores à escola para proferir **pequenas palestras sobre temas relacionados com a Matemática** (explicação de uma descoberta recente como o Último Teorema de Fermat, exploração de um tema histórico, de aplicações da matemática,...)

e) Sempre que existir uma semana cultural na Escola deve haver um lugar para a Matemática, pois a **Matemática também é cultura**. Desde exposição dos trabalhos dos alunos até ao pedido de exposições elaboradas por outras entidades (APM, SPM, Museus da Ciência,...) ou a simulação de congressos científicos em que os alunos apresentam comunicações ou atribuem prémios tipo "Óscar" ou tipo "Nobel" (ou melhor, Medalha Fields), tudo deve ser pretexto para falar da matemática, criar gosto pela Matemática ou fornecer aos alunos outra visão da Matemática.

f) A **Biblioteca da Escola deve ter um número razoável de textos de matemática**. Os textos oficiais (Programas -vários exemplares-, publicações do ex-GEP, do IIE,...), as obras citadas nos programas oficiais, as obras de Sebastião e Silva, os livros da colecção "O prazer da Matemática" da Editora Gradiva, o "Jornal de Mathematica Elementar" e a "Galeria de Matemáticos" do J.M.E., as publicações da APM e da SPM não devem faltar em qualquer biblioteca escolar. Logo que tal seja possível, as Escolas devem fazer-se sócios institucionais da APM e da SPM, para garantir a recepção regular de novas publicações. Livros escolares de outros países (em particular de Espanha, França, Inglaterra, Itália e Estados Unidos) e sobre História da Matemática ("História Concisa da Matemática" de Struik, "História da matemática" de C. Boyer, Ed. Edgard Blücher, "Mathématiques au fil des âges"- Ed. Gauthier- -Villars, "Histoire de Problèmes - Histoire des Mathématiques" - Ed. Ellipses dos IREM e "The History of Mathematics - A Reader", Open University) serão um manancial de ideias para trabalhar com os alunos.

QUADRO RESUMO

Distribuição dos temas em cada ano

10º ANO	11º ANO	12º ANO
1. Geometria no Plano e no Espaço I • Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço • O método cartesiano para estudar Geometria no plano e no espaço • Vectores livres no plano e no espaço • Estudo vectorial da recta no plano e no espaço • Equação reduzida da recta no plano	**1 Geometria no Plano e no Espaço II** • Resolução de problemas envolvendo triângulos • Ângulo e arco generalizados • Funções seno, co-seno e tangente; definição e variação (estudo no círculo trigonométrico) • Equações trigonométricas elementares • Produto escalar de dois vectores no plano e no espaço • Conjuntos definidos por condições • Equação cartesiana de planos. • Intersecção de planos e resolução de sistemas; equações cartesianas da recta no espaço • Paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos (interpretação vectorial)	**1. Probabilid. e Combinatória** • Introdução ao cálculo de Probabilidades • Distribuição de frequências relativas e distribuição de probabilidades • Definição axiomática de Probabilidades (caso finito) e propriedades; definição de probabilidade condicionada e sua verificação da axiomática. • Combinatória Técnicas de contagem; permutações, arranjos com e sem repetição; pares de um conjunto e combinações sem repetição; propriedades. Triângulo de Pascal. Binómio de Newton. • Aplicações ao cálculo de Probabilidades Acontecimentos independentes.
2. Funções e Gráficos - Generalidades. Funções polinomiais. Função módulo. • Gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal • Definição de função, gráfico e representação gráfica de uma função. • Estudo intuitivo de propriedades das: Funções quadráticas; referência à parábola Função módulo Funções definidas por 2 ou mais ramos Funções polinomiais (graus 3 e 4) • Equações e inequações do 2º grau; Inequações com módulos • Decomposição de polinómios	**2. Introdução ao Cálculo Diferencial I- Funções Racionais e Com Radicais. Taxa de variação/Derivada** • Estudo de propriedades das Funções racionais do tipo $f(x) = a+b/(cx+d)$; referência à hipérbole • Aproximação experimental da noção de limite • Operações com funções: soma, diferença, produto, quociente, composição. • Noção de taxa média de variação; noção de taxa de variação; interpretação geométrica e física. • Determinação da derivada em casos simples; aplicações • Inversão de funções; funções com radicais quadráticos e cúbicos	**2. Introdução ao Cálculo Diferencial II** • Função exponencial e função logarítmica de bases maiores que 1. Regras operatórias de exponenciais e logaritmos. Aplicações concretas. • Limite de função segundo Heine; Propriedades operatórias sobre limites; limites notáveis; indeterminações. Assímp-totas. • Continuidade Teorema de Bolzano-Cauchy e aplicações numéricas • Funções deriváveis. Regras de derivação e derivadas de funções elementares. Segunda definição do número e Segundas derivadas e concavidade. • Estudo de funções em casos simples • Problemas de optimização
3. Estatística • Objecto e história • Recenseameno e sondagem • População e amostra • Estatística descritiva e Estatística Indutiva • Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos) • Medidas de localização de uma amostra • Medidas de dispersão • Diagramas de "extremos e quartis" • Referência a distribuições bidimensionais	**3. Sucessões** • Introdução ao conceito de sucessão A suc. como função de variável natural; suc. monótonas; suc.. limitadas; progr. aritméticas e geométricas. • Estudo intuitivo de $(1+1/n)^n$ e primeira definição de *e* • Limites: Infinitamente grandes e infinitésimos; Limites de sucessões e convergência; determinação de limites	**3. Trigonometria e Números Complexos** • Funções seno, co-seno e tangente; estudo de propriedades; cálculo de derivadas • Introdução histórica dos números complexos, através dos problemas da resolubilidade algébrica. • Complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica. • Operações • Domínios planos e condições em variável complexa.

DESENVOLVIMENTO DOS TEMAS E INDICAÇÕES METODOLÓGICAS

Apresenta-se, para cada ano e para cada grande tema, o desenvolvimento que pretende citar exaustivamente todos os conteúdos obrigatórios e facultativos. Em alguns casos, por se entender necessário um esclarecimento particular referem-se objectivos precisos nesse desenvolvimento dos temas.

Há quem pense que se pode substituir o programa no seu todo pela lista de itens de conteúdo fornecidos no desenvolvimento dos diversos temas. Não é assim.

As indicações metodológicas que acompanham o desenvolvimento dos temas esclarecem as questões estratégicas da metodologia de ensino e do "fazer matemática", definem as formas de abordar os conteúdos, sugerem oportunidades de introduzir outros conceitos e de estabelecer conexões, de utilizar tecnologia, de experimentar, etc, e só por isso são importantes e imprescindíveis partes do programa a par dos conteúdos. Podemos mesmo dizer que a forma de aprender a fazer matemática é um conteúdo do ensino de Matemática.

Para além disso, as indicações metodológicas são importantes e imprescindíveis neste programa e têm de ser seguidas, porque é nelas que se estabelecem em pormenor, para além da forma de abordagem, a profundidade requerida e o rigor exigido nas formalizações dos conceitos e definições, para além do tipo de exercícios e actividades que podem ser propostos aos alunos. Nessas indicações metodológicas aparecem mesmo instruções no sentido de evitar certos tipos de exercícios que, desse modo, são excluídos do programa e não podem ser considerados. A repetição de exercícios rotineiros consome tempo precioso, necessário para a leccionação do programa, é desaconselhada também porque, da sua leccionação, resulta a desqualificação dos conceitos que pretendem consolidar.

Resumindo, cada conteúdo do ensino secundário de Matemática não está mais do que esboçado no desenvolvimento dos temas; para efeitos deste programa, as indicações metodológicas não são simples indicações e concorrem até para a definição dos conteúdos de ensino.

De acordo com o desenvolvimento de cada tema e o grau de profundidade a atribuir à abordagem de cada conteúdo, faz-se corresponder um determinado número de horas à leccionação de cada tema. Embora isso não constitua uma instrução rígida, ela deve ser uma referência obrigatória de planificação e deve limitar a abordagem de cada tema, de modo a que, mesmo com prejuízo do aprofundamento deste ou daquele conteúdo específico, todos os temas sejam abordados com todos os alunos.

As indicações metodológicas, ao sugerir actividades e preocupações a ter, acabam por sugerir diversificação de tipos de instrumentos e de oportunidades de avaliação das aprendizagens.

10º ANO

Tema I - Geometria no Plano e no Espaço I (36 aulas)

O ensino da Geometria reveste-se da maior importância devendo desenvolver no aluno uma intuição geométrica e um raciocínio espacial assim como capacidades para explorar, conjecturar, raciocinar logicamente, usar e aplicar a Matemática, formular e resolver problemas abstractos ou numa perspectiva de modelação matemática. Deve ainda desenvolver no aluno capacidades de organização e de comunicação quer oral quer escrita.

O professor deve no início da unidade propor aos alunos actividades que permitam recordar e ampliar os conhecimentos adquiridos no 3º ciclo de modo a estabelecer uma boa articulação entre este ciclo e o ensino Secundário.

Tanto em geometria plana como em geometria do espaço todo o ponto de vista axiomático é excluído devendo a prática com as figuras ter um papel central e decisivo no ensino das noções matemáticas que estão em jogo. O professor deve propor actividades de construção, de manipulação de modelos e ligadas a problemas históricos fazendo surgir a partir do problema e do caminho que se faz para a sua resolução uma grande parte dos resultados teóricos que pretende ensinar ou recordar.

A exploração de programas adequados no computador pode ajudar eficazmente o aluno a desenvolver a percepção dos objectos do plano e do espaço.

Devem explorar-se sempre que possível as conexões da Geometria com outras áreas da Matemática e o seu desenvolvimento deve prolongar-se noutros temas.

Desenvolvimento

Resolução de problemas de geometria no plano e no espaço

(Pretende-se que os problemas a propor promovam o desenvolvimento de capacidades de experimentação, raciocínio geométrico e a análise crítica, conduzindo ao estabelecimento de conjecturas e à sua verificação.)

Alguns tópicos de geometria a considerar em situações concretas na resolução de problemas podem ser por exemplo :

- Modos de definir um plano.
- Propriedades usuais do paralelismo de duas rectas, de dois planos, de uma recta e um plano, assim como as propriedades usuais de perpendicularidade de duas rectas, de uma recta e de um plano.
- Intersecção de sólidos por um plano dado.
- Construção de uma representação da secção obtida.
- Estabelecimento de relações métricas entre figuras, nomeadamente entre medidas lineares, áreas e volumes.

Indicações Metodológicas

Este tema pode ser introduzido a partir de actividades em que os alunos reflictam na organização do espaço e no modo como algumas propriedades dos seus objectos elementares (pontos , rectas e planos) permitem validar conjecturas.

O professor pode propor ao aluno actividades com poliedros (entre outros, estudar os cinco sólidos de Platão: cubo, tetraedro, octaedro, icosaedro, dodecaedro). Partindo dos seus modelos podem ser estudadas as propriedades dos polígonos que constituem as suas faces . É importante que os alunos recordem as definições dos triângulos, quadriláteros e polígonos usuais e com base nestas descubram e verifiquem novas propriedades . Os alunos devem ser capazes de desenhar exemplos representativos de cada quadrilátero bem como dos polígonos regulares.

O aluno deve ser levado a reconhecer que quando uma figura do espaço está contida num plano se podem utilizar neste plano todas as propriedades da geometria plana.

Os problemas a propor aos alunos não devem ser numerosos. Devem ser ricos e não se reduzir a propostas fragmentadas. É mais importante um problema bem explorado do que muitos tratados apressadamente.

As actividades devem estar ligadas à manipulação de modelos geométricos e o professor deve insistir para que o aluno exprima correctamente os seus raciocínios, oralmente e por escrito, através de pequenas composições. Também se pretende que os alunos realizem pequenas investigações.

Com os sólidos usuais, pretende-se que o aluno fique a saber desenhar representações planas destes, descrever a intersecção de um desses sólidos por um plano dado e saber construir e desenhar uma representação da intersecção obtida, utilizando as regras da perspectiva cavaleira (o aluno deve começar por modelar a situação por exemplo com sólidos de arestas, com sólidos transparentes ou de qualquer outro modo sugestivo). Devem ser estudadas as propriedades do polígono obtido como secção.

A resolução de problemas numéricos ligados ao calculo e comparação de distâncias, áreas e volumes em configurações do plano ou do espaço poderá constituir uma oportunidade para o aluno voltar a trabalhar com números irracionais e/ou valores aproximados recorrendo à calculadora. O aluno deve ser estimulado a recorrer ao calculo mental e à estimativa para confirmar se os valores encontrados são aceitáveis.

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas

Geometria Analítica

- O método cartesiano para estudar geometria no plano e no espaço:
- Referenciais cartesianos ortogonais e monométricos no plano e no espaço. Correspondência entre o plano e $\mathbb{R}^2$, entre o espaço e $\mathbb{R}^3$. Conjuntos de pontos e condições. Distância entre dois pontos. Circunferência, círculo, elipse e mediatriz; Superfície esférica, esfera e plano mediador.

- Vectores livres no plano e no espaço:
- Adição de vectores e multiplicação por um escalar; propriedades. Colinearidade de dois vectores
- Soma de um ponto com um vector. Diferença de dois pontos.
- Norma de um vector.
- Componentes e coordenadas de um vector num referencial ortonormado do plano
- Componentes e coordenadas de um vector num referencial ortonormado do espaço.
- Coordenadas do ponto médio de um segmento de recta.

- Equação vectorial da recta no plano e no espaço.
- Equação reduzida da recta no plano e equação $x=x_0$.

O professor deve propor ao aluno actividades que o levem a sentir a necessidade e vantagem do uso de um referencial, quer no plano quer no espaço. O professor pode fornecer figuras e/ou um referencial numa grelha e pedir a colocação da figura ou do referencial para obter "as melhores coordenadas" experimentando com várias figuras no plano e no espaço.

Será vantajoso que o professor aproveite os problemas com que iniciou a unidade, recorrendo aos modelos já utilizados para fazer aparecer as novas noções (referencial, coordenadas , vectores , ...) levando o aluno a justificar determinadas proposições por mais de um processo. Só mais tarde deve recorrer a desenhos em perspectiva.

No plano, o aluno deve descobrir as relações entre as coordenadas de pontos simétricos relativamente ao eixo das abcissas, ao eixo das ordenadas e à bissectriz dos quadrantes ímpares. No espaço, o aluno deve descobrir as relações entre pontos simétricos relativamente aos planos coordenados e aos eixos coordenados.

É importante aproveitar as analogias mas também salientar as diferenças no tratamento analítico do plano e do espaço .

Pretende-se que o aluno deduza propriedades de figuras geométricas (triângulos e quadriláteros) usando vectores e explore a ligação do cálculo vectorial com a Física.

A circunferência, a elipse e a superfície esférica devem ser tratadas essencialmente como lugares geométricos sem a preocupação de fazer múltiplos exercícios que envolvam apenas as suas equações. O mesmo para a mediatriz e o plano mediador.

A equação da elipse obtém-se facilmente a partir da circunferência por meio de uma mudança afim de uma das coordenadas.

Não devem ser feitos exercícios repetitivos com as equações da recta, da elipse ou da circunferência.

O professor deve incentivar o aluno a fazer em todas as situações uma figura geométrica de modo a tirar proveito da visualização do problema e a desenvolver a sua capacidade de representação não deixando que o aluno se limite à resolução exclusiva de equações e à utilização de fórmulas . Além do mais o aluno deve descrever com algum detalhe o processo utilizado, justificando adequadamente.

10º ANO

Tema II - Funções e Gráficos - Generalidades. Funções polinomiais. Função módulo (36 aulas)

Os conhecimentos sobre funções, indispensáveis para a compreensão do mundo em que vivemos, vão ser ampliados com base no estudo numérico e gráfico devendo privilegiar o trabalho intuitivo com funções que relacionam variáveis da vida corrente, da Geometria, da Física, da Geografia ou de outras disciplinas.

Em particular faz-se o estudo detalhado das funções polinomiais e da função módulo e resolvem-se gráfica e numericamente algumas equações e inequações.

Este tema tem um ênfase muito grande na ligação entre as fórmulas e as representações geométricas. Esta ligação é muito importante para todos os que utilizarem matemática. A capacidade de as relacionar é uma capacidade fundamental para o mundo de hoje e do futuro e assim este tema deverá fornecer uma formação para a vida toda tão básica como a tabuada.

Pré-Requisitos:

Os alunos devem conhecer a função afim; devem poder reconhecer essa função através do gráfico, esboçar o gráfico e devem conhecer algumas propriedades (monotonia e zeros de forma apenas intuitiva e usando os conhecimentos de equações). Os alunos devem saber resolver equações e inequações do 1º grau e resolver equações do 2º grau. Os alunos devem conhecer os números reais e representar intervalos de números reais.

Desenvolvimento

- Gráfico cartesiano de uma função em referencial ortogonal.
- Definição de função, gráfico e representação gráfica de uma função.
- Estudo intuitivo tanto a partir de um gráfico particular como usando calculadora gráfica de propriedades das funções e dos seus gráficos (domínio, contradomínio, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, limites nos ramos infinitos) e análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das funções (considerando a variação para cada parâmetro separadamente) para as seguintes funções:
  i) Funções quadráticas; estudo a partir da família de funções definida por $f(x)=ax^2 + bx +c$ e a partir dos zeros e do sinal do trinómio $ax^2 + bx +c$;
  ii) função módulo; estudo da família de funções definidas por $f(x) = a\,|bx + c| + d$;
  iii) funções definidas por dois ou mais ramos (cujo domínio é um intervalo ou união de intervalos).

Indicações Metodológicas

Para todos os tipos de funções devem ser dados exemplos a partir de questões concretas (tanto de outras áreas da matemática como os constantes em livros de Física, Química, Geografia, Economia, etc, em recortes de jornais). Particular importância deverá ser dada a situações problemáticas, situações de modelação matemática e a exemplos ligados com o trabalhos da Área-Escola e com a Geometria, devendo retomar-se alguns exemplos estudados no tema anterior. Os alunos devem reconhecer que o mesmo tipo de função pode constituir um modelo de diferentes tipos de situações problemáticas.

Com vista a facilitar o uso de uma linguagem rigorosa (mas não formalista) o professor pode introduzir os conceitos de "condição" e "proposição" e referir sumariamente ao longo do tema as propriedades da conjunção, disjunção, negação e implicação.

Os alunos devem sempre traçar um número apreciável de funções tanto manualmente em papel quadriculado ou papel milimétrico como usando calculadora gráfica ou computador.

Dificuldade a não exceder nas funções definidas por dois ou mais ramos:

$$f(r) = |r - a|,\ g(x) = |x - 3| + 1,\ h(x) = \begin{cases} 4 & \text{se } x > 0 \\ x^2 - 5x & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

No estudo das famílias de funções os alunos podem realizar pequenas investigações.

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
• Resolução de problemas envolvendo a expressão de uma variável em função de outra, ou recorrendo a uma representação gráfica. • Referência à parábola, às suas principais propriedades e à sua importância histórica. • Equações e inequações do 2º grau; inequações com um módulo. • Estudo de funções polinomiais e polinómios, com particular incidência nos graus 3 e 4. • Possibilidade da decomposição de um polinómio em factores (informação). Decomposição de um polinómio em factores em casos simples, por divisão dos polinómios e recorrendo à regra de Ruffini. Justificação desta regra. • Estudo gráfico de inequações envolvendo polinómios com recurso à calculadora gráfica ou a partir de uma decomposição em factores do polinómio, usando uma tabela de variação de sinais. Os alunos devem verificar que obtiveram o resultado esperado usando o outro método, ou usando propriedades conhecidas. • Estudo de transformações simples de funções (tanto usando papel e lápis como calculadora gráfica): dada a função f tanto a partir de um gráfico como a partir de uma expressão analítica, esboçar o gráfico das funções definidas por $y = f(x)+a$, $y = f(x+a)$, $y = af(x)$, $y = f(ax)$, $y = \|f(x)\|$, $y = f(\|x\|)$, com a positivo ou negativo, descrevendo o resultado recorrendo a linguagem geométrica. • Resolução de problemas concretos envolvendo funções polinomiais.	Experimentando com a calculadora gráfica ou computador, os alunos devem observar que podem ser apresentadas diferentes representações gráficas de um mesmo gráfico, variando as escalas da representação gráfica. Quando for usada a calculadora gráfica os alunos devem explorar claramente os diversos comportamentos. Os alunos devem saber evitar conclusões apressadas e devem ser incentivados a elaborar conjecturas em função do que se lhes apresenta mas devem ser sistematicamente treinados na análise crítica de todas as suas conclusões. Os alunos devem observar que a representação gráfica depende de forma decisiva do rectângulo de visualização escolhido. Devem ainda estudar situações em que uma descrição qualitativa satisfatória do comportamento da função só é possível com um gráfico múltiplo (conjunto de gráficos em diferentes rectângulos de visualização) Os alunos devem determinar pontos notáveis (como intersecção com os eixos coordenados) e extremos de forma aproximada (com uma aproximação definida *a priori*) a partir do gráfico traçado na calculadora gráfica ou computador. No estudo de polinómios os alunos devem trabalhar tanto com polinómios do tipo $3x^3 + x^2 + 5$ em que o trabalho será numérico e gráfi-co e em que para ter uma informação satisfatória são precisos dois grá-ficos, como devem trabalhar com polinómios do tipo $x^3 + x^2 - 3x + 1$, em que por tentativas é possível encontrar uma raiz (neste caso 1) e, depois de usar a regra de Ruffini, reduzir a um polinómio de grau inferior. Um aluno deverá registar por escrito as observações que fizer ao usar a calculadora gráfica ou outro material, descrevendo com cuidado as propriedades constatadas e justificando devidamente as suas conclusões relativamente aos resultados esperados (para desenvolver o espírito crítico e a capacidade de comunicação matemática).
(*) Estudo intuitivo de curvas que se ajustem a um conjunto de pontos dados.	(*) O estudo de curvas deve ser feito de modo informal, experimentando o aluno qual dos tipos de funções já estudadas melhor se ajusta (poderá ser analisada a soma dos desvios ou a soma dos quadrados dos desvios).

10º ANO

Tema III - **Estatística** (20 aulas)

Algumas das noções que se tratam nesta unidade já foram abordadas no 3º ciclo é por isso possível em qualquer altura reinvestir nestes conhecimentos e completá-los progressivamente. Assim, o professor pode, se o considerar vantajoso, tratar este tema de uma forma descontínua ao longo do ano, nomeadamente sob a forma de trabalho de projecto.

O aluno deverá ficar a saber organizar, representar e tratar dados recolhidos em bruto (ou tabelados) para daí tirar conclusões numa análise sempre critica e sempre consciente dos limites do processo de matematização da situação. É importante que o estudo da Estatística contribua para melhorar a capacidade dos alunos para avaliar afirmações de carácter estatístico, fornecendo-lhes ferramentas apropriadas para rejeitar quer certos anúncios publicitários quer notícias ou outras informações em que a interpretação de dados ou a realização da amostragem não tenha sido correcta.

Este tema fornece uma excelente oportunidade para actividades interdisciplinares, individualmente ou em grupo, devendo o professor ao definir o plano de trabalho com os alunos incentivá-los a recorrer ao computador. No final, os alunos devem interpretar e comunicar os resultados à turma fazendo uma análise crítica e estando conscientes que modos diferentes de apresentar as conclusões podem alterar a mensagem.

Pré-Requisitos:
Estatística do 3º ciclo do Ensino Básico.

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
• Objecto da Estatística e breve nota histórica sobre a evolução desta Ciência; utilidade na vida moderna. Clarificação de quais os fenómenos que podem ser objecto de estudo estatístico; exemplificação de tais fenómenos com situações da vida real, salientando o papel relevante da Estatística na sua descrição.	Os alunos podem recolher dados na turma, em revistas, livros ou junto de instituições, empresas, serviços públicos, autarquias, I.N.E.., Comunidade Europeia,. ... devendo, no entanto , ter-se em conta a maturidade e sensibilidade dos alunos para os problemas apresentados.
• Recenseamento e sondagem. • As noções de população e amostra. Compreensão do conceito de amostragem e reconhecimento do seu papel nas conclusões estatísticas; distinção entre os estudos e conclusões sobre a amostra e a correspondente análise sobre a população. Noções intuitivas sobre as escolhas de amostras, sobre a necessidade de serem aleatórias, representativas e livres de vícios de concepção. • Estatística Descritiva e Estatística Indutiva.	O professor deve acentuar que o principal objectivo da Estatística Descritiva é organizar os dados observados (amostra) e extrair deles as características mais importantes, resumindo a informação neles contida (redução dos dados). Deve salientar-se que a Estatística Descritiva se limita ao estudo da amostra. Numa segunda fase, a da Estatística Indutiva, conhecidas as propriedades da amostra procura-se inferir para todo o universo. Esta segunda fase não faz parte do programa.

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
Organização e interpretação de caracteres estatísticos (qualitativos e quantitativos): • Análise gráfica de atributos qualitativos (gráficos circulares, diagramas de bandas, pictogramas); determinação da moda; • Análise de atributos quantitativos: variável discreta e variável contínua. Dados agrupados em classes. • Variável discreta: tabelas de frequências (absolutas, relativas e relativas acumuladas); gráfico de barras; (gráficos circulares e pictogramas); função cumulativa. • Variável continua: tabelas de frequências (absolutas, relativas e relativas acumuladas); gráficos (histograma, polígono de frequências); função cumulativa.	O professor deve rever o estudo dos atributos qualitativos, nomeadamente o estudo gráfico procurando clarificar a distinção entre os diferentes tipos de atributos e correspondente estudo. Quando os dados são quantitativos pode ser útil usar um tipo de representação sugestiva - Stem-and-leaf (caule e folha) - que se pode considerar entre a tabela e o gráfico. Utiliza-se principalmente para representar amostras de dois dígitos e consiste em escrever do lado esquerdo de uma linha vertical o dígito (ou dígitos) da classe de maior grandeza, seguidos dos restantes. Esta representação facilita o calculo da mediana e reflecte a forma da distribuição da população subjacente aos dados observados. Os alunos devem construir tabelas de frequências absolutas ou efectivos , de frequências relativas e de frequências relativas acumuladas associadas a dados preferencialmente correspondentes a situações reais. Os alunos devem ainda construir e interpretar gráficos de barras (caso discreto), histogramas e gráficos poligonais (caso contínuo) e, eventualmente, em ambos os casos, gráficos circulares e pictogramas. Os alunos devem definir e interpretar a função cumulativa e fazer a respectiva representação gráfica. No estudo de variáveis estatísticas contínuas deverá ter-se em conta que o seu estudo tem subjacente a hipótese de que em cada classe a frequência (absoluta ou relativa) está uniformemente distribuída (isto é, a frequência por unidade de amplitude de cada classe é igual ao quociente entre a frequência e a amplitude dessa classe). No caso contínuo, a função cumulativa deverá ser introduzida de forma intuitiva; assim, dever-se-á começar por calcular o seu valor nos extremos das classes e, em seguida , usando a hipótese de distribuição uniforme, construir os segmentos de recta associados a cada classe.
• Medidas de localização de uma amostra: Moda ou classe modal; média; mediana; quartis. • Medidas de dispersão de uma amostra: Amplitude; variância; desvio padrão; amplitude interquartis. • Discussão das limitações destes parâmetros estatísticos.	Os alunos devem compreender e interpretar medidas de localização, em particular , as medidas de tendência central assim como as medidas de dispersão. Não se pedem fórmulas estatísticas para além da média e do desvio padrão, devendo utilizar-se as funções estatísticas da calculadora mal tenham os alunos compreendido os conceitos a que essas fórmulas referem. Recorrendo à análise conjunta das medidas de localização e de dispersão , em particular recorrendo à média e ao desvio padrão os alunos devem interpretar distribuições. A mediana e os quartis deverão ser definidos a partir da função cumulativa não devendo no entanto perder-se a interpretação corrente (por exemplo, no caso da mediana: é o valor que tem à sua esquerda e à sua direita o mesmo número de observações). Além disso, no caso discreto deverá ser apresentada a regra prática para o cálculo da mediana cuja dedução poderá ilustrar a interpretação atrás referida; é desnecessária , a este nível , a apresentação das regras práticas para a determinação dos 1º e 3º quartis bem como a sua obtenção no caso contínuo. Deverá ser observado que, no caso contínuo , o cálculo da média e do desvio padrão só é possível se introduzirmos uma variável discreta relacionada com a que está em estudo. Isto é feito por intermédio da variável das marcas cuja escolha é legitimada pela hipótese de distribuição uniforme em cada classe. Com exemplos devem ser estudadas propriedades elementares da média e da variância ou do desvio padrão ; em particular, analisar o efeito nestes parâmetros de uma transformação linear afim dos valores da variável.

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
• Diagramas de "extremos e quartis"	O aluno deve construir e interpretar diagramas de extremos e quartis de uma distribuição, enquanto gráfico que permite ter simultaneamente em conta medidas de localização e de dispersão.
• Referência a distribuições bidimensionais (abordagem gráfica e intuitiva): • Diagrama de dispersão; dependência estatística; ideia intuitiva de correlação; exemplos gráficos de correlação positiva, negativa ou nula. • Coeficiente de correlação e sua variação em [-1 , 1]. • Definição de centro de gravidade de um conjunto finito de pontos; sua interpretação física. • Ideia intuitiva de recta de recta de regressão; sua interpretação e limitações.	A partir de exemplos de nuvens de pontos o aluno deve identificar o tipo de correlação. A medida que se utiliza com mais frequência para medir o grau da associação linear é o coeficiente de correlação (linear) que se representa por r . Não devem ser propostos exercícios que envolvam o cálculo (a não ser pela máquina) nem é de exigir o conhecimento da fórmula do coeficiente de correlação. Os alunos devem verificar, a partir de exemplos, algumas propriedades do coeficiente de correlação: - O valor de r está no intervalo [-1 , 1] - Quanto maior for o módulo de r, maior será a correlação linear entre os valores de x e de y . - Significado e interpretação do sinal de r. Pode definir-se a recta de regressão (linear) como a recta tal que a soma dos quadrados das distâncias de cada ponto da nuvem à recta seja mínima . Informar que se pode calcular como sendo a recta que passa pelo centro de gravidade da distribuição e cujo declive é dado pelo coeficiente de regressão; sobre este coeficiente informar apenas que o sinal é o mesmo do coeficiente de correlação e em seguida calculá-lo usando a calculadora. Os alunos poderão ainda obter a recta de regressão na calculadora gráfica e em seguida verificar que passa pelo centro de gravidade. É conveniente chamar a atenção dos alunos que a equação da recta de regressão desligada da nuvem de pontos não nos permite certificar se ela foi ou não influenciada por um pequeno número de pontos anormais. Ora, por vezes, uma investigação adicional destes pontos poderá permitir eventualmente rejeitá-los e obter assim uma recta mais ajustada.

11º ANO

Tema I - Geometria no Plano e no Espaço II (36 aulas)

A trigonometria tem a sua origem no estudo da medição de triângulos. Problemas relacionados com a navegação, a topografia, a indústria de moldes, entre muitos outros, exigem a resolução de triângulos. Mais tarde ao serem estudadas as funções trigonométricas veremos aparecer o seno e o co-seno como modelos matemáticos para fenómenos periódicos tais como variações de temperatura , de marés,..., mas nesta primeira abordagem para além da resolução de problemas que envolvam triângulos trata-se somente de ampliar o conceito de ângulo que passa a ser encarado como "gerado" por uma semi-recta em movimento (sentido positivo ou negativo) bem como o estudo do circulo trigonométrico e a resolução de algumas equações trigonométricas simples.

A calculadora facilitará o estudo da Trigonometria e permitirá que o tempo seja dedicado à compreensão dos conceitos e às aplicações ligadas a problemas reais, reduzindo-se o ênfase em exercícios de cálculo.

A continuação do estudo da Geometria com a noção de produto escalar e suas aplicações ligada à resolução de problemas deve permitir ao aluno melhorar as suas capacidades de visualização e representação aumentando a sua intuição geométrica.

Devem continuar a explorar-se as ligações da Geometria aos outros conteúdos. Os conhecimentos adquiridos nesta unidade devem mostrar ao aluno como a linguagem das coordenadas e dos vectores lhe fornece novos utensílios para resolver problemas já abordados noutras perspectivas.

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
Resolução de problemas que envolvam triângulos.	Devem propôr-se aos alunos problemas variados ligados a situações concretas onde apliquem métodos trigonométricos (problemas ligados a sólidos, a moldes, à navegação, à topografia , históricos,...) de modo a que o aluno se aperceba da importância da trigonometria para as várias Ciências. As calculadoras permitem que o aluno se preocupe menos com os cálculos e mais com a compreensão do problema.
• Ângulo e arco generalizados: - Radiano. - Expressão geral das amplitudes dos ângulos com os mesmos lados, em graus e radianos. • Funções seno, co-seno e tangente: definição; variação (estudo no círculo trigonométrico); valores em $\pi/6$, $\pi/4$ e $\pi/3$ radianos.	Embora se refiram estes valores por se considerar que é importante que o aluno conheça alguns valores exactos das funções trigonométricas, nomeadamente para que mais tarde possa confirmar pontos do traçado de gráficos de funções trigonométricas, não devem os alunos trabalhar preferencialmente com eles pois possuem uma calculadora. Devem aperceber-se da diferença em trabalhar por exemplo com sen*1* em *graus* e *radianos* de modo a ter sempre bem presente em que modo está a calculadora e interpretar convenientemente os resultados.
• Relações entre as funções circulares de α, e de $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\frac{\pi}{2}+\alpha$, $\pi-\alpha$, $\pi+\alpha$ e $-\alpha$.	Depois de compreendidas as relações referidas por observação do circulo trigonométrico tornam-se desnecessários exercícios repetitivos de puras técnicas de cálculo e rotina. É importante que os alunos verifiquem que se mantêm as relações: $sen^2x+cos^2x=1$; $tgx=\frac{senx}{cosx}$ e $1+tg^2x=\frac{1}{cos^2x}$ e as usem na determinação de uma função trigonométrica, conhecida outra.
• Expressão geral das amplitudes dos ângulos com o mesmo seno, co-seno ou tangente. Equações trigonométricas elementares.	As equações trigonométricas a resolver devem ser simples do tipo $sen\,(kx) = sen\,\alpha$, $cos(\,kx+a) = cos\,\alpha$, $tg\,(kx) = tg\,\alpha$. Não é de excluir uma breve referência aos *seno* e *co-seno* como funções reais de variável real e aos gráficos destas funções trigonométricas.

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
• Expressão geral das amplitudes dos ângulos com o mesmo seno , co-seno ou tangente. Equações trigonométricas elementares.	
• Produto escalar de dois vectores no plano e no espaço: - Definição e propriedades. - Expressão do produto escalar nas coordenadas dos vectores em referencial ortonormado.	A partir da equação vectorial o aluno pode chegar facilmente às equações cartesianas da recta. O ensino deve dedicar a maior ênfase à análise e interpretação de figuras quer planas quer tridimensionais pois o aluno para resolver problemas da vida corrente ou relacionados com áreas da engenharia, arquitectura,... precisa de usar intuição e raciocínios geométricos.
- Ângulo de duas rectas; inclinação de uma recta; declive como tangente da inclinação no caso da equação reduzida da recta no plano. - Perpendicularidade de vectores e de rectas. - Aplicação do produto escalar à dedução da fórmula do desenvolvimento de *cos(x-y)*	O professor deve assegurar que neste estudo da Geometria o aluno não se limite unicamente à "manipulação" de condições desligadas de situações concretas e sem as interpretar. Deve procurar que a aprendizagem dos novos conceitos apareça ligada à resolução de problemas como prolongamento da geometria estudada no ano anterior (agora o aluno poderá justificar propriedades das figuras usando as suas representações em coordenadas)
• Conjuntos definidos por condições.	
• Breve referência à equação cartesiana do plano definido por um ponto e o vector normal.	
• Intersecção de planos; interpretação geométrica; resolução de sistemas.	
• Equações cartesianas da recta no espaço.	
• Paralelismo e perpendicularidade de rectas e planos (interpretação vectorial).	
(*) Programação linear - breve introdução.	

11º ANO

Tema II - Introdução ao Cálculo Diferencial I - Funções racionais e com radicais. Taxa de variação / /Derivada (36 aulas)

Com o estudo numérico e gráfico de novas funções - racionais e envolvendo radicais - aplicam-se os conhecimentos do 10º ano relativos a funções. Tal como no 10º ano privilegiam-se funções que relacionam variáveis com significado concreto. As operações com funções são abordadas neste Tema. Serão estudadas funções inversas e funções compostas. É introduzida a noção de taxa média de variação e taxa de variação/derivada recorrendo a um uso informal da noção de limite.

Pré-Requisitos:
Os alunos devem conhecer a função afim e a função definida por $f(x) = k/x$, com $k>0$ e $x>0$. Todo o Tema II - Funções e Gráficos do 10º ano. Trigonometria do tema anterior.

Desenvolvimento

- Estudo intuitivo tanto a partir de um gráfico particular, como usando calculadora gráfica de propriedades das funções e dos seus gráficos (domínio, contradomínio, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assímptotas, limites nos ramos infinitos) e análise dos efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos das funções (considerando a variação para cada para cada parâmetro separadamente) para as seguintes funções:
  i) funções racionais definidas por $f(x) = a + \frac{b}{cx+d}$;
  ii) funções definidas por dois ou mais ramos (cujo domínio é um intervalo ou união de intervalos).
- Uso da calculadora para uma aproximação experimental da noção de limite, de $-\infty$ e $+\infty$.
- Referência à hipérbole, informação das suas principais propriedades e da sua importância histórica.
- Operações com funções (soma, diferença, produto, quociente, composição) num contexto do estudo de funções racionais envolvendo polinómios do 2º e 3º grau.
- Resolução de problemas envolvendo as funções anteriores e as estudadas em anos anteriores, tanto sob os aspectos analíticos como numéricos e gráficos.

Indicações Metodológicas

Valem aqui indicações metodológicas semelhantes às dadas para o Tema II - Funções e Gráficos do 10º ano, pelo que não serão repetidas.

No estudo das propriedades das funções os alunos devem ser obrigados a utilizar uma linguagem cada vez mais precisa.

A noção de limite deve ser utilizada de forma intuitiva (incluindo a de limite lateral esquerdo e direito); será formalizada mais tarde. Neste contexto devem ser introduzidos os símbolos $+\infty$ e $-\infty$, devendo chamar-se a atenção para o facto de não serem números reais, mas apenas símbolos com um significado preciso.

Retomando os conhecimentos de polinómios, o aluno deverá ser capaz de transformar expressões como $\frac{x^2+2}{x+1}$ em $x-1+\frac{3}{x+1}$ ou $\frac{x+3}{x+1}$ em $1+\frac{2}{x+1}$ e observar que, do ponto de vista computacional, normalmente se ganha em precisão, pois se efectua um número mais reduzido de operações. Por outro lado esta simplificação permite que se estude o comportamento no infinito sem necessidade de recorrer ao gráfico. Os alunos devem usar este processo e o gráfico para lá chegar e em seguida verificar pelo outro processo. Os alunos devem poder concluir intuitivamente o limite no infinito de uma função racional.

As operações com fracções racionais são abordadas em apoio das operações com funções.

A resolução de equações e inequações fraccionárias apenas deve aparecer num contexto de resolução de problemas, por exemplo. ligados ao estudo de gráficos ou de modelação matemática.

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
• Noção de taxa média de variação: cálculo da taxa média de variação. Noção de taxa de variação; obtenção da taxa de variação (valor para que tende a t.m.v. quando a amplitude do intervalo tende para zero) em casos simples. Cálculo aproximado da taxa de variação. Exemplos concretos, e em particular, envolvendo velocidades e acelerações.	Para calcular derivadas de funções simples, não é necessário invocar questões especiais sobre limites, basta recorrer à noção intuitiva.
• Interpretação geométrica da taxa de variação; definição de derivada (recorrendo à noção intuitiva de limite).	
• Constatação, por argumentos geométricos, de que: i) se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente e se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente; ii) se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto então a derivada é nula nesse ponto (análise dos casos x^3 e $\lvert x\rvert$).	
• Determinação da derivada em casos simples (função afim, funções polinomiais do 2º e 3º grau, função racional do 1º grau, função módulo)	
• Resolução de problemas envolvendo derivadas num contexto de aplicações.	
• Operações com funções: inversão. Funções com radicais quadráticos ou cúbicos. Operações com radicais quadráticos e cúbicos e com potências de expoente fraccionário. Simplificações de expressões com radicais (não incluindo a racionalização)	No caso da função inversa os alunos devem analisar os casos em que será possível inverter uma função (poderá ser introduzida a noção de injectividade, apenas como noção auxiliar) e devem constatar a relação entre os gráficos de uma função e da sua inversa. Será necessário introduzir a noção de raiz índice n. Tal deverá ser feito de forma algébrica. Só depois se falará na função inversa da função potência. Grau de dificuldade a não ultrapassar: $\sqrt{x+3}$, $\sqrt[3]{x+4}$
• Uma aplicação das operações com radicais: obtenção da equação da elipse a partir da sua propriedade focal.	

11º ANO

Tema III - Sucessões (20 aulas)

A resolução de problemas permite chegar ao conceito de sucessão, aceder à compreensão de propriedades importantes de sucessões particulares e particularmente úteis, bem como à necessidade e elaboração de representações formalizadas. Este assunto permite também, com facilidade e vantagens, a utilização intensiva de calculadoras. E permite exercícios de comunicação (pela fala e pela composição escrita). As propriedades das progressões e outras sucessões definidas por recorrência justificam a aprendizagem do método de indução matemática.

Pré-Requisitos:
Os estudantes precisam de deter capacidades de cálculo elementares e devem dominar o conceito de função.

Desenvolvimento

Introdução ao conceito de sucessão

- A sucessão real como função real de variável natural.
- Sucessões monótonas.
- Sucessões limitadas
- Casos particulares das progressões aritméticas e geométricas:
- Termo geral, soma de n termos consecutivos.
- Estudo intuitivo da sucessão de termo geral $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ num contexto de modelação matemática; primeira definição do número *e*.

Indicações Metodológicas

As sucessões devem aparecer como uma forma de organizar possíveis resoluções para situações problemáticas que são apresentadas, com base em aspectos da realidade (social) e em aspectos do estudo das diversas ciências (Matemática incluída). O estudo das sucessões pode e deve servir para evidenciar conexões entre a matemática e as outras disciplinas: a introdução do conceito de sucessão e das suas propriedades pode ser feita introduzindo vários problemas, de tipo geométrico tal como vêm propostos no articulado do actual programa. Outros exemplos sugestivos podem versar assuntos diversos: da geometria —por exemplo, comprimento da espiral construída a partir de quartos de circunferências; da economia — por exemplo, problemas com empréstimos ou depósitos bancários com juros sobre um capital constante (ou variável); da biologia — por exemplo, calculo do número de elementos de uma população considerado um determinado modo de reprodução de cada elemento,...

O estudo das sucessões como funções de variável natural deve ser feito só depois de terem sido construídos vários exemplos/modelos. Mas a escrita de expressões para os termos gerais das sucessões deve ser procurada como forma de representar as situações que se vão descrevendo. Do mesmo modo se devem introduzir as noções de termo, de ordem, ou até de razão, etc

O estudo da monotonia, minorantes, majorantes, etc deve ser feito à medida que vão aparecendo como aspectos a considerar durante a resolução dos diferentes problemas. Do mesmo modo, devem ser abordadas as propriedades de certas sucessões (progressões).

Estes problemas devem ainda servir para introduzir a definição por recorrência, para casos simples.

Os estudantes podem utilizar livremente a calculadora para procurar responder aos problemas que lhes são propostos e devem procurar formas próprias de organização e expressão para a modelação das situações. O professor deve explorar o uso da calculadora e deve ajudar a construir tabelas, a desenhar e a interpretar gráficos. Só depois de serem experimentadas variadas redacções, devem ser introduzidas as redacções simbólicas consagradas. As redacções simbólicas devem então ser testadas com exercícios rápidos.

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas

Desenvolvimento

Limites

- Infinitamente grandes e infinitamente pequenos.

  Definição e resultados para classificação por comparação com sucessões conhecidas.

  Operações sobre infinitamente grandes e infinitésimos.
- Limites de sucessões e convergência.

  Noção de limite real.

  Ilustração de alguns resultados que justifiquem a unicidade do limite e sobre limites de sucessões convergentes obtidas a partir de outras mais simples igualmente convergentes.

  A convergência das sucessões monótonas e limitadas.

  Exemplos de sucessões monótonas não convergentes.

  Exemplos de sucessões limitadas não convergentes.

  Resultados e determinação de limites por comparação de sucessões.

  Problemas de limites com progressões .

(*) Estudo de casos simples de caos usando sucessões definidas por recorrência

Indicações Metodológicas

Depois de se terem introduzido as noções de sucessão como função de variável natural, de ordem, de termo geral, etc. podem apresentar-se exemplos de sucessões definidas pelo seu termo geral e, utilizando a calculadora gráfica, através de cálculos e representações gráficas de sequências de termos chegar aos conceitos de infinitamente grande, de infinitamente pequeno, de limite de uma sucessão. Cada definição deve ser suportada por exemplos e contra-exemplos que esclareçam as ideias imediatas e corrijam eventuais concepções alternativas e erradas. Deste modo, os estudantes ganham confiança nos seus próprios saberes e compreendem as novas aquisições como complementares e facilitadoras, aprofundamentos das suas competências para dar respostas a situações cada vez mais complexas.

As definições são estabelecidas em linguagem corrente seguindo as conclusões a tirar de cada exemplo e contra-exemplo.

Após cada redacção em linguagem corrente deve ser estabelecida uma redacção em simbologia matemática e devem então ser aplicados exercícios rápidos em que as definições simbólicas sejam testadas.

12º ANO

Tema I - Probabilidades e Combinatória (36 aulas)

As probabilidades fornecem conceitos e métodos para estudar casos de incerteza e para interpretar previsões baseadas na incerteza. Este estudo, que pode ser em grande parte experimental, fornece uma base conceptual que capacita para interpretar, de forma crítica , toda a comunicação que utiliza a linguagem das probabilidades, bem como a linguagem estatística.

As técnicas de contagem que aqui aparecem como auxiliar do cálculo de probabilidades constituem uma aprendizagem significativa por si só, especialmente se desenvolverem mais as capacidades do raciocínio combinatório e as conexões matemáticas e menos a aplicação das fórmulas.

Considera-se ainda que o tema das Probabilidades constitui uma boa oportunidade para a introdução de uma axiomática, uma das formas de organizar uma teoria matemática .

Finalmente, qualquer destes assuntos é bom para prosseguir objectivos de trabalho em aspectos da História da Matemática.

Pré-Requisitos:
Noções elementares sobre conjuntos, Probabilidades do 3º Ciclo do Ensino Básico.

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
Introdução ao cálculo de Probabilidades: • Experiência aleatória; conjunto de resultados; acontecimento como subconjunto. • Operações sobre acontecimentos. • Acontecimento elementar; acontecimento certo, impossível; acontecimentos contrário e incompatíveis. • Lei dos grandes números • Conceito frequencista de probabilidade; Propriedades • Cálculo de probabilidades pela Lei de Laplace **Distribuição de frequências relativas e distribuição de probabilidades** • Média, desvio padrão • Representação gráfica: referência à curva de Gauss e a caracteres que se distribuem normalmente	Todo o trabalho deve iniciar-se pela realização de experiências aleatórias (frequências relativas e probabilidades). Os estudantes devem ser levados a elaborar formas de registo "legíveis" para os resultados das suas experiências que podem ser partilhadas em grupo. As experiências e o estudo de situações (em particular dos jogos) devem ser aproveitadas para dinamizar discussões de tipo científico, bem como o trabalho cooperativo.
Definição axiomática de Probabilidade (caso finito) e propriedades elementares • Definição de probabilidade condicionada. e sua verificação da axiomática das probabilidades	A axiomática das Probabilidades pode ser obtida pela intuição a partir das conclusões que se forem tirando das experiências e de outros exemplos apresentados. A axiomática, por ser curta , permite alguns exercícios de verificação simples capazes de motivar a apropriação da utilidade deste tipo de abordagem matemática.

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
Combinatória • Técnicas de contagem. • Permutações. Arranjos com e sem repetição. • Partes de um conjunto e combinações sem repetição; propriedades. Triângulo de Pascal. • Binómio de Newton.	No caso das contagens que sejam facilitados por raciocínios combinatórios, os alunos devem começar por contar os elementos um a um, utilizando exemplos (desde os mais simples até aos complicados), até que reconheçam a utilidade dos diagramas e depois das organizações simplificadoras. Os exemplos de conjuntos para a contagem devem surgir de situações problemáticas que lhes forem sendo propostas. Mesmo o triângulo de Pascal deve ser introduzido a partir de problemas. Muitos problemas postos podem e devem resultar da análise de jogos conhecidos. As propriedades devem ser acedidas por meio de raciocínios combinatórios, mas não deve ser desprezada a ideia de, caso seja possível, introduzir conexões matemáticas - com métodos recursivos e fazendo alguma demonstração por indução matemática. Pascal, Tartaglia e Laplace são exemplos "interessantes" para realizar incursões na história dos conceitos matemáticos, na vida dos matemáticos, nas ligações da Matemática com outros ramos de saber e actividade. Deve ser referido que muitos resultados de contagens já eram conhecidos anteriormente noutras civilizações (o triângulo de Pascal era conhecido na China vários séculos antes de Pascal)
Aplicações ao cálculo de Probabilidades • Acontecimentos independentes. (*) O problema das provas repetidas e referência à lei binomial de probabilidade	Pretende-se que o aluno trate agora com rigor os conceitos anteriormente estudados de forma primordialmente intuitiva.

12º ANO

Tema II - Introdução ao Cálculo Diferencial II (36 aulas)

Aqui são estudados de forma mais rigorosa conceitos já utilizados antes de forma intuitiva: limite, continuidade e derivada.
O estudo das funções é ampliado com as funções exponencial e logarítmica.

Pré-Requisitos:
Tema II - Funções e Gráficos do 10º ano. Tema II - Introdução ao Cálculo Diferencial I do 11º ano.

Desenvolvimento

- Função exponencial de base superior a um.
- Crescimento exponencial. Estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = a^x$ com $a > 1$.
- Função logarítmica de base superior a um.
- Estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = log_a x$ com a > 1.
- Regras operatórias de exponenciais e logaritmos.
- Aplicações concretas de exponenciais e logaritmos.
- Limite de função segundo Heine. Propriedades operatórias sobre limites (informação); limites notáveis (informação). Indeterminações. Assímptotas. Continuidade.
- Teorema de Bolzano-Cauchy (informação) e aplicações numéricas.
- Funções deriváveis. Regras de derivação (demonstração da regra da soma e do produto; informação das restantes regras). Derivadas de funções elementares (informação baseada em intuição numérica e gráfica). Segunda definição do número e. Teorema da derivada da função composta (informação).
- Segundas derivadas e concavidade (informação baseada em intuição geométrica).

Indicações Metodológicas

As indeterminações são referidas apenas para mostrar as limitações dos teoremas operatórios. Apenas se devem levantar as indeterminações em casos simples. Dificuldade a não exceder:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4-2x+1}{x^2+3};\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right);\quad \lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$$

Os alunos devem experimentar numérica e graficamente a relação entre os limites no infinito da exponencial, da potência e dos logaritmos.

Derivada da função composta: grau de dificuldade a não ultrapassar *f(ax), f(x+b), f(x^k)*

Em todos os teoremas se deve analisar a necessidade das condições do enunciado através de contra-exemplos.

Deve ser adoptada a definição: f é derivável quando a derivada existe (isto é, é um número real); limites infinitos não existem, +∞ e -∞ não devem nunca ser considerados como números reais.

e é o único número real tal que $\left(e^x\right)' = e^x$.

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
• Estudo de funções em casos simples.	Dificuldade a não ultrapassar: $f(x)=2^{-x}+2^{x}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{2x+1}$, $f(x)=\dfrac{x}{1-\log x}$
• Integração do estudo do Cálculo Diferencial num contexto histórico.	Os alunos poderão realizar trabalhos individuais ou em grupo de História do Cálculo Diferencial referindo o trabalho de alguns matemáticos como Fermat, Newton, Leibniz, Berkeley, Anastácio da Cunha, Bolzano, Cauchy, etc. Uma referência obrigatória é a de José Anastácio da Cunha; com esse pretexto referir um pouco de história da Matemática em Portugal desde o tempo dos descobrimentos até à actualidade.
• Problemas de optimização.	Os problemas de optimização devem ser escolhidos de uma forma a que um aluno trabalhe de uma forma tão completa quanto possível a modelação. É uma boa oportunidade para discutir com os alunos o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual.
(*) Demonstração de alguns teoremas elementares do cálculo diferencial.	(*) Os teoremas a demonstrar devem incluir: continuidade implica limitação numa vizinhança; continuidade e $f(x_0)\neq 0$ implicam permanência de sinal numa vizinhança de x_0; derivabilidade implica continuidade; derivada da potência inteira e racional e do quociente.

12º ANO

TEMA III - Trigonometria e Números Complexos (20 aulas)

Com pretexto de responder a problemas de resolubilidade algébrica amplia-se o conceito de número. As operações com números complexos, nas formas algébrica e trigonométrica são aproveitadas para apropriar diferentes representações analíticas para domínios definidos geometricamente, bem como para apropriar relações entre operações algébricas e transformações geométricas. O estudante precisa dos conhecimentos de Geometria Analítica , em geral, e da Trigonometria e $\mathbb{R}$, e precisa de saber resolver equações e inequações dos 1° e 2° graus.

Pré-Requisitos: Trigonometria do Tema I - Geometria no Plano e no Espaço do 11° ano.

Desenvolvimento

Funções seno, co-seno, tangente.

- Estudo intuitivo tanto a partir de um gráfico particular, como usando calculadora gráfica de: domínio, contradomínio, período, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assímptotas, limites nos ramos infinitos.
- Estudo intuitivo de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$. Cálculo das derivadas do seno e co-seno.

Complexos

- Introdução elementar de problemas de resolubilidade algébrica e do modo como se foram considerando novos números. Apropriação de um modo de desenvolvimento da Matemática, através da evolução do conceito fundamental de número. Experimentação da necessidade de *i*, à semelhança da aceitação da necessidade dos números negativos e "partidos".
- Números complexos. O número *i*. O conjunto C dos números complexos.
- A forma algébrica dos complexos. Operações com complexos na forma algébrica.
- Representação de complexos na forma trigonométrica. Escrita de complexos nas duas formas, passando de uma para outra. Operações com complexos na forma trigonométrica. Interpretações geométricas das operações.
- Domínios planos e condições em variável complexa.

(*) Demonstração de proprieda-des de Geometria usando números complexos

Indicações Metodológicas

As derivadas do seno e do co-seno devem ser obtidas a partir das fórmulas do seno e do co-seno da soma e de que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$.

A introdução dos complexos deve ser ancorada em pequena abordagem histórica, do ponto de vista dos problemas/escolhos que foram aparecendo no desenvolvimento dos estudos matemáticos. Os estudantes podem realizar trabalhos sobre a extensão do conceito de número e sobre problemas de resolubilidade algébrica, quer do ponto de vista histórico, quer do ponto de vista da sua experiência com anteriores desenvolvimentos.

Será interessante a referência à impossibilidade da extensão a C de uma ordenação compatível com a adição e a multiplicação.

As operações com complexos podem ser definidas na base da manutenção das propriedades das operações e do quadrado de *i* ser *-1*. De modo intuitivo deve ser introduzido o |z|, estendendo a noção de valor absoluto de um real (distância de dois pontos no eixo, distância de dois pontos no plano cartesiano)

A passagem à forma trigonométrica pode ser feita com referência a outros sistemas de coordenadas.

Devem ser exploradas a multiplicação por *i* e as diversas operações ligadas a outras realidades matemáticas - vectores, operações com vectores, transformações geométricas.

A resolução e a interpretação das soluções de condições em *z*, devem ajudar a compreender a utilidade dos diversos sistemas de representação analítica.

Tema Geral

O tema "Lógica e Raciocínio Matemático" aparece como "Tema Geral", lateralmente ao corpo do programa, pois não se pretende que constitua em si mesmo um conteúdo do programa de ensino; contudo a sua abordagem é indispensável para a formação secundária em Matemática. Os diversos itens deste tema são obrigatoriamente tratados ao longo dos três anos. No corpo do programa são feitas algumas sugestões para as oportunidades da abordagem destes temas, mas cabe ao professor, consideradas a maturidade dos alunos e as condições das turmas, decidir quando e onde deve fazer a abordagem proposta.

Lógica e Raciocínio Matemático

A aprendizagem matemática dos alunos passa por fases intuitivas e informais, mas, desde muito cedo, mesmo estas não podem deixar de ser rigorosas ou desprovidas de demonstrações correctas, bem como não podem passar sem um mínimo de linguagem simbólica. Na aprendizagem da matemática elementar dos ensinos básico e secundário são absolutamente necessárias as demonstrações matemáticas, mas estas não podem confundir-se com demonstrações formalizadas (no sentido de deduções formais em teorias formais). Neste capítulo, chama-se a atenção para alguns assuntos que, não constituindo em si mesmos conteúdos do programa, são alguma da essência de muitos passos da aprendizagem de diversos assuntos e constituem elementos que ajudam os estudantes a compreender demonstrações e a racionalizar os desenvolvimentos desta ou daquela teoria. Como se pode ver pelo corpo do programa, não se pretende que a matemática ou matemáticas sejam introduzidas axiomaticamente, mas pretende-se que os estudantes fiquem com a ideia de que as teorias matemáticas são estruturadas dedutivamente. Defende-se que os conceitos fundamentais e as suas propriedades básicas sejam motivados intuitivamente, mas defende-se que os alunos possam trabalhá-los até chegarem a formulações matemáticas precisas, sem que, em algum momento, se confunda o grau de precisão de um conceito matemático com qualquer grau de "simbolização". Um conceito matemático pode estar completa e rigorosamente compreendido expresso em língua natural ou em linguagem matemática ordinária que é uma mistura de linguagem natural, simbologia lógica e matemática. A escrita simbólica das proposições matemáticas há-de aparecer, se possível naturalmente, para efeitos de precisão, condensação e economia, clareza de exposição.

Desenvolvimento

- Noções de lógica
- Operações com condições e operações com conjuntos.
- Implicação formal e inclusão: transitividade. Lei da conversão.
- Primeiras leis de De Morgan. Quantificadores.
- Noção de teorema: hipótese, tese e demonstração.
- Métodos de demonstração: método analítico, método sintético, método de redução ao absurdo, indução matemática. Contra-exemplos.

Indicações Metodológicas

Todas as noções de lógica e teoria de conjuntos devem ser introduzidas à medida que vão sendo precisas ou recorrendo a exemplos concretos de matéria usada: resolução de equações e inequações, propriedades dos módulos, propriedades das funções, axiomática das probabilidades.

Muitos pequenos exemplos ligados ao trabalho com $\mathbb{R}$ e suas propriedades podem servir como exemplos de esclarecimento de alguma operação lógica.

No que diz respeito aos métodos de demonstração, eles devem ser referidos à medida que vão sendo usados ou após os alunos terem já utilizado os vários métodos em pequenas demonstrações informais (mesmo para confirmar as suas resoluções de problemas). Não estão sugeridos explicitamente no corpo do programa, mas todo o estudo da Geometria Analítica se baseia numa geometria sintética euclidiana, semi-intuitiva, semi-dedutiva em que se procuram explorar intuições espaciais e habilidades dedutivas. O hábito de pensar correctamente, que é o que afinal está em causa, deve ser acompanhado do hábito de argumentar oralmente ou por escrito e, sempre que possível, os alunos devem realizar exercícios metodológicos de descoberta de justificações (que não são mais do que novos problemas, por vezes dentro de outros problemas cuja resolução carece de ser comprovada). A indução matemática, como método de demonstração, deve aparecer individualizada como exemplo particular do raciocínio dedutivo (quer para provar propriedades de sucessões, quer para provar propriedades combinatórias, se houver tempo).

Desenvolvimento	Indicações Metodológicas
• Reflexão sobre as heurísticas de Polya para a resolução de problemas.	A organização da heurística de Polya (de Guzmán, ou outra) para a resolução de problemas deve aparecer aos alunos após a resolução de vários problemas (abstractos, por exemplo com conjuntos, ou envolvendo aplicações) e depois dos alunos discutirem os procedimentos usados. Elas servirão como pano de fundo organizacional do pensamento para atacar os problemas, de modo a que os alunos não esqueçam qualquer fase importante. É importante que os estudantes se apercebam da necessidade de um plano, e que, sem que eles abandonem a criação dos seus próprios estilos de organização e a experiência já existente, compreendam que o conhecimento destas heurísticas vai permitir melhorá-los. Estas organizações de pensamento são úteis para todos os aspectos da vida e não só para a Matemática. A introdução e o desenvolvimento destes temas é facilitador do "desenvolvimento da linguagem e do simbolismo para comunicar ideias matemáticas" de modo que os alunos "reflictam sobre, e clarifiquem, o seu pensamento matemático no que diz respeito às noções e relações matemáticas, formulem definições matemáticas e exprimam generalizações descobertas através de investigações, exprimam as noções matemáticas oralmente e por escrito, ... façam perguntas de clarificação e de desenvolvimento relacionadas com assuntos matemáticos que leram ou ouviram falar e apreciem a economia, o poder e a elegância da notação matemática bem como o seu papel no desenvolvimento das ideias matemáticas." Estamos em crer que estes temas, incluídos em experiências variadas, são facilitadores de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, pelas oportunidades de formular e testar conjecturas e analisar contra-exemplos, de avaliar a validade de raciocínios e de construir demonstrações.
• O processo de modelação matemática.	Finalmente, quando for oportuno (as probabilidades e a estatística são temas e momentos apropriados na falta de outros momentos) devem ser abordadas as diferenças entre raciocínio plausível e raciocínio demonstrativo, ao mesmo tempo que se abordam os diversos tipos de evidência científica. Estas abordagens constituem bases seguras para criar um espírito crítico construtivo capaz de destrinçar a qualidade relativa de cada uma das informações que o aluno recebe. Deve ser discutido com os alunos o processo de modelação matemática e a sua importância no mundo actual. Este tema deverá ser abordado o mais tardar a propósito dos problemas de optimização no 12º ano.

Para a elaboração deste novo programa de Matemática do Ensino Secundário, o Departamento do Ensino Secundário nomeou uma Equipa Técnica que iniciou um processo de análise da situação e discussão com todos os interessados. Desse processo resultou a necessidade de complementar o texto do programa propriamente dito com outros textos que dessem visibilidade à concepção e ideias que lhe serviram de base, bem como a esclarecer alguns aspectos metodológicos que, por serem novos, podem levantar justificadas dúvidas e podem e devem merecer variadas interpretações e diversas realizações na prática lectiva.

Os textos são apresentados pela ordem que se segue:

- I - Exemplos ilustrativos e bibliografia
- II - Um possível exemplo de calendarização
- III - "Normas Gerais" (Sebastião e Silva)
- IV - Historial da construção do programa

O primeiro anexo pretende apresentar algumas possíveis concretizações práticas dos tópicos do programa que possam colocar mais problemas aos professores.

O segundo anexo apresenta uma possível distribuição dos diversos tópicos por um total previsível de 92 horas de ensino em cada ano.

O terceiro recorda as "Normas Gerais" para o Ensino da Matemática do matemático e pedagogo José Sebastião e Silva (1914-1972) que, apesar de terem sido escritas há 30 anos, permanecem actuais e devem constituir orientação para a prática escolar.

O quarto anexo relata sucintamente o processo de elaboração deste programa e explica algumas das opções tomadas e as suas limitações, assim como clarifica várias questões relacionadas com a prática lectiva (como o cumprimento do programa, o apoio pedagógico acrescido ou os temas facultativos).

ANEXOS

ANEXO I

Exemplos ilustrativos e referências bibliográficas relativas aos temas a leccionar

Os exemplos e referências seguintes são meramente indicativos e de modo nenhum de tratamento obrigatório; apenas pretendem ilustrar de uma forma concreta o indicado no Programa e fornecer aos professores ideias que possam usar na sala de aula, ou que possam servir de base ao desenvolvimento dos seus próprios materiais. É importante que os alunos trabalhem também a Matemática fora da sala de aula, pelo que algumas propostas poderão ser aproveitadas também para trabalho em casa ou trabalho da Área-Escola.

Os exemplos e referências apresentados não pretendem de modo algum cobrir exaustivamente o programa. Também as referências bibliográficas (de onde foram extraídos ou adaptados muitos dos exemplos) são meramente indicativas; a bibliografia existente é muitíssimo mais vasta e deverá servir de base ao trabalho do professor (sem esquecer naturalmente as publicações de associações de professores e sociedades científicas portuguesas e estrangeiras).

Além do mais, a exploração que aqui é feita das referências bibliográficas listadas no fim não é exaustiva, pelo que nos mesmos textos aí citados poderão ser encontrados outros exemplos e propostas igualmente interessantes.

10º ANO

Tema I - **Geometria no plano e no espaço I**

- Resolução de problemas de Geometria Elementar.

Eis **alguns exemplos** que os professores podem apresentar aos alunos nesta primeira abordagem da Geometria com a intenção nalguns casos que o mesmo problema lhes sirva para introduzir novos conteúdos. Há também intenção de mostrar ao aluno processos diferentes de resolver o mesmo problema.

Na resposta às questões não se pede que o aluno faça demonstrações formais mas que justifique sempre oralmente e por escrito apoiado nos seus conhecimentos de Geometria plana e na visualização do espaço.

Observações gerais: *Recomenda-se a leitura das revistas "Educação e Matemática" nº 26, pg. 23 a 26 e nº 32, pg. 21 a 25, e do livro "Normas para o currículo e a Avaliação em Matemática Escolar - Geometria a partir de múltiplas perspectivas" (ed. APM/IIE). Alguns dos exemplos referidos foram retirados da publicação da A.P.M.E.P. "Classe de seconde: Un outil pour des changements" e de (Guzmán, Colera, & Salvador, 1989). Ver ainda muitas ideias de exemplos e explorações no inovador livro (Cuoco, Mark, & Goldenberg, 1994) que liga a Geometria com outras áreas da matemática e da experiência do aluno, assim como nos outros livros da mesma série "Connected Geometry".*

Exemplo 1: **Poliedros regulares.**

O professor poderá começar a unidade pelo estudo dos poliedros regulares, das suas regularidades e relações acompanhando as actividades de notas históricas sempre que for oportuno.

Poderá propor aos alunos uma actividade que lhes permita investigar e justificar o número de poliedros regulares que existem. Esta actividade permitirá ainda recordar as propriedades de alguns polígonos regulares. O professor pode recorrer a modelos geométricos: peças de plástico que se encaixam (Polydron, por exemplo, à venda no mercado), ou peças em cartão que o professor e os alunos podem fazer.

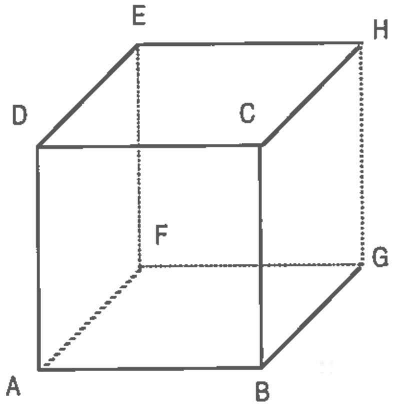
O professor pode também estudar relações entre poliedros — poliedros conjugados ou duais — e relações entre volumes de poliedros.

Exemplo 2: **Cortes num cubo.**

Podem ser estudados os cortes planos no cubo e as secções determinadas por eles. Inicialmente os alunos devem recorrer a modelos e só depois passar ao desenho das secções em perspectiva. A justificação (recorrendo a critérios e propriedades) deve surgir naturalmente do estudo com os modelos em diálogo com o professor e com os colegas em trabalho de grupo. A procura de secções planas de sólidos deve limitar-se a casos simples. A prática com as figuras deve ter um papel central porque ela é decisiva para o conhecimento das noções básicas da geometria euclidiana. Sem partir da axiomática, os alunos podem e devem raciocinar e deduzir.

Exemplo 3: **Mais Cortes num cubo.**

Para responder às questões seguintes utilize, para além do desenho de um cubo em perspectiva, um modelo em cartão ou arestas que deve construir (recorra ainda à observação do paralelepípedo no qual se inscreve a sala de aula).



1. Cite vários planos aos quais pertença A. Cite planos que contenham a recta AB. Há vários planos que contenham A, B e C ?
2. A face [ABGF] determina um plano. Explique porque este plano também se pode designar por (ABG). Cite outras maneiras de designar o plano.
3. Os pontos E, H, A e B estão no mesmo plano? Qual a natureza do quadrilátero [EHBA] ?
4. Qual é a intersecção do plano (BGE) com o plano (ABD) ?
5. Qual é a intersecção do plano (ACG) com as faces do cubo?
6. Cite um plano paralelo ao plano (ABG). Construa a intersecção dos planos (ADG) e (CDE). É verdade que os planos (BDH) e (ABF) têm somente o ponto B em comum? Justifique.
7. Cite rectas paralelas a DE. Cite rectas paralelas a CE. As rectas BD e EH são paralelas? São secantes? E as rectas CF e EG?
8. Em cada um dos casos seguintes diga se a recta e o plano são paralelos ou secantes; se eles se intersectarem defina com precisão o ponto de intersecção:
   - recta CE e plano (ABF);
   - recta BE e plano (ADG);
   - recta EH e plano (ADG);
   - recta DH e plano (ACG).
9. Seja I o ponto médio do segmento [BC]. Construa em seguida a intersecção da recta EI com o plano (ABG). Construa a intersecção dos planos (DEI) e (ABG).
10. Utilizando duas cores represente os planos (BDH) e (AEG). Estes dois planos intersectam o plano (BCE) segundo duas rectas. Faça uma figura representando no plano (BCE) o rectângulo [BCEF] e as duas rectas. Os planos (BDH) e (AEG) são secantes ? São paralelos ?
11. Indique duas rectas perpendiculares a AD. As rectas EC e AG são perpendiculares?
12. As diagonais do cubo são perpendiculares?

Observações: *Esta actividade pode desenvolver-se em trabalho de pequenos grupos. Permite aplicar as regras de base da projecção cavaleira. O aluno deve familiarizar-se com o uso das formulações: "Considere-se... ", " Seja o plano ..."*

O aluno deve fazer uma ficha de síntese das propriedades (re)encontradas na actividade:

-Um plano é definido por três pontos não colineares,
ou também, por uma recta e um ponto que não lhe pertença, ou ainda por duas rectas secantes.

-Uma recta está contida num plano se ...

-Uma recta é paralela a um plano se ...

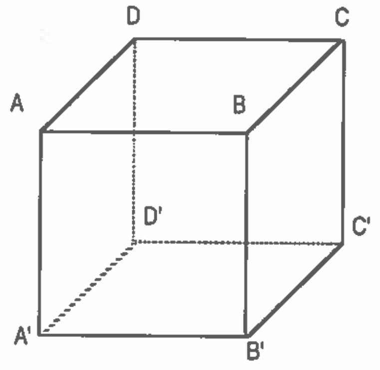
■ Regras da projecção cavaleira

Para representar figuras do espaço o aluno deve utilizar as regras da projecção cavaleira:

** Rectas paralelas são representadas por rectas paralelas;

** As linhas a cheio são as que se vêem directamente; os segmentos escondidos são representados a ponteado ou tracejado;

** Na face [AA'B'B] e [CC'D'D] os elementos da figura são representados em verdadeira grandeza pois as faces encontram-se num plano frontal, na face [ABCD] e [BB´C´C] os ângulos são deformados e as distâncias modificadas;



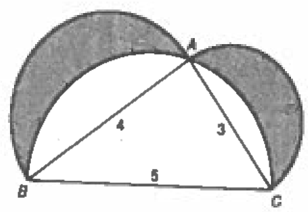
** Rectas concorrentes são representadas por rectas concorrentes;

** Pontos colineares são representados por pontos colineares;

** O ponto médio de um segmento de recta é representado pelo ponto médio do segmento desenhado.

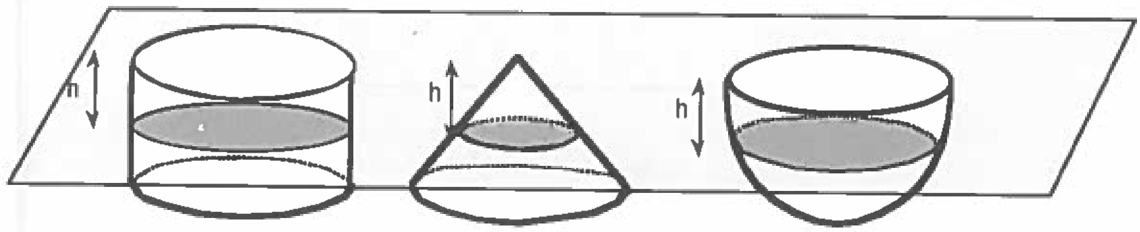
Exemplo 4: **Áreas de círculos sem π.**

O triângulo [ABC] é rectângulo em A. Mostre que a área sombreada é igual à área do triângulo. Pode então concluir que nem sempre aparece π para calcular áreas de figuras em que intervêm círculos.



Exemplo 5: **Figuras de Arquimedes.**

Na figura de Arquimedes



demonstre que ao cortar por um plano paralelo às bases dos sólidos como se indica, resulta que qualquer que seja h

área da secção no cilindro = área da secção no cone + área da secção na semi-esfera.

(Se isto se passa para todas as secções também se passa com os volumes)

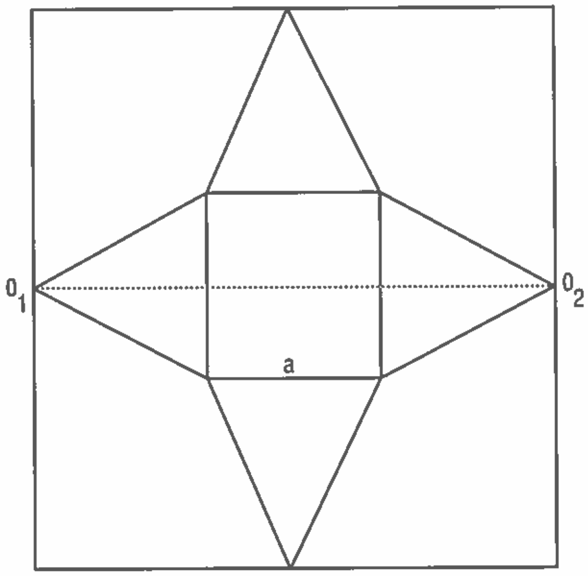
Exemplo 6: **Esculturas geométricas.**

Muitas esculturas são construídas com elementos genuinamente geométricos; são exemplo disso o "*Cubo da Ribeira*" no Porto, e o "*Monumento à auto-estrada*" em Condeixa. Suponhamos que pretendemos planear um monumento a Euclides com a forma de uma pirâmide regular invertida, cuja base seja um quadrado e as outras faces sejam triângulos equiláteros em folha de metal, sendo posteriormente as faces soldadas e pintadas.

Deseja-se que ela seja o maior possível (maior área ou maior volume), mas dispõe-se unicamente de uma folha de metal quadrangular com 6 m de lado.

Propõem-se dois métodos para a sua construção de modo que descubra o mais vantajoso.

Primeiro método:

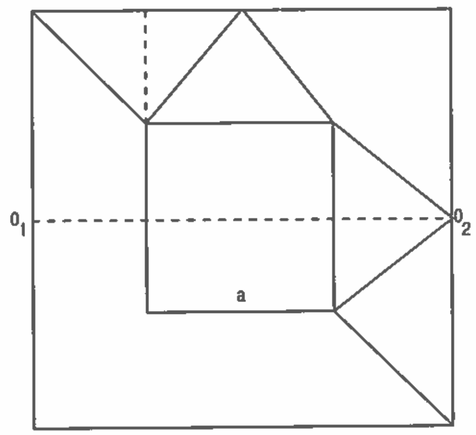


Designe por **a** o lado do quadrado que forma a base da pirâmide. Calcule de duas maneiras diferentes $\overline{O_1O_2}$ e deduza que :

$$6 = \mathbf{a}\left(1+\sqrt{3}\right)$$

Segundo método:

Designe por **a** o lado do quadrado [ABCD]. Calcule de dois modos diferentes $\overline{O_1O_2}$ e deduza que



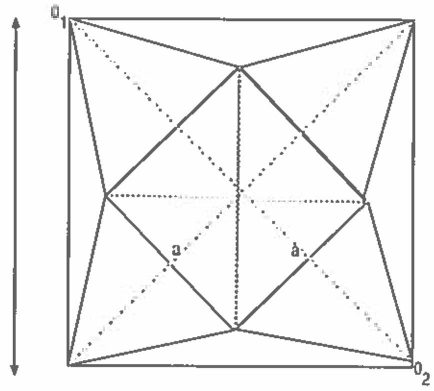
$$6 = \frac{\mathbf{a}}{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$$

Faça as duas construções.

Qual é o método melhor ?

Consegue encontrar um terceiro método ainda melhor ?

Obs.: Uma solução fácil de obter será certamente esta:



Não se pretende que o aluno obtenha o resultado óptimo.

Exemplo 7: Tetraedro e octaedro num cubo.

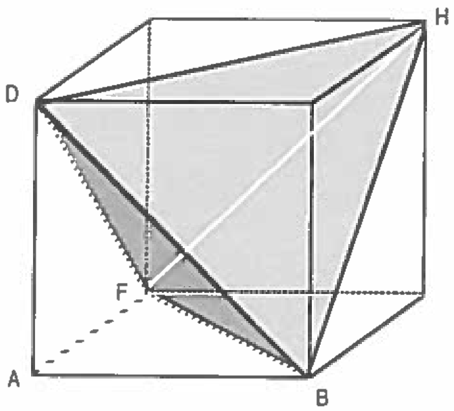
Considere o mesmo cubo do exemplo 3.

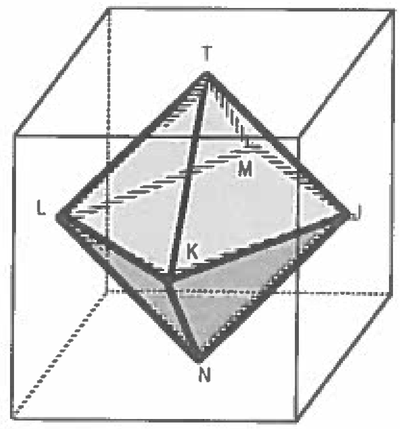
1ª parte

Mostre que [BFDH] é um tetraedro regular. Como são as suas faces?

a) Relacione o volume do tetraedro com o volume do cubo. Calcule o volume do tetraedro em função da aresta **a** do cubo.

b)Calcule o volume do tetraedro em função de $\overline{FB}$ = b.





2ª parte

Sejam T, J, K, M e N os centros das faces do cubo.

a) Prove que [TJKLMN] é um octaedro regular.

b) Seja $\overline{AB}$ = **a**, calcule $\overline{TJ}$ em função de **a**.

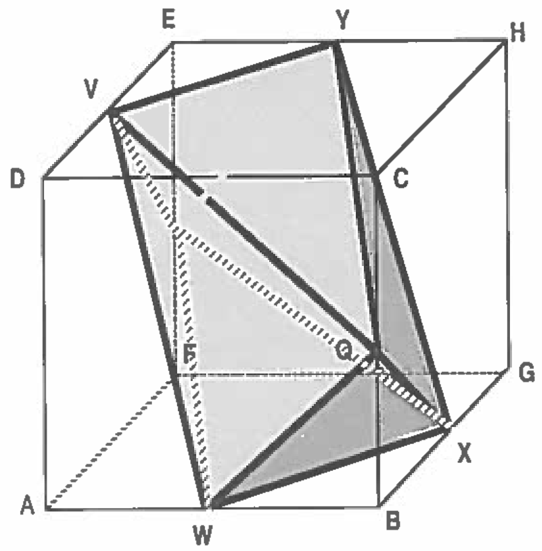
c) Mostre que o quadrilátero [JKLM] é um quadrado e que o plano (JKL) é o plano mediador de [TN]. Seja O o ponto de intersecção de TN com o plano (JKL). Que representa O para o quadrado [JKLM] ?

d) Calcule o volume da pirâmide [IJKLM].

e) Calcule o volume do octaedro regular e compare-o com o volume do cubo.

f) Compare o volume do octaedro com o volume do tetraedro referido na 1ª parte deste exercício.

Observação: *Aqui procuram-se relações entre volumes de figuras semelhantes. O professor pode recorrer à relação entre a razão de semelhança e a razão dos volumes entre figuras semelhantes no espaço para comparar alguns volumes das propostas do exemplo ou de outros semelhantes. Terá para isso que fazer uma rápida extensão dos conhecimentos do aluno sobre as semelhanças no plano. Estes já conhecem as relações entre a razão dos perímetros ou a razão das áreas de figuras semelhantes e razão de semelhança. Este modo de proceder tornará mais rápida a resolução de certos exercícios e é um conhecimento útil em futuras situações.*



3ª parte

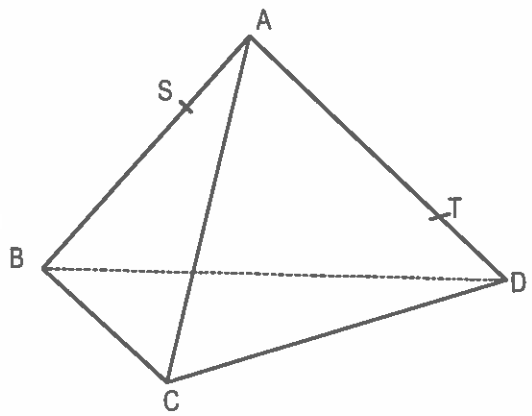
Sendo W, X, Y, V, Q, Z tais que :

$\overline{AW} = \overline{GX} = \overline{HY} = \overline{DV} = \overline{CQ} = \overline{FZ} = x$, como escolher x para que [WXYVQZ] seja um octaedro regular?

Calcule então a medida da sua aresta $\overline{WX}$ em função da medida da aresta do cubo.

Exemplo 8: **Cortes num tetraedro.**

[ABCD] é um tetraedro:



1. S é um ponto qualquer de [AB] e T um ponto de [AD], distintos dos vértices. Pretende-se construir a intersecção dos planos (STC) e (BCD).

a) Supõe-se que ST e BD não são paralelos.

• Mostre que os planos (STC) e (BCD) são secantes.

• Qual é a natureza da sua intersecção?

• Como se pode determinar uma recta no espaço? Indique pelo menos dois modos.

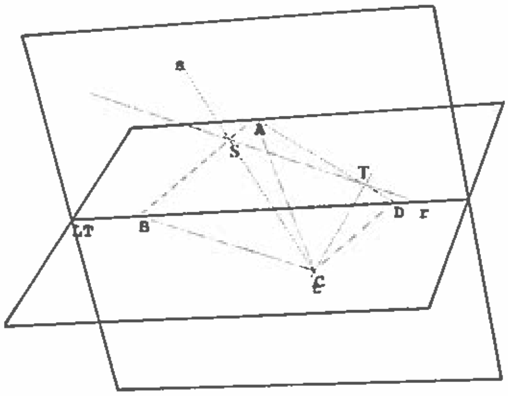
• Cite um ponto da figura que pertença à intersecção.

• Mostre que ST e BD são secantes.

Responda agora ao pedido formulado inicialmente.

b) E se ST e BD forem paralelas ?

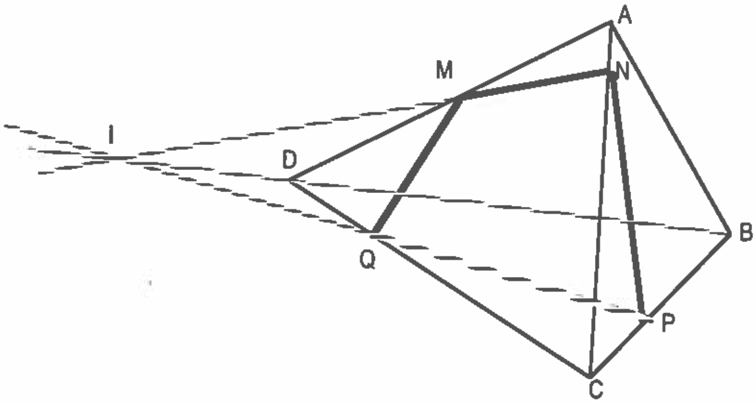
Observação: *as diferentes figuras podem ser simuladas com a ajuda de um programa informático adequado. Por exemplo, o programa GEOMETRIA DESCRITIVA permite visualizar a intersecção dos planos (STC) e (BCD) através da introdução de comandos simples que definem os pontos através das suas coordenadas:*

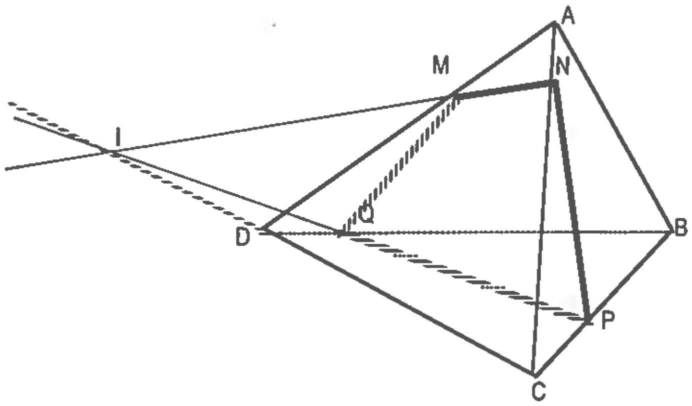


Este programa pode ser obtido através de: Vitor Teodoro, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2825 Monte da Caparica). Está também disponível na Internet no endereço

http://www.depgef.min-edu.pt/edutic/softw3.htm

2. M é um ponto de [AD], N é um ponto de [AC] e P um ponto de [BC]. Pretende-se determinar a intersecção do plano (MNP) com o tetraedro.

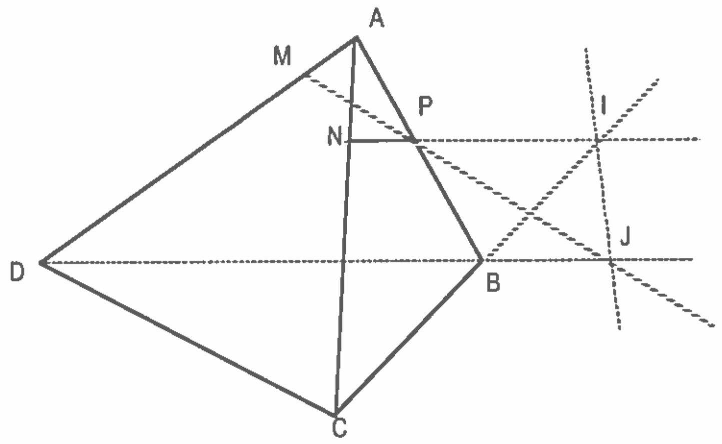




- Eis duas figuras. O que pensa delas ?
- Faça um plano de construção e realize-o.

Observação: *Pretende-se que o aluno faça a construção da intersecção de dois planos recorrendo a um plano auxiliar e construa a intersecção de uma recta e de um plano utilizando duas rectas.*

3.M é um ponto de [AD], N um ponto de [AC] e P um ponto de [AB], distintos dos vértices do tetraedro. Eis uma figura. Observe-a.



A que questão responde?
Redija a demonstração.
As rectas (MN) e (DC) intersectam-se em K. Que pode dizer dos pontos I , J , K ?
Observação: *Procura-se que o aluno saiba ler uma figura e redija uma demonstração.*

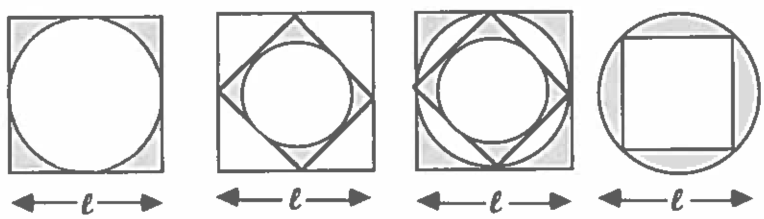
Exemplo 9. **Cálculos em Geometria.**

A resolução de problemas numéricos ligados ao cálculo e comparação de distâncias, áreas e volumes em configurações do plano ou do espaço poderá constituir uma oportunidade de trabalhar com números irracionais ou valores aproximados recorrendo à calculadora. Por exemplo:

a) A medida da diagonal de um quadrado de lado 1 pode motivar o estudo da irracionalidade de $\sqrt{2}$ ... Outros irracionais como π e Φ (número de ouro), que podem ser definidos geometricamente, constituem excelentes temas de consulta para trabalhos individuais ou de grupo.

b) Problemas como a determinação do raio de uma bola conhecido o volume (por exemplo por imersão em água) ou da aresta de um cubo que tenha um volume dado devem ser resolvidos para mostrar a necessidade dos irracionais como medidas de grandezas ou do cálculo de áreas de figuras planas ou das superfícies laterais de sólidos, ou ainda no cálculo de volumes de sólidos.

c) Estes exercícios permitirão trabalhar com valores exactos ou com valores aproximados recorrendo à calculadora e introduzindo as potências de expoente fraccionário. Podem ainda ser tratados problemas geométricos para introduzir o enquadramento da soma e do produto. Um exemplo:
Considerar as figuras seguintes, compostas de círculos e quadrados,



i) Calcular, em cada caso, a área da superfície assinalada em função de ℓ.

ii) Considerando que $\ell = 10$ cm, a menos de 1 mm, e que $3,14 < \pi < 3,15$, enquadrar, para cada caso, a área da parte assinalada.

d) Enquadramentos de números de reais e propriedades das relações de ordem podem ser referidos no contexto do estudo de funções. Quando se estudarem gráficos a partir de fórmulas que devem ser constituídos, de preferência, por partes de rectas, de parábolas, de hipérboles, de parábola cúbica devem ser utilizados os exemplos $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (volume, parábola cúbica) e $T = 2\sqrt{l}$ (período de oscilação, parábola).

Elipse.

Dada a circunferência de equação

$$x^2 + y^2 = r^2$$

uma elipse obtém-se transformando as coordenadas de modo que uma das coordenadas se mantenha invariante e a outra sofra uma transformação afim

$$\begin{cases} X = x \\ Y = ky \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} X = kx \\ Y = y \end{cases}$$

Obtém-se

$$X^2 + \left(\frac{Y}{k}\right)^2 = r^2 \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{X}{k}\right)^2 + Y^2 = r^2$$

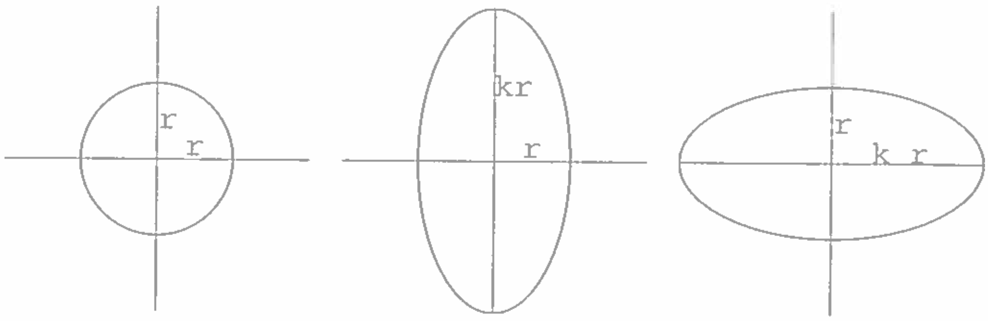
ou ainda

$$X^2 + \frac{Y^2}{k^2} = r^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{X^2}{k^2} + Y^2 = r^2$$

ou ainda

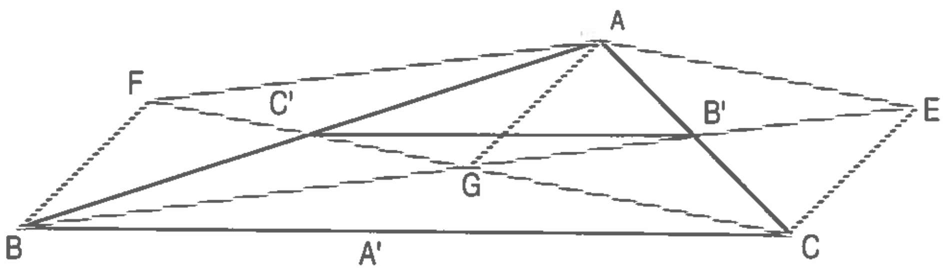
$$\frac{X^2}{r^2} + \frac{Y^2}{(rk)^2} = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{X^2}{(rk)^2} + \frac{Y^2}{r^2} = 1$$

respectivamente. A figura ilustra o caso em que $k > 1$.



Exemplo de uma propriedade dos triângulos que pode ser demonstrada recorrendo ao cálculo vectorial.

Considere o triângulo [ABC] e sejam B´, C´ e A´ os pontos médios dos lados [AC], [AB] e [BC], respectivamente.



a) Mostre que $\overline{C'B'} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}$ e que [C´B´] e [BC] são paralelos.

b) Os segmentos [BB´] e [CC´] intersectam-se em G. Seja F o simétrico de G em relação a C´ e E o simétrico de G em relação a B´.

1º Mostre que os quadriláteros [AGBF], [AGCE] e [AFGE] são paralelogramos.

2º Deduza que :

$\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{GF}$; $\vec{GA} + \vec{GC} = \vec{GE}$; $\vec{GE} + \vec{GF} = \vec{GA}$ então por adição destas igualdades

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}\ .$$

3º Mostre que $\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$ e deduza daí a posição dos três pontos A, G e A´.

4º Mostre que $\overline{AG} = \frac{2}{3}\ \overline{AA'}$.

Precise a posição de G sobre [AA'] .

Ao ponto G chama-se o *centro de gravidade* ou *centro de massa* do triângulo.

• Exemplos de problemas resolvidos segundo vários processos:

Exemplo 1:

Considere o triângulo [ABC] e sejam B´, C´ e A´ os pontos médios dos lados [AC], [AB] e [BC], respectivamente. Mostre que $\overline{C'B'} = \frac{1}{2}\ \overline{BC}$ e que [C´B´] e [BC] são paralelos.

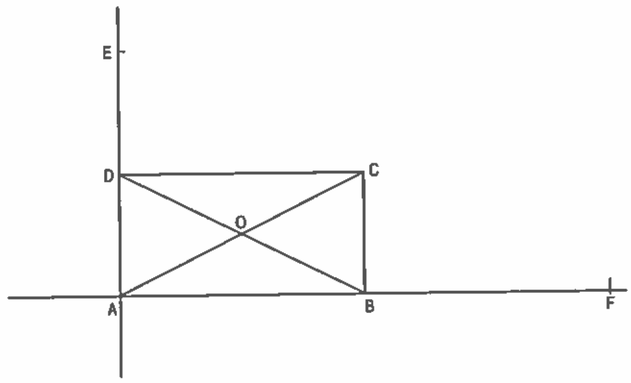
(Para resolver este exercício o aluno pode seguir quatro processos:

1. Usar a semelhança dos triângulos.
2. Ser informado o Teorema de Thales e pedir que o aluno o aplique neste contexto.
3. Usar uma demonstração com vectores.
4. Usar a fórmula do ponto médio de um segmento de recta, usar a formula da distância e depois comparar os declives.)

Exemplo 2:

[ABCD] é um rectângulo tal que $\overline{AB} = 2\ \overline{AD}$. Seja O o centro de [ABCD] , E o simétrico de A em relação a D, F o simétrico de A em relação a B.

Pretende-se mostrar que C é o ponto médio de [EF].



1º processo

Demonstrar que [DCFB] e [DBCE] são paralelogramos.

Deduzir daí que E, C e F são colineares e que C é o ponto médio de [EF].

2º processo

Mostrar que $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\ \overrightarrow{AC}$ e deduzir que C é ponto médio de [EF].

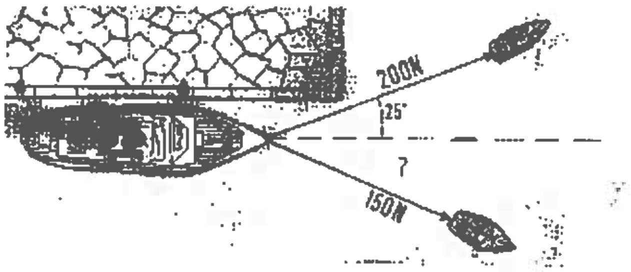
3º processo

.Fazendo $\overline{AD}$ a unidade de comprimento, seja $\vec{i} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB}$, determinem-se as coordenadas dos pontos A, B, C, D, E, F no referencial (A; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Seguidamente mostre-se que C é o ponto médio de [EF].

Exemplo 3: **Movimento de um barco.**

Duas pequenas lanchas ajudam um grande barco a deslocar-se. Uma delas puxa-o com uma força de 200 N enquanto que a outra o puxa com uma força de 150 N.



A primeira toma uma direcção que faz 25° como se assinala na figura. Que direcção deve tomar a outra para que o barco saia paralelamente ao cais ?

Tema II - **Funções e Gráficos**

Definição de função, gráfico e representação gráfica de uma função

Uma introdução informal à noção de função pode ser encontrada no §1 do Cap. IV - "Funções reais de variável real" de (Silva, 1970). Considerações históricas podem ser encontradas em "Evolução Histórica do Conceito de Função: uma possível periodização histórica" em (APM, 1994).

Estudo intuitivo tanto a partir de um gráfico concreto como usando calculadora gráfica de propriedades das funções e dos seus gráficos.

Uma introdução à discussão de gráficos de funções aparece no Tema 13 de (Vizmanos & Anzola, 1994b) e no Tema 6 de (Guzmán, Colera, Bas, Gaztelu, & Oliveira, 1994b). Um estudo da função quadrática aparece no tema 11 "Funciones cuadráticas" de (Guzmán, Colera, Bas, Gaztelu, & Oliveira, 1994a).

Exercícios sobre traçados de gráficos e problemas concretos são os 20, 21, 22, 25, 26a),b),c),d) do cap. IV de (Silva, 1970).

Ver relatos de experiências em "*Calculadoras Gráficas no Estudo das Funções do 10º ano: Relato de uma experiência*" em (APM, 1994) e "Uma experiência com calculadoras gráficas" de António Abrantes em "Educação e Matemática", nº 30, 1994.

Exemplo 1: **Gráficos em papel milimétrico.**

Um capital de 40 contos é posto a render a uma taxa anual de x%. Os juros são adicionados ao capital no fim de cada ano. Seja $C_1(x)$ o capital disponível ao fim de um ano e $C_2(x)$ o capital disponível ao fim de dois anos.

a) Calcule $C_1(5)$ e $C_2(5)$.

b) Indique uma expressão para $C_1(x)$ e para $C_2(x)$.

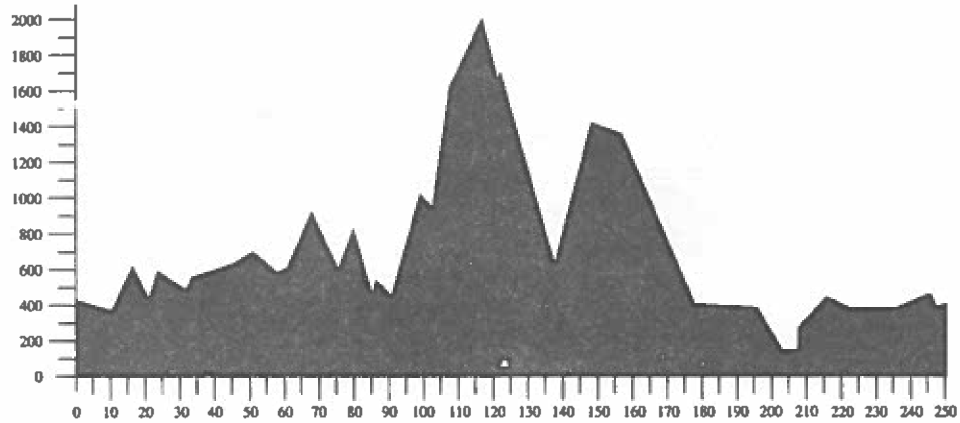
c) Esboce o gráfico de $C_1(x)$ e $C_2(x)$ em papel milimétrico. Descreva o que observa.

d) Para que taxa de juro o capital acumulado ao fim do 2º ano seria de 50 contos?

Exemplo 2: **Volta a Portugal.**

O gráfico seguinte, que apareceu nos jornais relativo a uma etapa da Volta a Portugal em Bicicleta, ilustra a evolução das altitudes ao longo do percurso da etapa.

4ª ETAPA - FUNDÃO - OLIVEIRA DO HOSPITAL - 244,6 KM



Indicar:

a) Que variáveis estão relacionadas por meio desta função?

b) Qual o domínio da função? E o contradomínio?

c) Quais são os máximos? Qual a sua interpretação?

d) Quando cresce? Quando decresce?

e) Em que intervalo(s) cresce mais a função? Em que intervalo(s) diminui mais? Como se observa isso no gráfico?

f) Em que intervalo(s) cresce mais depressa a função? Em que intervalo(s) diminui mais depressa? Como se observa isso no gráfico?

g) A função é contínua. Porquê? O que significaria ser descontínua?

h) Elabora um pequeno relatório onde se incluam as principais características desta função.

Exemplo 3: **Funções monótonas.**

É vantajoso usar também exemplos que ocorram noutras disciplinas. Pode ser pedido, por exemplo, ao aluno que:

a) indique um exemplo (da Física ou de outra disciplina) de uma função crescente.

b) idem para uma função decrescente.

c) idem para uma função não monótona.

Exemplo 4: **Escalas traiçoeiras.**

O aluno deve observar que o simples conhecimento da forma de um gráfico nos dá uma informação limitada (eventualmente enganadora) do comportamento de uma função.

a) Usando uma calculadora gráfica ou um computador, esboçar a função definida por $f(x) = x^2$ no rectângulo de visualização [-5,5]×[0,20].

b) Escolher um outro rectângulo de visualização de modo que o esboço do gráfico de $g(x) = 2x^2$ seja semelhante ao anterior (por exemplo, [-4,4]×[0,20] ou [-5,5]×[0,40] servem).

c) Idem para $g(x) =$ \f(1;2)x^2 (por exemplo, [-7,7]×[0,20] ou [-5,5]×[0,10] servem).

Resolução de problemas envolvendo a expressão de uma variável em função de outra, ou recorrendo a uma representação gráfica.

Ver os problemas 1 a 5, 7 a 12 e 14 a 25 do Tema 14 de (Vizmanos & Anzola, 1994b), relativos a trabalho com gráficos e com aplicações de funções quadráticas. Ver ainda os capítulos 1 e 2 de (Fey & Heid, 1995) onde se podem encontrar inúmeros exemplos de explorações e da ligação deste capítulo com outras áreas da Matemática.

Ver exercícios significativos nas Provas Específicas: prova de reserva 1993, Prova 47, questão 15.

Exemplo: **Economia escolar.**

Em muitas escolas, grupos de professores e alunos realizam actividades para angariar fundos. As receitas obtidas dependem da qualidade da actividade, da publicidade, do preço assim como de outros factores. Se for p o preço de cada item vendido, uma fórmula típica para as receitas obtidas é

$$R(p) = -1000\,p^2 + 7200\,p$$

a) Investigue qual o preço ideal (para que as receitas sejam o maior possível).

Observação: *É conveniente usar diferentes abordagens: papel milimétrico, tabela de valores, esboço gráfico com calculadora ou computador,...*

b) Qual deverá ser o preço de cada item de modo que as receitas sejam de 10000?

c) Quando serão as receitas nulas? Porquê?

d) Esboce diferentes representações do gráfico da função $R(p)$ com diferentes escalas para a variável p ou para a variável R. Parece poder concluir-se coisas diferentes?

Referência à parábola, às suas principais propriedades e à sua importância histórica.

Uma sequência possível: definição da parábola como secção cónica, da parábola como gráfico da função quadrática e da parábola como lugar geométrico; informação da equivalência das três definições; referência à propriedade reflectora da parábola e suas aplicações; referência a Arquimedes e ao uso dos espelhos parabólicos.

Equações e inequações do 2º grau; inequações com um módulo.

Esta parte pode ser tratada através de trabalhos práticos tal como é feito em (Antibi, Barra, Glaymann, & Malaval, 1991). Os trabalhos práticos "Tir à l'arc", pg. 28, "Un problème de train", pg. 40, "En économie", pg. 41, tratam temas aplicados, os trabalhos práticos "En Géométrie", pg. 38, "Dans l'espace", pg. 41, permitem fazer uma ligação com a Geometria e o "Aperçu du second degré à travers le temps", pg. 42, fornece uma perspectiva histórica. Poderão ser usados também exemplos retirados do "Libro de Algebra" de Pedro Nunes (existe ainda à venda na Imprensa Nacional em edição da Academia das Ciências).

Exemplo 1: **Tiro ao Arco.**

Lança-se uma flecha para o céu, num instante que se toma para origem dos tempos. Durante o movimento a altitude $h(t)$ da flecha no instante t é dada por $h(t) = -5t^2 + 20\,t + 2$. Esta altitude é medida a partir do solo. As unidades utilizadas são segundos para o tempo e metros para a altitude.

Problema 1: A flecha atingirá uma altura de 14,8 metros?

Problema 2: A flecha atingirá uma altura de 27 metros?

Problema 3: Qual a altura máxima que a flecha atingirá?

(Aqui basta observar que

$$h(t) = -5\left[(t-2)^2 - \frac{22}{5}\right]$$

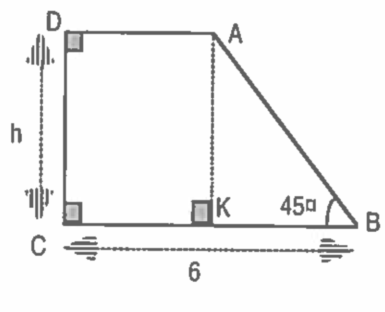
e concluir que o valor máximo será quando $t = 2$ e portanto $h(t) = 22$).

Exemplo 2: **Rectângulos.**

Um rectângulo cujos lados são medidos em metros tem por área 18 m^2. Se diminuirmos os comprimentos em 2 m e se aumentarmos as larguras em 1 m, então obtemos um quadrado. Calcular as dimensões do rectângulo. (Sugestão: designar por x o comprimento, em metros, do lado do quadrado).

Exemplo 3: **Trapézios.**

No desenho seguinte as dimensões são dadas em centímetros.



Pretende-se conhecer a altura h do trapézio [ABCD] para que a sua área seja de 10 cm^2. Para isso:

a) exprimir o comprimento $\overline{KB}$ em função de h;

b) exprimir a área de [ABCD] em função de h;

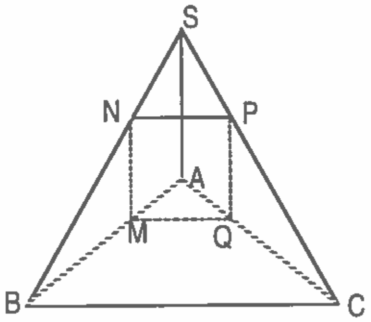
c) calcular h; desenhar, em verdadeira grandeza, o(s) trapézio(s) solução.

Exemplo 4: **Investigação em triângulos rectângulos.**

Podem-se desenhar triângulos rectângulos cujos comprimentos (numa mesma unidade) sejam três números inteiros consecutivos? Quantos triângulos desses haverá?

Exemplo 5: **No espaço.**

A pirâmide [SABC] tem por base um triângulo [ABC] equilátero; além do mais a recta SA é perpendicular ao plano ABC, isto é, os triângulos [SAB] e [SAC] são rectângulos em A.



Em centímetros tem-se que $\overline{AB} = 4$ e $\overline{SA} = 2$. M é um ponto do segmento [AB] tal que $\overline{AM} = x$ com x a variar entre 0 e 2. N é o ponto do segmento [SB] tal que MN//SA, Q é o ponto do segmento [AC] tal que MQ//BC, P é o ponto do segmento [SC] tal que [MNPQ] seja um rectângulo.

a) com a ajuda do teorema de Thales (dar informação) no triângulo [SAB], exprimir $\overline{MN}$ em função de x ;

b) exprimir $\overline{MQ}$ em função de x ;

c) exprimir o comprimento $\overline{NQ}$ de uma diagonal do rectângulo [MNPQ] em função de x ;

d) calcular x para que se tenha $\overline{NQ} = \sqrt{5}$;

e) poderá ser $\overline{NQ} = 3$?

Exemplo 6: **Um problema de comboios.**

Um comboio de mercadorias, um comboio rápido, o Alfa, e um comboio inter-regional, ronceiro, partem respectivamente de Figueira da Foz, Lisboa e Aveiro em direcção a Coimbra, onde chegam todos três às 8h 34m. Os comboios da Figueira da Foz e de Lisboa partem ao mesmo tempo, o de Aveiro parte meia hora depois dos outros. Se o TGV (comboio de grande velocidade) cuja velocidade média é igual à soma das velocidades dos três comboios precedentes, fosse posto em circulação nesta linha, demoraria hora e meia para fazer o trajecto Figueira da Foz - Coimbra - Lisboa (se não contarmos com a paragem em Coimbra). Há 50 km entre Figueira da Foz e Coimbra, 75 entre Aveiro e Coimbra, e 250 entre Lisboa e Coimbra.

a) qual a velocidade média do TGV?

b) Seja v a velocidade média do comboio de mercadorias. Exprimir a velocidade média do Alfa em função de v ;

c) Seja t o tempo que o Alfa leva para chegar a Coimbra e x a velocidade do inter-regional. Provar que se tem:

$$x + 6v = 200 \quad , \quad vt = 50 \quad , \quad x\left(t - \frac{1}{2}\right) = 75$$

d) Encontrar os valores de x, v e t e calcular as horas de partida do comboio de mercadorias, do Alfa e do inter-regional.

(problema extraído da revista "Jeux et Stratégie")

Exemplo 7: **Um problema de Pedro Nunes.**

Dada a soma do lado com a diagonal, e dada a área de um quadrado, cada uma dessas grandezas fica determinada.

Funções polinomiais.

No Tema 15 - "Funciones polinomicas" de (Vizmanos & Anzola, 1994b) são tratados polinómios do 3º e 4º grau de um ponto de vista gráfico e com algumas aplicações concretas. Ver ainda o parágrafo "Calculadora: representación de funciones" na pg. 137, tema 7, de (Guzmán, et al., 1994b).

Exemplo: **Volumes.**

Com uma folha de cartolina de 30 por 21 centímetros deseja-se construir uma caixa sem tampa, para o qual se cortaram nos cantos da folha de cartolina quatro quadrados iguais de lado x. Segundo o tamanho dos quadrados cortados assim se obterão diferentes caixas com diferentes volumes. Determinar como varia o volume da caixa em função de x. Representar graficamente a função obtida e determinar aproximadamente o valor máximo para o volume.

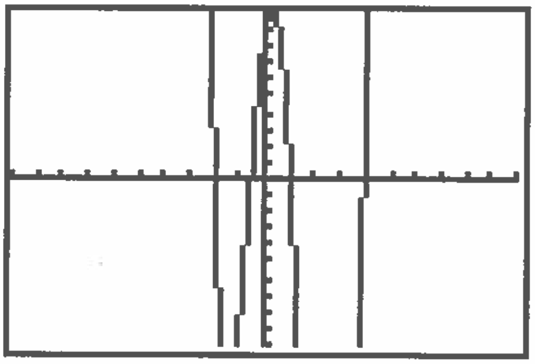
Possibilidade da decomposição de um polinómio em factores (informação). Decomposição de um polinómio em factores em casos simples, por divisão dos polinómios e recorrendo à regra de Ruffini. Justificação desta regra.

Uma sequência possível: Informa-se que todos os polinómios se podem decompor como produto de polinómios do 1º e 2º grau (pode-se referir o teorema fundamental da álgebra); sendo esta decomposição sempre possível, interessa saber como é que se pode efectuar na prática (diferença entre teorema de existência e disponibilidade de um algoritmo); referência a vários métodos que permitem obter essa decomposição (pode também ser referido o método dos coeficientes indeterminados, embora seja muito pouco prático); divisão de polinómios do 1º e 2º grau; dedução da regra de Ruffini (ver § 11 cap. IX de (Silva, 1970)). O estudo deste assunto pode com vantagem ser integrado com o do precedente ou com o do seguinte.

Estudo gráfico de inequações envolvendo polinómios com recurso à calculadora gráfica ou a partir de uma decomposição em factores do polinómio.

Exemplo 1:

Resolver a inequação $2x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 10x + 9 \leq 0$. Usando a calculadora gráfica no rectângulo de visualização $[-10,10]\times[-10,10]$, observam-se 4 zeros.



O gráfico obtido é uma descrição qualitativa satisfatória, pois um polinómio do 4º grau não pode ter mais de 4 zeros reais. Os zeros a, b, c e d são aproximadamente iguais a -1,98 , -0,55 , 1,03 e 3,9 respectivamente, pelo que o conjunto solução é $[a,b] \cup [c, d]$.

Exemplo 2:

Traçando uma tabela de valores com intervalos de 0,5 para o polinómio anterior observa-se que nos pontos -2, -0,5 , 1 e 4 o polinómio toma sempre o valor 1. Qual o significado deste facto?

X	Y1
-2.500	46.500
-2.000	1.000
-1.500	-12.75
-1.000	-9.000
-.500	1.000
0.000	9.000
.500	9.750

X=-2.5

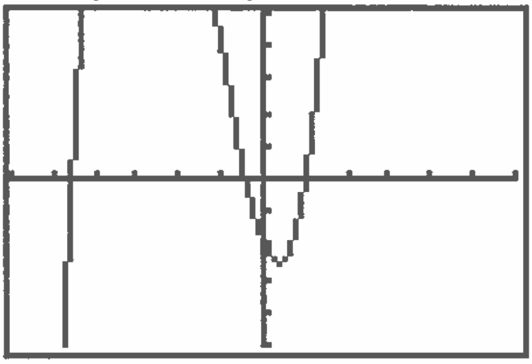
X	Y1
1.000	1.000
1.500	-16.50
2.000	-39.00
2.500	-59.75
3.000	-69.00
3.500	-54.00
4.000	1.000

Y1=2X^4-5X^3-15...

(Resposta: que P(x)-1 tem quatro zeros em -2, -0,5 , 1 e 4. Como é ainda um polinómio do 4º grau, estão encontradas todas as raízes. Observe-se que os zeros não diferem de uma unidade...)

Exemplo 3:

Resolver a inequação: $x^3 + 4x^2 - 3x - 2 \leq 0$. Aqui pode ser observado que os zeros inteiros do polinómio em questão devem dividir 2 (é fácil provar este facto no caso geral). Experimentando, vê-se que 1 é raiz. Dividindo, pela regra de Ruffini, obtém-se $x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = (x-1)(x^2 + 5x + 2)$. O polinómio do segundo grau tem raízes $(-5-\sqrt{17})/2$ e $(-5+\sqrt{17})/2$, pelo que se pode resolver a inequação discutindo os sinais. Obtém-se o conjunto solução $]-\infty , (-5-\sqrt{17})/2] \cup [(-5+\sqrt{17})/2 , 1]$. Pode-se verificar com a calculadora que se obteve o resultado correcto (isto é, que não nos enganámos a escolher os intervalos ou a ordenar os zeros).



Observe-se que ter um valor aproximado -4,56 é muito mais sugestivo do que o valor exacto $(-5-\sqrt{17})/2$.

Nota: Provemos que se p é um zero inteiro do polinómio de coeficientes inteiros $ax^n + bx^{n-1} + ... + gx + h$ então p deve dividir o coeficiente h. Se p é um zero do polinómio, então

$$ap^n + bp^{n-1} + ... + gp + h = 0$$

e assim

$$ap^n + bp^{n-1} + ... + gp = -h$$

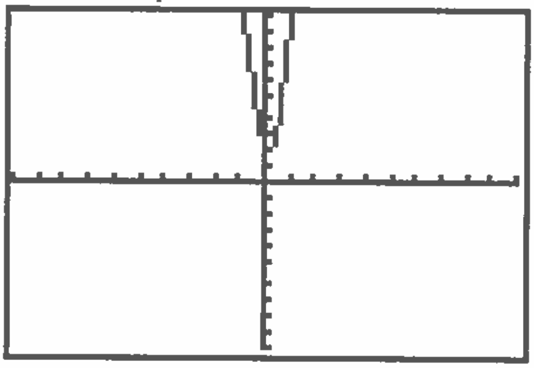
Pondo p em evidência no primeiro membro,

$$p\,(ap^{n-1} + bp^{n-2} + ... + g) = -h$$

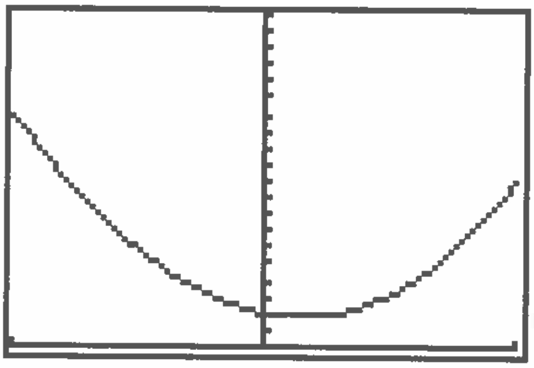
e assim p, dividindo o primeiro membro, deve dividir o segundo.
Uma regra semelhante pode ser deduzida para os zeros racionais de polinómios de coeficientes inteiros.

Exemplo 4:

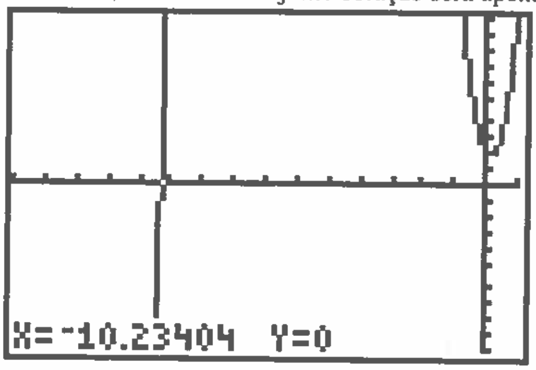
Resolver a inequação $x^3 + 10x^2 - 3x - 2 \leq 0$. Usando a calculadora gráfica no rectângulo de visualização $[-10,10]\times[-10,10]$, não se observa nada de especial.



Escolhendo o rectângulo $[-1,1]\times[0,20]$ observa-se uma curva semelhante a uma parábola que não intersecta o eixo dos XX.



Sabemos que não pode ser um gráfico completo pois todo o polinómio do 3° grau tem pelo menos uma raiz real e assim intersecta o eixo dos XX pelo menos uma vez. Depois de algumas reduções do gráfico, descobrimos um zero λ próximo de -10,2. Assim o conjunto solução será apenas $]-\infty, \lambda]$.



Estudo de transformações simples de funções(tanto usando papel e lápis como calculadora gráfica).

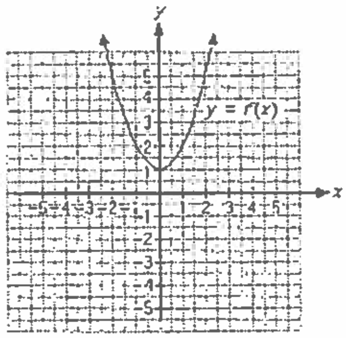
Ver exercícios significativos em várias Provas de Aferição e nas seguintes Provas Específicas: época normal 1994, Prova 47, questão 8, prova de reserva 1994, Prova 47, questão 9. Ver exemplos desenvolvidos nos quatro primeiros capítulos de (Fey & Heid, 1995).

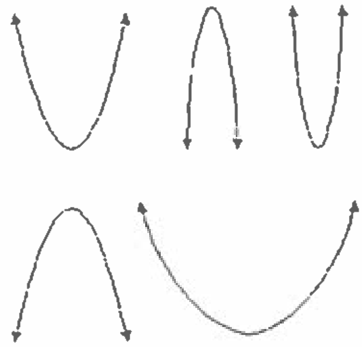
Exemplo 1:

Dado o gráfico de $y = f(x)$, obter o gráfico de

$$y = f(2x) - 3$$

seleccionando uma das cinco curvas e colocando-a no sistema coordenado.





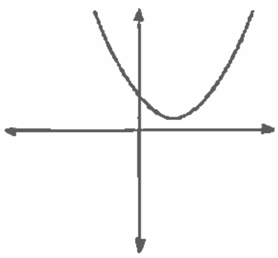
Exemplo 2:

Considere as cinco funções definidas pelas expressões dadas e os seis gráficos que se seguem. Associe cada função com o gráfico que melhor se adequa. Explicar o raciocínio realizado para cada escolha.

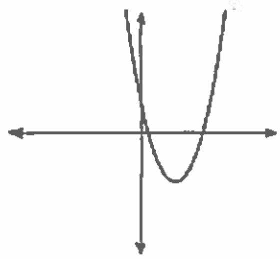
$$f(x) = 2x^2 - 8x - 5 \qquad g(x) = 2x^2 - 8x + 3 \qquad h(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 3$$

$$j(x) = 2x - 5 \qquad k(x) = -0{,}5x^2 - 2x + 3$$

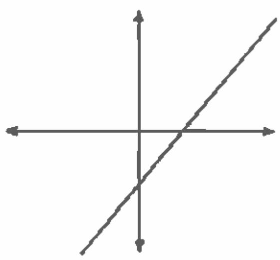
a.



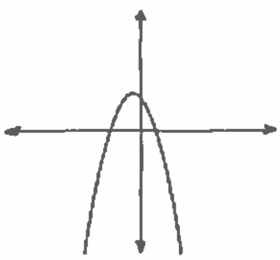
b.



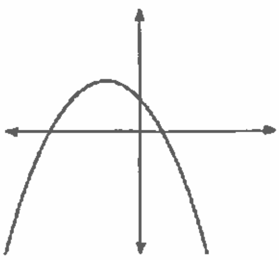
c.



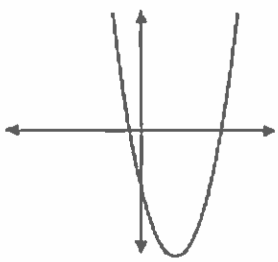
d.



e.

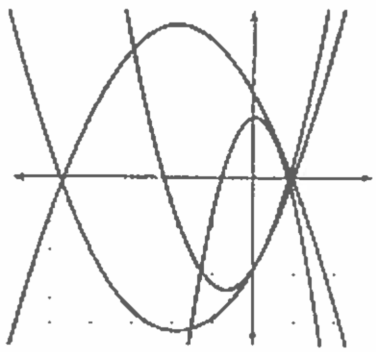


f.



Exemplo 3:

Os gráficos de quatro funções quadráticas são mostrados a seguir. Identifique cada um deles com as funções definidas pela expressões da lista dada.



$f(x) = 0{,}4\,x^2 + 3\,x - 7$

$g(x) = -\,0{,}4\,x^2 - 3\,x + 7$

$h(x) = x^2 + 3\,x - 7$

$j(x) = -\,2\,x^2 + 5$

Resolução de problemas concretos envolvendo funções polinomiais.

Este assunto pode ir sendo integrado com os anteriores. Referências bibliográficas anteriores já contêm assuntos interessantes que podem ser utilizados aqui.

Exemplo: **Um problema de Pedro Nunes.**

No seu "Libro de Algebra", Pedro Nunes resolve problemas com polinómios do 3º grau, reduzindo-os por divisão a polinómios do 2º grau. Por exemplo, reduz uma equação do tipo

$$x^3 = a\,x + (a-1)$$

a

$$x^3 + 1 = a\,x + a$$

e depois divide por um factor adequado. Descobrir esse factor. Resolver a equação resultante. Concluir as soluções da equação inicial.

Outras equações do mesmo tipo que aparecem no "Libro de Algebra":

$$x^3 = a\,x + (2a-2^3)$$

$$x^3 = a\,x + (na-n^3)$$

$$x^3 + (a-1) = a\,x$$

Ver exercícios significativos nas Provas Específicas: época normal 1994, Prova 47, questão 14. Ver uma perspectiva histórica em "Um quadrado e dez das suas raízes...", Paulo Alvega, Educação e Matemática, nº 32, 1994.

(*) Estudo intuitivo de curvas que se ajustem a um conjunto de pontos dados.

Ver § 1 a 5 do cap. 7 - "Interpolacion" de (Vizmanos & Anzola, 1994a). Ver outro tratamento no Tema 10 de (Guzmán & Colera, 1989b).

■ Tema III - **Estatística**

Média.

Ver "*O esquecimento do Dr Forget*" em (Costa & Graça, 1993), pg. 13.

Discussão das limitações destes parâmetros estatísticos

Ver "*Estatística, Compromissos e Sociedade*" em (Paulos, 1988), pg. 139.
Ver "*Mentir com a Estatística*" e "*O enganador termo médio*" no texto "Probabilidades e Estatística", pg. 285-293 de (APM, 1992).

Representação "Caule-e-folhas".

Num teste realizado a 50 estudantes obtiveram-se as seguintes classificações:
75,98,42,75,84,87,65,59,63,86,78,37,99,66,90,79,80,89,68,57,95,55,79,88,76,60, 77,49,92,83,71,78,53,81,77,58,93,85,70,62,80,74,69,90,62,84,64,73,48,72.

A representação "caule-e-folhas" facilita o cálculo da mediana e reflecte a forma da distribuição da população subjacente aos dados observados.

caule		caule e 1ª observação		caule e folhas	
3		3	7	3	7
4		4		4	2 8 9
5		5		5	3 5 7 8 9
6		6		6	0 2 2 3 4 5 6 8 9
7		7		7	0 1 2 3 4 5 5 6 7 7 8 8 9 9
8		8		8	0 0 1 3 4 4 5 6 7 8 9
9		9		9	0 0 2 3 5 8 9

Sobre este tema consultar (Martins, 1990).

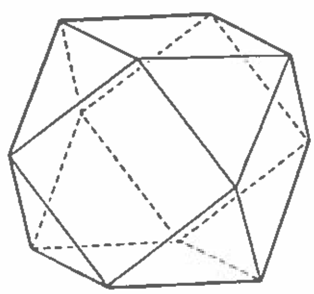
11º ANO

■ Tema I - **Geometria no plano e no espaço II**

Problemas de Geometria no Espaço

Exemplo 1: **O cuboctaedro.**

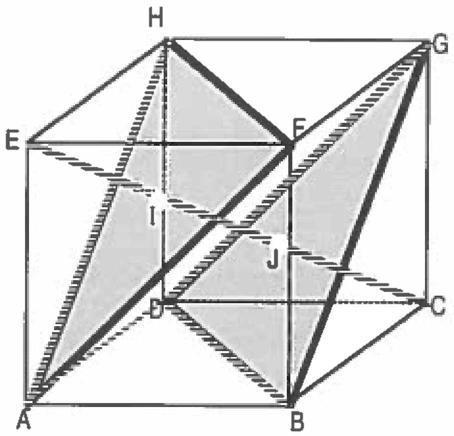
O cuboctaedro é um sólido cujos vértices são os pontos médios das arestas de um cubo.



1. Como resultou este sólido do cubo em que está inscrito?
2. Compare o volume do cuboctaedro com o do cubo ?
3. Quantos vértices e quantas faces tem este sólido ?
4. Mostre que umas faces são quadrados enquanto outras são triângulos equiláteros.
5. Mostre que os centros de gravidade das faces triangulares são vértices de um cubo.

Obs.: *Escolhendo um referencial conveniente o aluno facilmente resolverá o problema proposto.*

Exemplo 2: **Triângulos num cubo.**



a) Mostre que a diagonal do cubo é perpendicular aos triângulos [AHF] e [GBD] nos seus centros I e J.

b) prove ainda que $\overline{EI} = \overline{IJ} = \overline{JC}$ e que o centro do cubo é o ponto médio de [IJ] .

(Observação: *o professor deve procurar escolher exercícios que facilitem a visualização e a percepção do espaço. O aluno deve registar as propriedades mais importantes que for encontrando.*)

Equações de planos

Uma possível sequência: O aluno deve ficar a compreender que uma equação do tipo ax+by+cz+d = 0 representa uma equação de um plano se (a,b,c) são as coordenadas de um vector $\vec{n}$ que lhe seja perpendicular. Na verdade, sendo conhecidas as coordenadas de um ponto A(α, β, γ) do plano e sendo P(x, y, z) um ponto genérico do plano, tem-se

$$\vec{AP} \cdot \vec{n} = 0 ,$$

ou seja,

$$a(x - \alpha)+b(y - \beta)+c(z - \gamma) = 0$$

ou ainda

$$ax + by + cz = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

ou ainda

$$ax + by + cz = d$$

O aluno reflectirá então nos vários casos de intersecção de dois planos e estudará os casos em que a conjunção das condições

$$ax+by+cz+d=0 \qquad \text{e} \qquad ex+fy+gz+h=0$$

representa uma recta.

(*) Programação linear.

Ver um tratamento do tema em (Silva, 1975), pg. 71-76. Ver outro tratamento no Tema 5 de (Guzmán & Colera, 1989b).Ver um exemplo em "*A produção de sabonetes*" in (Costa & Graça, 1993), pg. 62.

■ Tema II - Introdução ao Cálculo Diferencial I

Estudo intuitivo tanto a partir de um gráfico concreto como usando calculadora gráfica de propriedades das funções e dos seus gráficos

Ver pg. 138-140 do tema 7 de (Guzmán, et al., 1994b). Ver ainda o capítulo 6 de (Fey & Heid, 1995) onde se podem encontrar vários exemplos de explorações e da ligação deste capítulo com outras áreas da Matemática.

Exemplo: **Janelas.**

As janelas de forma rectangular de um edifício de escritórios devem ter 2 m^2 de área. Usando uma tabela de valores, mostre como varia a altura das janelas segundo o tamanho da base. Designe por x a base e y a altura e escreva a expressão da função referida. Represente-a graficamente e indique qual o seu domínio.

Uso da calculadora para uma aproximação experimental da noção de limite, de $-\infty$ e $+\infty$

O estudo deste tema pode com vantagem ser integrado no anterior. Ao traçar uma tabela de valores de uma função ou o seu gráfico, pode-se aproveitar para conjecturar qual o limite em pontos onde valha a pena ter essa discussão.

O símbolo $+\infty$ pode ser definido como representando uma tendência para números tão grandes quanto se queira. Como dizia José Anastácio da Cunha, trata-se de uma variável e não de um número, pelo que não é legítimo fazer cálculos com ele; a discussão da recta acabada que permite fazer alguns cálculos explícitos põe mais problemas do que os que resolve pelo que não é nada aconselhável o seu estudo (cada vez se utiliza mais ∞ em vez de $+\infty$ pois a representação separada de ∞ como "infinito sem sinal determinado" tem caído em desuso por ser pouco útil e geradora de confusões). Sobre José Anastácio da Cunha consultar (Ferraz, Rodrigues, & Saraiva, 1990)

Referência à hipérbole, informação das suas principais propriedades e da sua importância histórica.

Uma sequência possível: Uma hipérbole é a curva gráfica da função definida por $f(x) = a + \frac{b}{cx+d}$; uma hipérbole é ainda um certo lugar geométrico que se descreverá; é ainda uma secção cónica; trata-se de definições equivalentes (informar). Referência a utilizações actuais da hipérbole (centrais nucleares, cone de som de um avião,...)

Resolução de problemas envolvendo as funções anteriores e as estudadas em anos anteriores, tanto sob os aspectos analíticos como numéricos e gráficos.

Ver um exemplo em "*Curva de aprendizagem de Thurstone*" in (Madureira, 1993), pg. 19.

Exemplo 1:

Para um movimento uniforme, e = v t. Sendo v o limite de velocidade nas auto-estradas portuguesas, e partindo do princípio que todos vão à velocidade máxima, estimar os diferentes valores (numérica e graficamente) para o espaço percorrido ao fim de duas horas para diferentes valores de v (tanto numérica como graficamente); fazer o mesmo para a variação do tempo gasto num percurso de 210 km (Lisboa - Coimbra por exemplo).

Exemplo 2:

Se k pessoas já estão inscritas para uma viagem cujo preço é de V escudos, x pessoas suplementares fazem com que o preço por pessoa diminua para $P(x) = V/(k+x)$. Determine x de modo que P seja inferior a um dado limiar L. Discuta as diversas possibilidades.

Ver exercícios significativos nas Provas Específicas: época normal 1993, Prova 47, questão 14, prova de reserva 1993, Prova 47, questão 7.

Noção de taxa média de variação; cálculo da taxa média de variação. .

A taxa média de variação no intervalo [a , a+h] da função definida por f(x) = m x + b é dada por

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(m(a+h)+b)-(ma+b)}{h}$$
$$=\frac{mh}{h}$$
$$=m$$

Quando a amplitude do intervalo tende para zero a taxa média de variação, sendo constante, não variará, pelo que a taxa de variação é igual à taxa média de variação. Curiosamente é o declive da recta gráfico da função afim.

Um raciocínio semelhante pode ser usado para determinar taxas de variação de funções quadráticas e cúbicas. Para a função definida por f(x) = \f(k;x)

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{k}{a+h}-\frac{k}{a}}{h}$$
$$=\frac{ak-k(a+h)}{a(a+h)h}$$
$$=-\frac{kh}{a(a+h)h}$$
$$=-\frac{k}{a(a+h)}$$

Quando a amplitude do intervalo tende para zero $a+h$ aproxima-se de a e assim a taxa média de variação aproxima-se de

$$-\frac{k}{a^2}$$

pelo que a taxa de variação é igual a este valor. Observa-se que quando a ficar próximo de zero, o valor da taxa de variação toma valores a tender para - ∞; e efectivamente o declive da recta secante que passa pelos pontos do gráfico com abcissa a e $a+h$ é cada vez maior, em valor absoluto. Quando a for igual a zero a recta secante aproxima-se de uma recta vertical (que usualmente se diz não ter declive).

No cálculo da taxa média de variação e no cálculo aproximado da taxa de variação podem ser usados pelos alunos trabalhos já realizados nas aulas de Física (ver, por exemplo, o trabalho prático 2 da Unidade 2 de (Fiolhais, Valadares, Silva, & Teodoro, 1994)).

Ver também o tema 10 de (Guzmán, et al., 1994b).

Interpretação geométrica da taxa de variação.

Definição de derivada (recorrendo à noção intuitiva de limite).

Ver § 1 e exercício 2 do cap. VIII - "Derivadas" de (Silva, 1970). Ver tema 10 de (Guzmán, et al., 1994b).

Constatação, por argumentos geométricos, de que:

i) se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente e se a derivada é negativa num intervalo a função é decrescente;

ii) se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto então a derivada é nula nesse ponto (análise dos casos x^3 *e* $|x|$*).*

Uma sequência possível: i) Se a derivada é positiva num intervalo, o declive da recta tangente tem sempre uma certa orientação pelo que a função tem de ser crescente. ii) Se a derivada fosse positiva nalgum intervalo contendo o ponto, seria crescente, se fosse negativa seria decrescente; é óbvio, geometricamente, que a derivada não pode variar de sinal de forma irregular, pelo que só pode ser nula no ponto considerado.

Ver exercícios significativos nas Provas Específicas: época normal 1993, Prova 47, questão 2, época especial 1993, Prova 47, questão 4, época especial 1994, Prova 47, questão 4.

Determinação da derivada em casos simples
(função afim, funções polinomiais do 2º e 3º grau, função racional do 1º grau, função módulo)

Trata-se de continuar a discussão já tida com as taxas de variação. Aqui pode-se concluir a determinação das fórmulas para as derivadas/taxas de variação das funções referidas.

Resolução de problemas envolvendo derivadas num contexto de aplicações.

Ver tema 10 de (Guzmán, et al., 1994b). Ver o exemplo "*Curva de aprendizagem de Thurstone*", pg. 19, em (Madureira, 1993), o exemplo "*Uma caleira e uma nora*" em (Costa & Graça, 1993), pg. 56, e vários exemplos em (Boltiansky, 1983).

Exemplo 1:

O custo C (em contos) de construir um apartamento com A metros quadrados de área é dado pela função C = f(A). Qual a interpretação prática de f'(A) ? E de f'(120) ? (Resposta: Há duas interpretações interessantes: a mais simples é que f'(A) mede a velocidade de crescimento do custo com o aumento da área do apartamento. Mas, recorrendo à interpretação geométrica da derivada e ao facto de a tangente ser muito próxima do gráfico da função para valores pequenos, pode também dizer-se que o custo do apartamento aumenta f'(A) contos por cada metro quadrado de aumento da área do apartamento, para valores próximos de A)

Exemplo 2:

Em economia, a "utilidade total" refere-se à satisfação total do consumo de um determinado bem. Eis uma citação do famoso livro de Economia de Paul Samuelson, Prémio Nobel da Economia em 1970:

"À medida que se consome mais do mesmo bem, a utilidade (psicológica) total aumenta. Contudo,..., com novas unidades sucessivas do mesmo bem, a sua utilidade total crescerá a uma taxa cada vez mais lenta devido a uma tendência fundamental da capacidade psicológica de as pessoas se tornarem menos entusiastas ao apreciarem mais do mesmo bem."

(a) Esboçar a utilidade total como função do número de unidades consideradas;

(b) Em termos de derivadas, o que é Samuelson nos diz?

Notas:

O uso de problemas envolvendo o conceito físico de velocidade deve tanto quanto possível usar a mesma terminologia que os alunos aprendem na disciplina de Física. Uma designação como "velocidade algébrica" é inaceitável do ponto de vista físico. O Professor Doutor Jorge Valadares afirma:

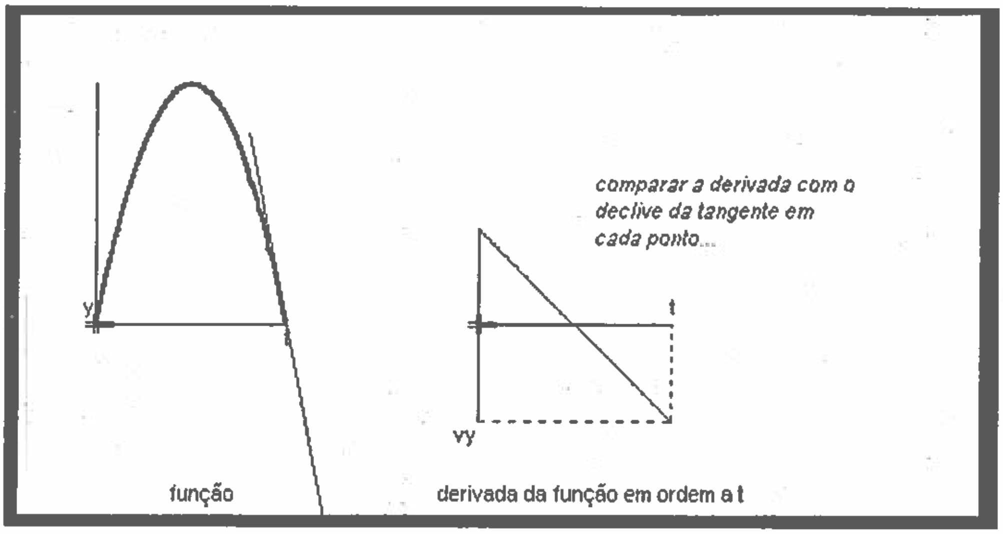
«[Na aula de matemática devem ser usadas com frequência] ... funções "físicas", por exemplo:

• posição numa trajectória rectilínea, em *função* do tempo $x = f(t)$, em que a *taxa média de variação* nos dá a *componente ou coordenada da velocidade média* na trajectória (cuidado que a velocidade média é um vector, e daí eu falar em componente, reparem que a taxa média poder ser negativa se o carro estiver a andar no sentido negativo da trajectória e não há vectores negativos) e a *taxa instantânea* nos dá a *componente ou coordenada da velocidade* (não a medida, valor ou módulo, pela mesma razão).

• distância percorrida sobre uma trajectória em função do tempo, $s = s(t)$ onde s (ao contrário de x no caso anterior) cresce sempre, em que a *taxa média de variação* nos dá a *rapidez média* (sempre positiva ou nula, porque a função nunca decresce, chama-se nas recomendações internacionais *average speed*, não confundir com o *average velocity*) e a *taxa instantânea* nos dá a *rapidez instantânea* ou *valor* ou *módulo* ou *medida* da *velocidade instantânea* (positiva ou nula como todo o módulo).

Até poderá constituir um bom pretexto para comparar uma função que cresce ou decresce ou mantém-se constante (coordenada x a variar no tempo) com uma função que nunca decresce (distância s percorrida a variar no tempo, não há distâncias percorridas negativas, os conta quilómetros marcam sempre mais!). As letras até convém que variem, umas vezes s, outras vezes d, umas vezes x outras vezes y, se é uma queda de um grave é preferível o y.»

A modelação matemática pode ser trabalhada usando ferramentas informáticas. Uma das que está disponível em português é o programa MODELUS. Por exemplo, para mostrar como varia a velocidade de um objecto que se desloca ao longo de uma trajectória parabólica é possível observar uma recta tangente a deslocar-se sobre a trajectória ao mesmo tempo que é traçado o gráfico representativo do declive da tangente:



Este programa pode ser obtido através de: Vitor Teodoro, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2825 Monte da Caparica.

Operações com funções (soma, diferença, produto, quociente, composição) num contexto do estudo de funções racionais envolvendo polinómios do 2º e 3º grau.

Ver exercício 23f), g) e 24 de (Silva, 1970). Ver uma abordagem simples nas pg. 142-143 de (Guzmán, et al., 1994b).

Operações com funções: inversão. Funções com radicais quadráticos ou cúbicos. Operações com radicais quadráticos e cúbicos e com potências de expoente fraccionário. Simplificações de expressões com radicais (não incluindo a racionalização)

Será importante observar que os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à recta *y=x*.
Ver uma abordagem simples nas pg. 144-145 de (Guzmán, et al., 1994b).
Ver exercícios significativos nas Provas Específicas: Provas Específicas: época normal 1993, Prova 47, questão 7.

Uma aplicação das operações com radicais: obtenção da equação da elipse a partir da sua propriedade focal.

Uma sequência possível: Dar a definição de elipse a partir da propriedade focal e deduzir a sua equação; discussão da eventual introdução de soluções estranhas. Referir que se trata de uma definição equivalente à já encontrada antes.

■ Tema III - **Sucessões**

Estudo intuitivo da sucessão de termo geral $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ num contexto de modelação matemática; primeira definição do número *e*

Eis uma possível abordagem:
Suponhamos que se deposita uma quantia em dinheiro num banco que oferece juros de *T* por cento ao ano

contabilizados n vezes por ano (em períodos de igual duração). Ao fim de a anos o dinheiro que se tem é

$$Q_n = Q\left(1+\frac{T}{n}\right)^{an}$$

se se suposer que os juros vão sendo em cada instante adicionados ao capital.
Mantendo os outros parâmetros fixos pode-se estudar (conjecturando a partir de tabelas de valores) qual o efeito de cada um dos parâmetros Q, T, n e a.
Poderá parecer que Q_n atingirá valores arbitrariamente elevados à medida que aumenta o valor de n. Contudo, alguns cálculos (numa calculadora ou computador), sugerem o contrário. Pode-se provar (informação a dar aos alunos) que a sucessão Q_n é crescente, limitada superiormente e convergente para um valor que, quando $Q=T=a=1$, se designa por e. No caso geral tem-se que o limite da sucessão é

$$Q\left(e^T\right)^a = Qe^{aT}$$

O número e (notação devida ao matemático Euler) é irracional e até transcendente (não é solução de qualquer equação polinomial de coeficientes inteiros).

(*) Caos

Ver "Caos e fractais na Aula de Matemática" em (APM, 1994). Ver "Un laboratório ecologico en tu calculadora" na pg. 221-222 de (Guzmán & Colera, 1989a).

12º ANO

■ Tema I - **Combinatória e Probabilidades**

Triângulo de Pascal

Ver um tratamento do tema em "O triângulo de Pascal" (Uspensky,).

Axiomática para as probabilidades

Ver um tratamento do tema no § 12 "Axiomatização do conceito de probabilidade" do cap. VII - "Introdução à Estatística e ao Cálculo das Probabilidades" de (Silva, 1978b).

(*) Distribuição binomial de probabilidade

Ver um tratamento do tema nos § 16, 17 e 18 do cap. VII - "Introdução à Estatística e ao Cálculo das Probabilidades" de (Silva, 1978b).

■ Tema II - **Introdução ao Cálculo Diferencial II**

Função exponencial de base superior a um.

Ver tema 8 de (Guzmán, et al., 1994b) e § 4 do Tema 7 de (Guzmán & Colera, 1989b).

Crescimento exponencial.

Estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x)=a^x$ com $a > 1$.

Ver tema 8 de (Guzmán, et al., 1994b). Ver várias explorações no capítulo 5 de (Fey & Heid, 1995) e no capítulo 1 de (Hughes-Hallett & Gleason, 1992).
Ver "*Quais são as raízes da equação* $2^x = x^2$?" in (Lima, 1987), pg. 212.

Função logarítmica de base superior a um.

Ver tema 8 de (Guzmán, et al., 1994b) e § 6 do Tema 7 de (Guzmán & Colera, 1989b).

Estudo das propriedades analíticas e gráficas da família de funções definida por $f(x) = log_a x$ com $a>1$

Ver tema 8 de (Guzmán, et al., 1994b). Ver várias explorações no capítulo 1 de (Hughes-Hallett & Gleason, 1992).

Regras operatórias de exponenciais e logaritmos.

Ver § 2 do Tema 14 e § 2 do Tema 15 de (Guzmán, et al., 1989). Ver tema 8 de (Guzmán, et al., 1994b).

Aplicações concretas de exponenciais e logaritmos.

Ver tema 8 de (Guzmán, et al., 1994b). Ver "*Concentração hidrogeniónica*", pg. 16, "Escala *de Richter*", pg. 16, "Entropia", pg. 17, "*A inteligência do Rato*", pg. 19, "*Radiação necessária para destruir um vírus*", pg. 25, "*Modelo para o estudo da epidemia*", pg. 40, in (Madureira, 1993).

Ver um exemplo "*Plutónio e Companhia*" in (Costa & Graça, 1993), pg. 81.

Ver como na discussão da dimensão de conjuntos autosemelhantes (dimensão fractal) aparecem os logaritmos (ver, por exemplo, pg. 221-226 em (Guzmán, 1995))

Limite de função segundo Heine. Propriedades operatórias sobre limites (informação); limites notáveis (informação). Indeterminações. Continuidade.

Os limites notáveis podem ser intuídos usando a calculadora, num contexto de modelação matemática, ou por meio de argumentos geométricos:

a) caso de $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^p}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^p}{\log_a x}$ $(a > 1 \text{ e } p > 0)$.

b) caso de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ que representa o valor da derivada da função exponencial no ponto de abcissa zero (o valor da derivada pode ser conjecturado a partir do gráfico; o professor informará que se pode provar a veracidade da conjectura).

Teorema de Bolzano-Cauchy (informação) e aplicações numéricas.

Determinar pontos de intersecção de curvas que não se podem obter de forma exacta: por exemplo de e-x e $\log x$, ou de $\operatorname{sen} x$ e e^x.

Funções deriváveis. Regras de derivação (demonstração da regra da soma e do produto; informação das restantes regras). Derivadas de funções elementares (informação baseada em intuição numérica e gráfica). Teorema da derivada da função composta (informação).

Exemplo de procedimento para o cálculo da derivada da função exponencial de base qualquer:

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Mas

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

é um valor que não depende de x. Logo podemos escrever

$$\left(a^x\right)' = ka^x$$

É óbvio que $k > 0$. Como elemento verificador podem comparar-se os gráficos da função exponencial com um múltiplo positivo da exponencial e observar que o sinal de um descreve a monotonia do outro, e que quanto maior é a derivada mais inclinada é a tangente ao gráfico da função (isto é, mais depressa cresce a função exponencial — outra medida do crescimento exponencial).

Pode-se definir o número e de Euler como sendo o único número real a para o qual $k=1$, isto é, o único número real a para o qual

$$\left(a^x\right)' = a^x$$

Dito de outro modo

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

e para mais nenhuma função exponencial se verifica o mesmo (e para mais nenhuma função derivável em R tal que f(0)=1 se verifica o mesmo; se esta última condição não for considerada, há mais funções nestas condições: quais?)

Ver exemplos e abordagens do capítulo 2 de (Hughes-Hallett & Gleason, 1992), e do capítulo 9 de (Bunday & Mudholland, 1967).

Segundas derivadas e concavidade (informação baseada em intuição geométrica).

Ver nº 25 do cap. VIII - "Derivadas" de (Silva, 1970).

Estudo de funções em casos simples.

Uma abordagem possível é fazer o estudo analítico e depois traçar o gráfico usando calculadora gráfica ou computador, confirmando por fim cada uma das conclusões analíticas a partir do gráfico obtido.

Integração do estudo do Cálculo Diferencial num contexto histórico.

Ver (Boyer, 1993), (Struik, 1992) e Boyer. Ver "Evolução Histórica do Conceito de Função: uma possível periodização histórica" e "O Conceito de Derivada à luz do Séc. XVII" em (APM, 1994).

Sobre a História da Matemática em Portugal ver (Oliveira, 1989), (Marques, 1991-1994) e o apêndice de (Struik, 1992). Sobre José Anastácio da Cunha consultar (Ferraz, et al., 1990).

Problemas de optimização.

Ver "*Viagem em grupo*", pg. 19,"*A que altura pode uma rã saltar*", pg. 23, "Custo *médio*", pg. 23, "*Tensão Arterial*", pg. 19, "*O consumo da gasolina*", pg. 27, "*Dimensão de um pomar de maçãs*", pg. 27, em (Madureira, 1993). Ver "*O lucro máximo*" em (Costa & Graça, 1993), pg. 68.

Ver nº 7 e 8 e exercícios 44 a 54 do cap. VIII - "Derivadas" de (Silva, 1970).

(*) Demonstração de alguns teoremas elementares do cálculo diferencial.

Ver cap. VIII de (Silva, 1970) e Temas 12 e 13 de (Guzmán & Colera, 1989a).

■ Tema III - **Trigonometria e Números Complexos**

Funções seno, co-seno, tangente. Estudo intuitivo tanto a partir de um gráfico concreto como usando calculadora gráfica de: domínio, contradomínio, período, pontos notáveis, monotonia, continuidade, extremos (relativos e absolutos), simetrias em relação ao eixo dos YY e à origem, assímptotas, limites nos ramos infinitos.

Ver uma construção experimental e teórica das funções trigonométricas em (Guzmán, et al., 1994b), pg. 98 a 101. Aqui tem interesse mostrar uma simulação como a do programa de computador MicroCalc com visualização da obtenção das funções trigonométricas a partir do círculo trigonométrico.

Ver o texto de cariz históricos "*De onde vêm os nomes das funções trigonométricas*" in (Lima, 1987), pg. 230, e o texto com uma aplicação das funções trigonométricas "*Ao sabor da maré*", António Bernardes, Educação e Matemática, nº 23, 1992.

Ver exercícios significativos nas Provas Específicas: época normal 1994, Prova 47, questão 2, época especial 1994, Prova 47, questão 5.

Estudo intuitivo de $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Uma tabela de valores permite conjecturar que o limite é igual a 1. Os alunos serão informados que o limite é efectivamente 1 (o professor poderá incentivar os alunos mais interessados a procurar uma demonstração por via geométrica).

Os alunos deverão convencer-se que a igualdade obtida (e todas as que se deduzem dela) só é válida quando se trabalha em radianos, analisando o que se passa quando a tabela de valores referida é obtida quando a variável x é expressa em graus.

Cálculo das derivadas do seno e co-seno.

Exemplo de procedimento para o cálculo da derivada da função seno:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} x\cos h+\cos x\operatorname{sen} h-\operatorname{sen} x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\operatorname{sen} x\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right]\\ &= \operatorname{sen} x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h}\end{aligned}$$

Mas

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$$

são constantes que não dependem de x. Designemo-las por C_1 e C_2 respectivamente. Então podemos escrever

$$\operatorname{sen}' x = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$$

Raciocínios, numéricos, geométricos ou gráficos permitem concluir que $C_1 = 0$ e $C_2 = 1$, pelo que

$$\operatorname{sen}' x = \cos x$$

Como elemento verificador podem compara-se os gráficos das funções seno e co-seno e observar que o sinal de um descreve a monotonia do outro.

Ver um exemplo concreto em "*O voo do gafanhoto*", pg. 20, in (Madureira, 1993).

História dos Números Complexos

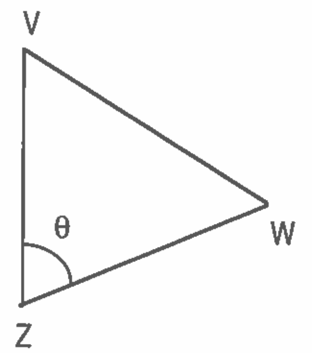
Ver "*A equação do terceiro grau*" em (Lima, 1987), pg. 16.

Ver § 21, 22 e 24 do cap. VI de (Silva, 1978b).

Ver § 1 a 9 do cap. X de (Dantzig, s/d).

Demonstrações de Geometria.

Demonstração da Lei dos co-senos usando números complexos: Ver pg. 67 de (Carmo, 1985).



Em (Guzmán, 1993), Miguel de Guzmán prova o Teorema de Napoleão (pg. 221-222) e resolve um problema de quadrados sobre quadrados (pg. 201-203) usando trigonometria de uma forma muitíssimo mais rápida do que usando métodos elementares de geometria. O facto básico usado é o seguinte: Se os afixos Z, V e W dos números complexos z, v e w respectivamente, estão situados como indica a figura, uma condição necessária e suficiente para que formem um triângulo isósceles em que os lados iguais concorrem no vértice Z, é que se verifique $(v-z)=(w-z)cis\theta$

Tema Geral - **Lógica e Raciocínio Matemático**

Noções de lógica.

Consultar (Silva, 1978a), (Oliveira, 1982a), e (Oliveira, 1982b).

Métodos de demonstração

Sobre o raciocínio demonstrativo consultar cap. 3 de (Vergez & Huisman, 1968), e sobre os processo gerais de pensamento consultar o cap. 7 do mesmo livro. Sobre os mesmos temas consultar ainda (Polya, 1990) e (Oliveira, 1982b).

Heurística da resolução de problemas

Sobre a heurística da resolução de problemas consultar "A arte de resolver problemas" (Polya, 1986) (tradução do original "How to solve it") e (Guzmán, 1990).

Ver, nas páginas seguintes, a reprodução dos quadros-resumo das heurísticas apresentadas por cada um destes autores.

Várias considerações valiosas podem ainda ser encontradas nos livros do Ensino Secundário espanhol de Miguel de Guzmán e no livro (Guzmán, 1993).

• Modelação Matemática

Sobre este tema consultar os artigos "*A Modelação Matemática no processo de aprendizagem*", J. P. Ponte, Educação e Matemática, nº 23, 1992 e "*A Matemática e o real*", Fátima Leite, Boletim da SPM, nº 29, 1994.

Como Resolver um Problema

COMPREENSÃO DO PROBLEMA

Primeiro.
É preciso *compreender* o problema

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?

É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou redundante? Ou contraditória?

Trace uma figura. Adopte uma notação adequada.

Separe as diversas partes da condicionante. É possível anotá-las?

ESTABELECIMENTO DE UM PLANO

Segundo.
Encontre a conexão entre os dados e a incógnita.

É possível que seja obrigado a considerar problemas auxiliares se não puder encontrar uma conexão imediata.

É preciso chegar afinal a um *plano* para a resolução.

Já o viu antes? Ou já viu o mesmo problema apresentado sob uma forma ligeiramente diferente?

Conhece um problema do mesmo tipo ou sobre o mesmo assunto? Conhece um problema que lhe poderia ser útil?

Considere a incógnita! E procure pensar num problema do mesmo tipo que tenha a mesma incógnita ou outra semelhante.

Eis um problema do mesmo tipo e já resolvido anteriormente. É possível utilizá-lo? É possível utilizar o seu resultado? É possível utilizar o seu método? Deve-se introduzir algum elemento auxiliar para tornar possível a sua utilização?

É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Volte às definições.

Se não puder resolver o problema proposto, procure antes resolver algum problema do mesmo tipo. É possível imaginar um problema parecido mais acessível? Um problema mais genérico? Um problema mais específico? Um problema análogo? É possível resolver uma parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como pode ela variar? É possível obter dos dados alguma coisa de útil? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? É possível variar a incógnita ou os dados, ou todos eles, se necessário, de tal maneira que fiquem mais próximos entre si?

Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?

EXECUÇÃO DO PLANO

Terceiro.
Execute o seu plano.

Ao executar o seu plano de resolução, *verifique cada passo*. É possível verificar claramente que o passo está correcto? É possível demonstrar que ele está correcto?

RETROSPECTIVA

Quarto.
Examine a solução obtida.

É possível *verificar o resultado*? É possível verificar o argumento?

É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isto num relance?

É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema?

Para resolver problemas

A	Antes de fazer, tenta entender
B	À procura de estratégias
B.1	Procura semelhanças com outros jogos e problemas
B.2	Começar pelo fácil torna fácil o difícil
B.3	Experimenta e procura regularidades, temas
B.4	Faz um esquema e, se vier a calhar..., pinta-o às cores
B.5	Modifica o problema, muda qualquer coisa no enunciado, para ver se assim te ocorre um caminho possível.
B.6	Escolhe uma boa notação.
B.7	Explora a simetria... se puderes
B.8	Suponhamos que não... Aonde é que isso nos leva?
B.9	Suponhamos o problema resolvido
B.10	Pensa em técnicas gerais: indução, descida, processo diagonal, princípio do pombal...
C	Explora a tua estratégia
C.1	Explora as melhores ideias que te tenham ocorrido na fase B. Uma a uma. Não as mistures ao princípio
C.2	Não desistas facilmente. Mas também não teimes demais com uma só ideia. Se as coisas se complicarem de mais, haverá provavelmente outro caminho.
C.3	Resultou? De certeza? Olha para a tua solução com mais cuidado.
D.	Extrai o sumo do jogo e da tua experiência
D.1	Examina a fundo o caminho que seguiste. Como chegaste à solução? Ou: porque é que não chegaste à solução?
D.2	Tenta perceber não só que a coisa de facto funciona, mas também porque tem assim
D.3	Agora vê se consegues fazê-lo de maneira mais simples
D.4	Vê até onde pode ir o método que seguiste, para ver se o podes utilizar noutras circunstâncias
D.5	Reflecte um pouco sobre o teu próprio processo de pensamento e tira consequências para o futuro

Referências Bibliográficas

Antibi, A., Barra, R., Glaymann, M., & Malaval, J. (1991). Mathématiques-1res A1B. Paris: Nathan.

APM (1992). Profmat 92-Actas. In APM (Ed.), . Viseu: APM.

APM (1994). ProfMat 94 - Actas. In A. Vieira, E. Veloso, & L. Vicente (Ed.), . Leiria: APM.

Boltiansky, V. (1983). O conceito de derivação. Moscovo: Editora Mir.

Boyer, C. B. (1993). Cálculo. São Paulo: Atual Editora.

Bunday, B. D., & Mudholland, H. (1967). Pure Mathematics for advanced level. Oxford: Heinemann Educational.

Carmo, M. P. d. (1985). Trigonometria e Números Complexos. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Costa, L., & Graça, M. (1993). Aprender a Matemática - Pensar a Realidade. Lisboa: Texto Editora.

Cuoco, A. A., Mark, J., & Goldenberg, E. P. (1994). Connected Geometry: Optimization. Newton, MA: Education Development Center.

Dantzig, T. (s/d). Número, a linguagem da Ciência. Lisboa: Ed. Aster.

Ferraz, M. d. L., Rodrigues, J. F., & Saraiva, L. (1990). Anastácio da Cunha 1744/1787, o matemático e o poeta. INCM.

Fey, J. T., & Heid, M. K. (1995). Concepts in Algebra: a technological approach. Dedham, Massachusetts: Janson Publications, Inc.

Fiolhais, C., Valadares, J., Silva, L., & Teodoro, V. D. (1994). Física - 10º ano - Manual de Actividades. Lisboa: Didáctica Editora.

Guzmán, M. (1990). Aventuras Matemáticas. Lisboa: Gradiva.

Guzmán, M. d. (1993). Para Pensar Mejor-Desarrollo de la creatividad. Madrid: Ed. Pirâmide.

Guzmán, M. d. (1995). Aventuras Matemáticas - Una ventana hacia el caos y otros episodios. Madrid: Ed. Pirâmide.

Guzmán, M. d., & Colera, J. (1989a). Matemáticas I - C.O.U. Madrid: Anaya.

Guzmán, M. d., & Colera, J. (1989b). Matemáticas II - C.O.U. Madrid: Anaya.

Guzmán, M. d., Colera, J., Bas, M. d. C., Gaztelu, I., & Oliveira, M. J. (1994a). Matemáticas - Bachillerato 1. Madrid: Anaya.

Guzmán, M. d., Colera, J., Bas, M. d. C., Gaztelu, I., & Oliveira, M. J. (1994b). Matemáticas - Bachillerato 2. Madrid: Anaya.

Guzmán, M. d., Colera, J., & Salvador, A. (1989). Matematicas-Bachillerato 2. Madrid: Anaya.

Hughes-Hallett, D., & Gleason, A. M. (1992). Calculus-Preliminary Edition. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Lima, E. L. (1987). Meu Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Madureira, L. (1993). Aplicando a Matemática... Lisboa: VRAL, Lda.

Marques, S. M. (1991-1994). Galeria de matemáticos do "Jornal de Mathematica Elementar". Lisboa: Ed. "Jornal de Mathematica Elementar".

Martins, M. E. G. (1990). Introdução às Probabilidades e Estatística. Lisboa: Dep. Estatística, Investigação Operacional e Computação.

Oliveira, A. F. d. (1982a). Teoria de Conjuntos. Lisboa: Liv. Escolar Editora.

Oliveira, A. J. F. d. (1982b). Aspectos lógicos e metodológicos no ensino da matemática. In SPM (Ed.), Ensino da Matemática: Anos 80, . Lisboa: SPM.

Oliveira, T. d. (1989). O essencial sobre a História da Matemática em Portugal. Lisboa: INCM.

Paulos, J. A. (1988). Inumerismo. Mem Martins: Publicações Europa-América.

Polya, G. (1986). A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Editora Interciência ltda.

Polya, G. (1990). Mathematics and Plausible Reasoning. Princeton University Press.

Silva, J. S. (1970). Compêndio de Álgebra - Tomo 1-6º ano. Braga: Livraria Cruz.

Silva, J. S. (1978a). Compêndio de Matemática-1º vol, 1º tomo. GEP.

Silva, J. S. (1978b). Compêndio de Matemática-1º vol, 2º tomo. Lisboa: Ano Propedêutico.

Silva, J. S. e. (1975). Guia para a utilização do Compêndio de Matemática - 1º volume. Lisboa: GEP.

Struik, D. J. (1992). História Concisa das Matemáticas (2ª ed.). Lisboa: Gradiva.

Uspensky, V. O Triângulo de Pascal. Moscovo: Editora Mir.

Vergez, A., & Huisman, D. (1968). Logique. Paris: Fernand Nathan.

Vizmanos, J. R., & Anzola, M. (1994a). Matemáticas II-C.O.U. Madrid: Ediciones SM.

Vizmanos, J. R., & Anzola, M. (1994b). Matemáticas-Secundária 4. Madrid: Ediciones SM.

ANEXO II

Um possível exemplo de calendarização

Apresenta-se a seguir um exemplo de calendarização do programa. Trata-se de um exemplo não vinculativo, cujo principal propósito é o de indicar uma das possibilidades de gestão deste novo programa, o que sugere sempre um grau de aprofundamento de cada um dos temas considerados, quando se toma como objectivo a exequibilidade em 92 horas de ensino anuais. Repete-se: de modo nenhum é obrigatório seguir esta calendarização, sendo os professores convidados a elaborar outras (seria aliás interessante que fossem publicadas outras propostas de calendarização...), sendo, em particular, encorajados a ter uma visão integradora de cada tema, fundindo os diversos assuntos de um modo que o aluno vá estudando cada aspecto de uma forma natural, sem precisar de os estudar separadamente.

10º ANO

Tema I - Geometria no Plano e no Espaço I

Desenvolvimento	Aulas
• Resolução de problemas de Geometria no Plano e no Espaço.	12
• Referenciais; lugares geométricos.	8
• Vectores; operações; propriedades.	12
• Equações da recta.	4
TOTAL	36

Tema II - Funções e Gráficos

Desenvolvimento	Aulas
• Função, gráfico e representação gráfica.	3
• Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos.	9
• Resolução de problemas envolvendo a expressão de uma variável em função de outra, ou recorrendo a uma representação gráfica.	2
• Referência à parábola, às suas principais propriedades e à sua importância histórica.	1
• Equações e inequações do 2º grau; inequações com um módulo.	3
• Funções polinomiais, polinómios e inequações polinomiais.	10
• Estudo de transformações simples de funções.	4
• Resolução de problemas concretos envolvendo funções polinomiais.	4
TOTAL	36

Tema III - Estatística

Desenvolvimento	Aulas
• Objecto da Estatística e breve nota histórica sobre a evolução desta Ciência; utilidade na vida moderna. Recenseamento e sondagem. As noções de população e amostra. Estatística Descritiva e Estatística Indutiva.	2
• Organização e interpretação de caracteres estatísticos.	4
• Medidas de localização de uma amostra. Limitações.	5
• Medidas de dispersão de uma amostra. Diagramas de "extremos e quartis". Limitações.	5
• Referência a distribuições bidimensionais	4
TOTAL	20

11º ANO

■ Tema I - Geometria no Plano e no Espaço II

Desenvolvimento	Aulas
• Resolução de problemas que envolvam triângulos.	4
• Trigonometria.	14
• Produto escalar de dois vectores no plano e no espaço.	7
• Conjuntos definidos por condições.	2
• Equações de rectas e planos; // e ⊥.	9
TOTAL	36

■ Tema II - Introdução ao Cálculo Diferencial I

Desenvolvimento	Aulas
• Estudo intuitivo de propriedades das funções e dos seus gráficos.	6
• Referência à hipérbole, informação das suas principais propriedades e da sua importância histórica.	1
• Resolução de problemas envolvendo as funções anteriores.	2
• Taxa média de variação; taxa de variação.	8
• Determinação da derivada em casos simples.	4
• Resolução de problemas envolvendo derivadas num contexto de aplicações.	2
• Operações com funções num contexto do estudo de funções racionais envolvendo polinómios do 2º e 3º grau.	6
• Funções com radicais quadráticos ou cúbicos.	6
• Equação da elipse.	1
TOTAL	36

■ Tema II - Introdução ao Cálculo Diferencial I

Desenvolvimento	Aulas
• Sucessões; Sucessões monótonas; Sucessões limitadas.	5
• Progressões aritméticas e geométricas.	5
• Infinitamente grandes e infinitamente pequenos.	4
• Limites de sucessões e convergência.	6
TOTAL	20

12º ANO

■ Tema I - **Análise Combinatória e Probabilidades**

Desenvolvimento	Aulas
• Introdução ao cálculo de Probabilidades.	10
• Distribuição de frequências. relativas e distribuição de probabilidades.	4
• Definição axiomática de probabilidade. e probabilidade condicionada.	6
• Combinatória. Aplicações ao cálculo de Probabilidades.	10
TOTAL	30
reserva	6

■ Tema II - **Introdução ao Cálculo Diferencial II**

Desenvolvimento	Aulas
• Função exponencial e crescimento exponencial.	5
• Função logarítmica.	3
• Regras operatórias e aplicações concretas de exp. e logaritmos.	5
• Limites e continuidade.	4
• Teor. de Bolzano-Cauchy (informação) e aplicações numéricas.	2
• Funções deriváveis.	7
• Segundas derivadas e concavidade.	2
• Estudo de funções em casos simples.	2
• Integração do estudo do Cálculo Dif. num contexto histórico.	2
• Problemas de optimização.	4
TOTAL	36

■ Tema III - **Trigonometria e Números Complexos**

Desenvolvimento	Aulas
• Funções seno, co-seno, tangente.	6
• Números complexos: introdução histórica e definição.	5
• Operações com complexos na forma algébrica.	3
• Complexos na forma trigonométrica; operações.	3
• Domínios planos e condições em variável complexa.	3
TOTAL	20

ANEXO III

Sebastião e Silva: "Normas Gerais"

1

A modernização do ensino da matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino. O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta.

2

A par da intuição e da imaginação criadora, há que desenvolver ao máximo no espírito dos alunos o poder de análise e o sentido crítico. Isto consegue-se, principalmente, ao tratar da *definição* dos conceitos e da *demonstração* dos teoremas, em que a participação do aluno deve ser umas vezes parcial (em diálogo com o professor) e outras vezes total (encarregando cada aluno de expor um assunto, após preparação prévia em trabalho de casa).

3

Muito raramente se deve definir um conceito sem ter partido de exemplos concretos e, tanto quanto possível, sugestivos. Se a preparação psicológica tiver sido bem conduzida, será muitas vezes o aluno quem acabará por definir espontaneamente o conceito, com ou sem ajuda do professor. *Em qualquer caso, este deverá encaminhar o aluno para o rigor de linguagem, que equivale a dizer, de pensamento.* Para isso, será de grande auxílio a introdução à lógica matemática, feita logo de início.

4

Quanto à demonstração dos teoremas, deve seguir-se com frequência uma norma semelhante à anterior. É altamente desejável que o aluno seja muitas vezes posto em condições de ver o teorema antes de o demonstrar e que essa visão o encaminhe a construir por si mesmo a demonstração, mais ou menos impecável do ponto de vista lógico. *Não esquecer que, na investigação matemática, a intuição precede normalmente a lógica.*

5

A ordem lógica na apresentação dos assuntos não é muitas vezes a mais aconselhável do ponto de vista didáctico. Normalmente o aluno só pode tomar consciência da necessidade de certo grau de rigor, depois de ter compreendido os assuntos em *primeira aproximação* ou de *modo intuitivo*, exactamente como sucede na investigação. Assim, em vez da ordem lógica, haverá que seguir de preferência a *dialéctica do intuitivo-racional* e do *concreto-abstracto*, em que o grau de rigor lógico se irá elevando progressivamente, com a adesão espontânea do aluno.

6

Para desenvolvimento do sentido crítico, é essencial encorajar o aluno à discussão livre e disciplinada, habituando-o a expor com calma e sem timidez os seus pontos de vista e a examinar serenamente e com interesse as opiniões dos outros.

7

Ao seguir o método activo, o professor deve evitar que os alunos falem todos ao mesmo tempo. Quando um aluno tiver algo a dizer, levantará o braço. Compete então ao professor escolher entre vários. Muitas vezes o professor chamará um aluno à secretária ou à pedra. O aluno deverá então movimentar-se rapidamente e com o mínimo ruído. Deste modo se estabelece o *dinamismo disciplinado*, que caracteriza a vida em corpo são, e que é indispensável ao êxito do método activo. Não esquecer que o ruído é desfavorável à concentracão intelectual, e que tentar conciliar as duas coisas reverte geralmente em prejuízo do sistema nervoso, contribuindo para o desenvolvimento de um dos maiores flagelos da nossa época.. *A melhor sala de aula será muitas vezes a que estiver mais afastada da via pública.*

8.

A matemática não se reduz a ciência isolada platonicamente de tudo o resto. É também um instrumento ao serviço do homem nos mais variados ramos da ciência e da técnica. O professor deve sempre ter presente este facto e tentar estabelecer, sempre que possível as conexões da matemática com outros domínios do pensamento, atendendo a que muitos dos seus alunos irão ser físicos, químicos, biólogos, geólogos, engenheiros, economistas, agrónomos ou médicos.

9

Na aprendizagem da matemática não basta ter intuição, compreender, definir e raciocinar. É também indispensável adquirir certos automatismos psicológicos. Isto vale, especialmente, no que se refere a *técnicas de cálculo*. Tais técnicas são mais perfeitamente assimiladas quando o aluno conhece bem os fundamentos teóricos das mesmas. *Mas esse conhecimento não basta: o professor deve insistir para que os alunos se treinem bastante em exercícios equilibrados, que requeiram a aplicação das referidas técnicas.*

10

O treino recomendado na norma anterior não deve confundir-se de modo nenhum com a mecanização do aluno na resolução de exercícios por meio de receitas, aplicadas sem qualquer conhecimento de causa. Essa prática, tal como se tem generalizado entre nós, só contribui para desvirtuar completamente a finalidade do ensino da matemática, habituando o aluno a *não pensar* e destruindo nele toda a iniciativa e toda a espontaneidade para a resolução de problemas essencialmente novos, como os que são postos a cada passo pela ciência, pela técnica e pela vida corrente.

11

Alunos e professor devem assumir nas aulas uma atitude descontraída, que afaste tanto quanto possível do espírito dos alunos a ideia da *nota* que irão ter no fim do período (lembrando que o seu interesse principal é aprender) e modere no espírito do professor a ideia de que é *juiz* (lembrando que a sua missão é, acima de tudo, ensinar). *Assim, o que deve dominar nas aulas é o interesse pelos assuntos tratados*. Estes não têm necessariamente de ser todos reduzidos à forma de exercícios escritos (o que é muitas vezes um modo de os tornar abomináveis). Especialmente no que se refere a demonstrações — *um aspecto em que é preciso insistir muito* — o professor deverá recorrer de preferência ao sistema de *chamadas breves.*

12

É dialogando com os alunos que o professor acaba muitas vezes por esclarecer, para si próprio, certos assuntos que pretende ensinar. Isto não vem senão corroborar um velho preceito:
A melhor maneira de aprender é ensinar.
Haja em vista os Diálogos de Platão. No «Teeteto» é definida explicitamente por Sócrates a missão do mestre: *ajudar a virem à luz as ideias na mente do discípulo*. E quantas vezes, no mesmo instante, não se ilumina a mente do professor!

13

Nesta ordem de ideias, o professor deve combater no aluno, e em si próprio, o receio de errar, enquanto se trata de fazer um esforço sincero para aprender ou ensinar. Porque só errando se aprende verdadeiramente. Ai daqueles que não aprendem à custa da própria experiência e dos próprios erros, porque esses pouco ou nada aprendem, na verdade.

14

O método heurístico (ou de redescoberta) só a princípio poderá parecer mais moroso. A criança que aprende a andar com aparelhos ou a pessoa que aprende a nadar com flutuadores só ilusoriamente aprende mais depressa: na realidade aprende mais devagar e pior.

15

São por vezes obstáculos à aplicação do método heurístico os dois casos extremos que podem surgir numa turma: alunos muito bons e alunos francamente maus, especialmente os repetentes. Os primeiros estão sempre prontos a responder, não deixando tempo aos restantes para pensar (*vide* norma 7). Os segundos criam uma atmosfera de desinteresse, porventura mesmo de indisciplina, ou então já conhecem a *receita*, que aprenderam no ano anterior, acabando assim por viciar o processo heurístico. Cabe ao bom senso do professor encontrar uma solução de equilíbrio, tendo presente a norma 7.

16

Terminaremos estas considerações, traduzindo algumas das medidas preconizadas na América para a renovação do ensino geral:
(a) O ensino em todos os graus terá de se tornar mais flexível, mais adaptado, quer às solicitações dum mundo em rápida evolução, quer às aptidões dos indivíduos.
(b) Necessitamos de métodos aperfeiçoados para descobrir talentos e levá-los a atingir a plena maturidade.
(c) Não devemos encorajar, seja de que modo for, qualquer sistema de ensino que tenda a criar uma geração de bárbaros, incapazes de apreender uma ideia que não lhes seja «programada» por outro cérebro.

Sebastião e Silva, *Guia para a utilização do Compêndio de Matemática* (1º Vol.), Curso Complementar do Ensino Secundário, Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Investigação Científica, Lisboa, 1975.

ANEXO IV

Historial e clarificações

As três versões provisórias deste documento foram submetidas a uma discussão alargada. Foram recebidos um total de 151 pareceres escritos, sendo uns individuais e outros colectivos (dos quais 31 resultaram de reuniões do grupo disciplinar de Matemática); 41 dos pareceres vieram de várias instituições de Ensino Superior (universitário e politécnico); foram ainda recebidos 10 pareceres de Associações e Sociedades Científicas e de Professores. Elementos da Equipa Técnica participaram em onze debates públicos em escolas e encontros; a Equipa Técnica teve ainda audiências com delegações da SPM - Sociedade Portuguesa de Matemática, AM - Associação de Professores de Matemática, SPE - Sociedade Portuguesa de Estatística, SPCE(SEM)-Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação(Secção de Educação Matemática), IIE - Instituto de Inovação Educacional, e teve contactos com anteriores autores de programas de Matemática (3º ciclo e secundário) e de Física.

O interesse manifestado pelo problema do Ensino da Matemática, o empenhamento dos participantes e a qualidade das propostas apresentadas provam que esta é uma metodologia adequada para uma revisão de programas.

Directrizes balizadoras deste ajustamento

Foi estabelecido que esta proposta de ajustamento dos Programas de Matemática do Ensino Secundário devia obedecer às seguintes directrizes institucionais:

a) a carga horária deverá ser de 4 horas semanais em cada ano;

b) deve manter-se a abordagem metodológica proposta no texto dos programas em vigor.

As recomendações/orientações para este estudo, determinadas pelo DES, foram:

a) *preservar os objectivos da renovação do ensino da matemática;*

b) *necessidade de maior clareza e organização dos conteúdos temáticos;*

c) *maior explicitação da articulação entre metodologias, objectivos e conteúdos;*

d) *reforço da articulação vertical com o 3º Ciclo;*

e) *referência às possibilidades de articulação interdisciplinar;*

f) *exclusão dos itens que a experiência mostrou constituírem sobrecarga;*

g) *inclusão de outros conteúdos de acordo com as sugestões recebidas.*

Assim, não se previa que se efectuassem reformulações profundas. Apesar disso, como detalharemos adiante, a experiência aconselhou a introdução de mudanças relativamente substanciais. Algumas mudanças têm a ver com uma agregação dos capítulos em temas unificadores, a introdução de parágrafos optativos ao longo do programa (em vez de um só capítulo de opção no fim do 12º ano), ou o estudo de questões metodológicas como as heurísticas de Polya. Outras mudanças têm a ver com a fusão entre as colunas de "Desenvolvimento do Tema" e "Objectivos". Aquilo que se pretendeu foi responder às críticas intensamente formuladas, por praticamente todos os participantes no processo, da falta de clareza que a divisão dos Novos Programas em três colunas (Desenvolvimento do Tema, Objectivos e Observações/Sugestões Metodológicas) acarreta, e sobretudo, procurar "*maior explicitação da articulação entre metodologias, objectivos e conteúdos*", o que constituiu claramente uma das maiores falhas detectadas.

Atendendo aos problemas existentes, muitos dos quais foram evidenciados durante o período de experimentação dos Novos Programas, foi impossível proceder a meras alterações cosméticas que se limitassem a alterar umas vírgulas e apenas contribuiriam para agravar os problemas actuais. Contudo este ajustamento não é, nem de longe, uma reformulação de base do programa do Ensino Secundário, que a Equipa Técnica, enquanto tal, não equacionou.

Os "velhos" programas

A necessidade da existência de novos programas tornou-se clara depois do avolumar dos problemas com o Ensino da Matemática em todos os ciclos.

José Sebastião e Silva criticou duramente os programas dos anos 60/70:

> O que é preciso é não confundir cultura com erudição e sobretudo com o enciclopedismo desconexo, imensa manta de retalhos mal cerzidos, que vão desde as guerras púnicas até ao sistema nervoso da mosca. É esse, a bem dizer, o tipo de cultura que tende a produzir o ensino tradicional, baseado num sistema de exames que só permite apreciar memorizações e automatismos superficiais, mais ou menos próximos do psitacismo. *(Guia para a utilização do compêndio de Matemática)*
>
> Chegou-se a fazer crescer os rapazes numa planície matemática esterilizada e esterilizadora, capaz de sufocar qualquer objecção, qualquer diálogo. Porque se quisermos que o ensino da matemática seja autenticamente vivo e fecundo, deveremos apresentar uma ciência que se faz e não uma ciência já feita. A matemática não deve desprezar o concreto, a matemática deve estar ligada à realidade física em que o pensamento matemático mergulha as suas raízes. E é sobretudo a geometria que serve de modo natural para a ligação entre o mundo físico e a abstracção ***(carta a Emma Castelnuovo**, cit. em Ens. da Mat. Anos 80, SPM, Lisboa, 1982).*
>
> É preciso combater o excesso de exercícios que, como um cancro, acaba por destruir o que pode haver de nobre e vital no ensino. É preciso evitar certos exercícios artificiosos ou complicados, especialmente em assuntos simples.(...) É mais importante reflectir sobre o mesmo exercício que tenha interesse, do que resolver vários exercícios diferentes, que não tenham interesse nenhum.(...) Entre os exercícios que podem ter mais interesse figuram aqueles que se aplicam a situações reais, concretas. *("Guia para a utilização do compêndio de Matemática")*

O ensino tradicional ignorava o "porquê" e o "para quê" e limitava-se a apontar o "como". Os alunos não entendiam, desinteressavam-se e esqueciam tudo na primeira oportunidade. Infelizmente os programas que se seguiram não resolveram nenhum destes problemas. O Prof. António St. Aubyn afirmava:

> Utiliza-se pouco a intuição na introdução de conceitos, não se apela para a experiência dos estudantes por meio de problemas simples, do que resulta uma falta de motivação e um espaço limitado à iniciativa individual.
>
> A maior parte dos alunos desconhece o significado de um teorema (...) Desconhecimento das principais técnicas de demonstração (redução ao absurdo, indução, etc).
>
> (...) programas (...) abstractos, formalistas, desligados da realidade, não motivando os jovens, (...) prática de ensino rotineira não desenvolve nos alunos capacidades de cálculo e de resolução de problemas, gosto pela descoberta e prova de novos resultados. *("Ens. da Mat. Anos 80, SPM, Lisboa, 1982")*

Até 1994/95, os alunos que terminavam o Ensino Secundário com os programas clássicos, chegavam à Prova Específica de Acesso ao Ensino Superior e apenas obtinham médias à roda de 20%, sendo impressionante a quantidade de notas inferiores a 10%. Como dizia um dos pareceres recebidos, não é admissível que um número considerável de alunos chegue à Universidade revelando lacunas como as que transparecem nos seguintes exemplos:

a) Para resolver a equação $x^2 - 5x + 11 = 0$ vem

$$x^2 - 5x + 11 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x = -11 \Leftrightarrow x(x-5) = -11 \Leftrightarrow \begin{array}{c} x = 1 \\ (x-5) = -11 \end{array} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x = 1 \\ x = -6 \end{array}\right\} \text{raízes}$$

b) $$\frac{\cancel{x}^2}{\cancel{x}^5 - 5} = \frac{1}{x^3 - 5}$$

x^3

c) $$\frac{x}{\sqrt{x^6+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^6}+\sqrt{1}}=\frac{\cancel{x}}{\underset{x^2}{\cancel{x^3}}+1}=\frac{1}{x^2+1}$$

d) $$\cos(ab)=\cos a.\cos b$$

Mas a verdade é que chegavam e com um programa que insistia sobretudo no cálculo e em "memorizações e automatismos superficiais" mas nem sequer desenvolvia as capacidades de cálculo (como também se demonstra olhando para os resultados das provas de aferição que em pouco diferiam dos das provas específicas), quanto mais a capacidade de resolver problemas matemáticos. Os alunos que concluíram o ensino secundário até ao ano de 1994/95 inclusive foram formados na sua esmagadora maioria com os denominados "programas antigos".

Além do mais, muitos outros tópicos importantes não constavam dos programas. Tópicos como Análise Combinatória, Probabilidades e Estatística, apesar de fazerem parte do programa oficial, eram completamente ignorados. A Matemática Finita encontrava-se totalmente ausente. Todos os métodos numéricos eram ignorados.

Era necessário mudar urgentemente tanto conteúdos como metodologias.

Experimentação e generalização dos novos programas

Os Novos Programas de Matemática tentaram responder a estas questões e apresentam inovações de tomo.

Contudo, o período de experimentação revelou, desde o início, inúmeros problemas. Infelizmente estes problemas não foram solucionados e até se avolumaram, de tal modo que tornaram necessário um ajustamento de programas.

Vários trabalhos foram publicados onde estes problemas são analisados, o que constitui desde logo uma base de trabalho para a elaboração deste ajustamento.

Relatórios de estudos do IIE - Instituto de Inovação Educacional:

- "*Conteúdos e contextos da Reforma Curricular no 11º ano de escolaridade - concepções e práticas de professores experimentadores*", Rui Vieira de Castro et al.
- "*O processo de experimentação dos novos programas de Matemática - Um estudo de caso*", João Pedro Ponte et al.
- "*A Aplicação dos novos programas de Matemática do 11º ano - Um estudo de caso*", João Filipe Matos et al.

Relatos da experimentação ou de pessoas ligadas à experimentação:

- "*Novos programas, que generalização para 92/93?*", Maria Margarida Graça, Maria Olímpia Máximo, Educação e Matemática , nº 19/20, 1991.
- "*Reforma Educativa: cresce a insatisfação dos professores*", J. C. Silva, Boletim da SPM, nº 22, 1992.
- "*Graves problemas na "experiência" dos novos programas de Matemática para o Ensino Secundário*", Victor Gonçalves, Boletim da SPM, nº 24, 1992.
- "*A experimentação dos novos programas de Matemática: reflexões e algumas propostas concretas*", Victor Gonçalves, Boletim da SPM, nº 25, 1993.
- "*Programa de Matemática do 3º Ciclo - uma reflexão crítica*", Dulce Baptista e Judite Barros, Educação e Matemática, 1º trimestre 1994.
- "*Geometria no 10º ano: o fracasso que era previsível...*", Eduardo Veloso, Educação e Matemática, nº 30, 1994.
- "*Experimentadores propõem 5+5+5 horas para a Matemática do Secundário*", Lucília Ramalheira e Iolanda Vasconcelos Lima, Boletim da SPM, nº 28, 1994.
- "*Métodos Quantitativos em debate*", Ana Vieira e Paulo Abrantes, Educação e Matemática, nº 30, 1994.
- "*Como vamos com os novos programa? O que dizem os professores*", F. Nunes e H.M.

Guimarães, Educação e Matemática, 3º trimestre 1994.

Análises pessoais ou de grupos de professores:

- "*Novos Programas de Matemática no Ensino Básico e Secundário*", Guilhermina Lobato, Educação e Matemática, nº 19/20, 1991.
- "*Sobre a Proposta de Novos Programas de Matemática para o Ensino Secundário*", J. C. Silva, Educação e Matemática , nº 19/20, 1991.
- "*Os programas de Matemática no Ensino Secundário*", João Pedro da Ponte, Profmat, 1992.
- "*Contagens, grafos e matrizes nos nosso programas? Talvez um dia...*", Paulo Abrantes, Educação e Matemática, nº 30, 1994.
- "*Reflexão sobre a aplicação dos Novos Programas do 10º ano*", A. Bernardes et al., Profmat, 1994.
- "*Programas do Secundário: algumas reflexões*" - 1º grupo da Escola Secundária Engº Acácio Calazans Duarte de Marinha Grande, in "Matemática em Eχame", 1995.

Além do mais, a Equipa Técnica recebeu uma quantidade considerável de documentos em que os professores experimentadores e acompanhantes exprimiam a sua insatisfação com o decorrer da experiência e reclamavam medidas adequadas. Num desses relatórios reclamava-se que é necessário "*Corrigir erros, apontar caminhos*" e explicita-se onde: "*As indicações metodológicas devem ser mais aprofundadas no sentido de perspectivar, com clareza, o desenvolvimento harmónico dos conteúdos; Indicar, sempre que necessário, os graus de complexidade a exigir ao aluno; incentivar nos professores a vontade de mudança de atitude face às pedagogias directivas; reforçar o papel do aluno na construção dos seus saberes*".
O segundo estudo de caso do IIE atrás referido afirma que "*o novo programa de Matemática do 11º ano aponta para alguma evolução em relação aos antigos programas mas resulta claramente negativo em múltiplos aspectos: deficiente organização e reduzida clareza, o facto de se manter preso da tradição no que respeita aos conteúdos temáticos, a forma tímida e superficial como é abordado o uso da tecnologia e da avaliação. (...) o programa não desenvolve nem articula de forma clara essas ideias [resolução de problemas, ligação da Matemática com a realidade, uso da tecnologia], acabando por constituir um documento sem vida em que as questões fundamentais são abordadas timidamente*", e recomenda que "*se equacione urgentemente a sua reformulação*".
No balanço da experiência feito pelo Departamento do Ensino Secundário reconhecia-se que era necessária

> "(...) *uma melhor articulação entre objectivos, conteúdos temáticos e metodologias. Esta explicitação é fundamental para a sua exequibilidade*",

recomendava-se que se efectuasse:

> "*uma melhor articulação/maior coerência de itinerário de construção de um pensamento matemático que se deseja nos alunos* (...)".

e que se deveria rever o programa do Ensino Secundário

> "*harmonizando de forma explícita os conteúdos, os objectivos e a metodologia* (...)".

Um programa para o ano 2000

Os alunos que terminarem o Ensino Secundário no ano 2000 terão utilizado já este programa. A elaboração dos programas é feita com uma antecedência imensa, sendo necessário prever que formação matemática irão esses alunos necessitar na sua vida escolar e profissional posterior.
A orientação seguida tomou em conta a experiência nacional e internacional (detalhada adiante).
José Sebastião e Silva já afirmava que **"A modernização do ensino da Matemática terá de ser feita não só quanto a programas, mas também quanto a métodos de ensino"** (*Guia para a utilização do compêndio de Matemática*, 1º vol.). E concretizava:

O professor deve abandonar, tanto quanto possível, o método expositivo tradicional, em que o papel dos alunos é quase cem por cento passivo, e procurar, pelo contrário, seguir o método activo, estabelecendo diálogo com os alunos e estimulando a imaginação destes, de modo a conduzi-los, sempre que possível, à redescoberta. (*Guia para a utilização do Compêndio de Matemática*, 1º vol.)

Ensinar matemática sem mostrar a origem e a finalidade dos conceitos é como falar de cores a um daltónico: é construir no vazio. Especulações matemáticas que, pelo menos de início, não estejam solidamente ancoradas em intuições, resultam inoperantes, não falam ao espírito, não o iluminam.*(Guia para a utilização do compêndio de Matemática)*

A meu ver são principalmente o sentido crítico e a autonomia mental as qualidades que um professor de matemática se deve esforçar por desenvolver nos seus alunos. *(Texto sobre Bento de Jesus Caraça, DL, 25/6/1968)*

Um dos objectivos fundamentais da educação é, sem dúvida, criar no aluno hábitos e automatismos úteis, como, por exemplo, os automatismos de leitura, de escrita e de cálculo. Mas trata-se aí, manifestamente, de *meios*, não de *fins*. *("Guia para a utilização do compêndio de Matemática", 2º/3º vol., pg. 10-11)*

Os alunos não precisam, em geral, de ser investigadores, mas precisam de ter espírito de investigação. Intuição, experiência, lógica indutiva, lógica dedutiva - todos estes meios se alternam constantemente na investigação científica, numa cadeia sem fim em que é difícil destrinçar uns dos outros.*("Guia para a utilização do compêndio de Matemática", 2º/3º vol., pg. 107-111)*

O professor não deve forçar a conclusão: deve deixá-la formar-se espontaneamente no espírito do aluno. *("Guia para a utilização do compêndio de Matemática", 1º vol., pg. 70)*

Se não houver tempo - o que é bem provável - podem-se omitir as demonstrações. O que importa, por enquanto, são as intuições: essas de modo nenhum devem faltar, (...) *("Guia para a utilização do compêndio de Matemática", 2º/3º vol., pg 81)*

Assistiu-se a uma convergência de opiniões favoráveis aos novos programas, globalmente considerados. Se quase todos entendiam que se deveria manter a abordagem metodológica proposta no texto dos novos programas, já a concretização destes princípios criou mais problemas. Efectivamente tal é um aspecto de muito difícil concretização e que por isso mereceu toda a atenção.

Na *Orientação Metodológica dos novos programas do Ensino Secundário* é afirmado que

"Tendo como pressuposto ser o aluno agente da sua própria aprendizagem, propõe-se uma metodologia em que:

- os conceitos são construídos a partir da experiência de cada um e de situações concretas;
- os conceitos são abordados segundo diferentes pontos de vista e progressivos níveis de rigor e formalização;
- se estabelece maior ligação da Matemática com a vida real, com a tecnologia e com as questões abordadas noutras disciplinas e que enquadra o conhecimento numa perspectiva histórico-cultural."*(pg. 32)*

E mais adiante:

"A utilização obrigatória da calculadora que, além de ferramenta, é fonte de actividade, de investigação e de aprendizagem, (...) A resolução de problemas, meio privilegiado para desenvolver o espírito de pesquisa, deve contemplar, além de situações do domínio da Matemática, outras, da Física, da Economia, da Geografia,... (...) o aluno será solicitado frequentemente a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios, a confirmar conjecturas, a demonstrar fórmulas e alguns teoremas."*(pg. 32)*

Mas o problema principal tem sido: como passar das boas intenções à prática? Como dizia uma pessoa no seu parecer: "*Quem dera que essa alteração seja feita de modo que os professores passem a ensinar matemática, e não técnicas de cálculo, e que os alunos passem a gostar de aprender matemática e possam sentir nessa aprendizagem alguma utilidade significativa e não apenas um obstáculo que têm de vencer para fazer o 12º ano e entrar no ensino superior*".

A opinião generalizada foi que a maioria dos princípios enunciados nas Orientações Metodológicas não se reflectia no programa propriamente dito. É por essa razão que mereceu atenção especial neste programa **a clareza dos objectivos enunciados e sua relação com as novas metodologias propostas**. Teve-se como objectivo plasmar as Orientações Metodológicas na listagem dos temas do programa propriamente dito.

Tendências internacionais

As Orientações Metodológicas apontadas nos Novos Programas e que se integram nas propostas inovadoras de José Sebastião e Silva, estão de acordo com as tendências internacionais que personalidades e instituições vêm defendendo para o Ensino da Matemática.

Temos de salientar em primeiro lugar o texto do Prof. Miguel de Guzmán que se encontra publicado no Boletim da SPM nº 25 de Março de 1993, intitulado "Tendencias inovadoras en educación matemática".

O maior movimento a nível internacional em prol da melhoria do ensino da matemática deu-se recentemente nos Estados Unidos com a publicação das "Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar" da iniciativa do NCTM, a maior Associação de Professores de Matemática dos Estados Unidos, obra que se encontra editada em Portugal pela APM e pelo IIE. É de salientar que este documento, que constitui um verdadeiro programa de matemática para todos os anos do ensino não superior, recebeu o apoio explícito da AMS - American Mathematical Society, ASA - American Statistics Association, MAA - Mathematical Association of America, SIAM - Society for Industrial and Applied Mathematics, as quatro maiores Associações Científicas de Matemática dos Estados Unidos.

Os mais recentes programas de Inglaterra são ainda mais ambiciosos em termos de metodologias do que os novos programas portugueses, mas não se pode esquecer que em Inglaterra existe uma muito maior tradição de inovação no ensino da matemática. O documento "Mathematics in the National Curriculum" do "Welsch Office" do "Department for Education" com data de Janeiro de 1995, que define os programas que entraram em vigor entre Agosto de 1995 e Agosto de 1997, divide o programa dos 10º/11º anos em 5 grandes temas:

Usando e aplicando a matemática
Números
Álgebra (expressões, equações, inequações, gráficos)
Forma, espaço e medidas
Tratamento de dados

A título de exemplo eis uma recomendação retirada de cada um destes temas:

Usando e aplicando a matemática: "Explicar e analisar a escolha de abordagens para resolver problemas estabelecidos em contextos ou áreas da matemática que são novas para eles [os alunos]"

Números: "compreender e usar proporções directas e inversas"

Álgebra: "interpretar e aplicar a transformação de funções no contexto da sua representação gráfica, incluindo $y = f(x+a)$, $y = f(kx)$ e $y = f(x) + a$, aplicados a $y = f(x)$.

Forma, espaço e medidas: "aplicar métodos vectoriais simples na resolução de problemas"

Tratamento de dados: "compreender quando e como estimar probabilidades condicionais"

É ainda definido como objectivo horizontal: "Os alunos devem ter oportunidade de aplicar o seu conhecimento, compreensão e capacidades para resolver problemas de crescente complexidade num grande leque de contextos." É repetidamente recomendado o uso de calculadoras e computadores, de forma a desenvolver equilibradamente "métodos de resolução sem calculadora e com calculadora".

Pensa-se pois que as Orientações Metodológicas definidas nos Novos Programas, e que se pretendem reforçar e clarificar neste programa, vão na direcção certa.

Extensão do programa

A aplicação experimental e os primeiros anos da generalização dos novos programas do ensino secundário comprovam que, desde o início, estes não foram configurados para a carga horária semanal actual. As reclamações dos professores no sentido de ampliar a carga horária semanal vêm baseadas no facto da aplicação experimental ter sido feita utilizando 5 ou mais horas semanais, sem que, mesmo então, a totalidade dos itens do programa tivesse sido abordada. Os próprios autores alertaram para as condições de aplicação e reclamaram sobre as diferenças entre o total teórico e o total real das horas destinadas à leccionação. O programa do "12º ano foi o que na prática se revelou mais extenso e impraticável. Por isso uma das principais preocupações foi de propor um programa exequível na carga horária definida por lei.

Por outro lado, muitas pessoas sugeriram que não se mantivesse a actual dispersão de capítulos pois, fazendo-se uma abordagem relativamente superficial em vários capítulos, os alunos quando chegavam ao seguinte já haviam esquecido tudo. Por outro lado havia que procurar uma "*melhor clareza e melhor organização dos conteúdos temáticos*". Assim optou-se por propor **3 grandes temas para cada um dos anos**, cada um a ser abordado em cada período escolar, o que recolheu opiniões bastante favoráveis. Nesta programação deve obviamente levar-se em conta que, por lei, há períodos reservados para a Área-Escola e que os professores podem dispor de 6 dias por ano para participação em encontros. Ambas estas componentes são importantes na vida da Escola pelo que a programação feita tem em conta esta realidade. Procurando trabalhar com valores médios, entendemos tomar como referência 92 horas de ensino assim distribuídas:

1º período: 36 aulas
2º período: 36 aulas
3º período: 20 aulas

Claro que nem todos os anos será possível reservar esse número de aulas úteis em cada período. Os professores farão as adaptações que o bom senso aconselhar, de modo a preservar sempre um total mínimo de 92 horas de ensino; entende-se que menos do que este número de horas de ensino não é admissível.

Assim, a distribuição de tópicos é a seguinte:

10º ano		
Tema I	Geometria no Plano e no Espaço I	36 aulas
Tema II	Funções e Gráficos	36 aulas
Tema III	Estatística	20 aulas
11º ano		
Tema I	Geometria no Plano e no Espaço II	36 aulas
Tema II	Introdução ao Cálculo Diferencial I	36 aulas
Tema III	Sucessões	20 aulas
12º ano		
Tema I	Probabilidades e Combinatória	30 aulas
Tema II	Introdução ao Cálculo Diferencial II	36 aulas
Tema III	Trigonometria e Números complexos	20 aulas

Há uma reserva de 6 horas no fim do Tema I do 12º ano para obviar a eventuais atrasos, para dar algum dos tópicos facultativos ou para antecipar a leccionação do Tema II do 12º ano, conforme a prática aconselhar.

Parece ser um programa exequível nas 4 horas definidas legalmente.

A ideia da distribuição por temas pressupõe que só em casos muito excepcionais o tema relativo a um período extravase esse período. O professor deve fazer a sua planificação de modo a que em cada período seja apenas abordado o tema desse período para que esse tema seja efectivamente cumprido. Quaisquer atrasos devidos a circunstâncias excepcionais devem ser compensados adequadamente.

A profundidade do tratamento de muitos temas é variável e o professor pode adaptá-la ao interesse e capacidade dos alunos. Além do mais alguns tópicos são de tratamento facultativo. Esses vão indicados com um (*). Estes tópicos não significam um aumento do programa, mas fornecem uma boa ocasião de fornecer mais matemática a alunos mais interessados, mesmo que haja apenas um ou dois destes alunos numa dada turma. Caso seja julgado conveniente pode indicar-se a estes alunos o estudo de algum dos tópicos facultativos sob a forma de trabalho de projecto ou estudo extra aula.

Conteúdos do programa anterior não integrados neste programa

Procurou-se apresentar um programa que, sem sombra de dúvidas, seja exequível nas 4 horas semanais previstas para a disciplina de Matemática. Isso implica que uma restrição de conteúdos seja efectuada em relação ao programa anterior.

Assim os seguintes conteúdos não aparecem, <u>como tal</u>, neste programa:

- Propriedades do símbolo Σ
- O Conjunto $\mathbb{R}$ (Dízimas; Majorantes e minorantes... - Os temas principais deste assunto são abordados à medida que vão sendo precisos em ligação com outros assuntos)
- Axiomas e geometria sintética
- Analogia dos senos
- Aplicação do produto escalar à demonstração de alguma propriedades da geometria e da trigonometria
- Derivadas de funções implícitas
- Estudo detalhado de Cónicas
- Tangentes e normais a Cónicas
- Equações vectoriais e paramétricas de planos
- Resolução de sistemas pelo método de Gauss
- Cálculo integral; primitivação
- Estudo analítico da sucessão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
- Regras para levantamento de indeterminações
- Estruturas algébricas

Não se entende que estes itens representem temas menos importantes, mas que é ilusório pensar que é possível ensiná-los só porque aparecem em documentos oficiais. A nossa história recente está cheia de programas sobrecarregados muito bem intencionados mas que nunca são cumpridos, mesmo quando a metodologia usada é apenas a da aula magistral com aulas de exercícios.

Temas ausentes do presente ajustamento

Tratando-se de um ajustamento e tendo em atenção a limitação das 4 horas por semana, há vários temas que parecem importantes, mas que não foi possível sequer considerar. São temas que, ou nunca fizeram parte dos programa do Ensino Secundário, ou tendo feito parte, foram postos de lado por alguma razão mais ou menos circunstancial. Sem entrar em discussões exaustivas sobre o grau de aprofundamento com que deveriam ser tratados, eis alguns dos temas que, com vantagem, deveriam fazer parte da formação de um aluno ao terminar o Ensino Secundário.

- Lei dos co-senos (Carnot) e resolução de triângulos obliquângulos;
- Geometria das transformações;
- Matemática discreta (grafos, matrizes e teoria de jogos);
- Erros, aproximações e métodos numéricos;
- Funções trigonométricas inversas (num contexto de trigonometria mas sobretudo como áreas de certas figuras);
- Curvas em coordenadas polares e paramétricas;
- Teoria dos algoritmos.
- Geometrias não euclidianas.
- Teoria dos números.
- Sistemas dinâmicos.

Numa próxima reformulação do programa, sujeita a menos restrições do que o actual ajustamento, deverá ser analisada a inclusão destes temas bem como daqueles referidos no parágrafo anterior.

Sobre a escolha dos Temas

Quando há tantos temas para escolher e alguns não podem ser considerados para se poder planear um programa que seja exequível nas 4 horas semanais previstas, é necessário fazer opções. A opção feita foi no sentido de garantir um razoável equilíbrio entre as diversas áreas da Matemática, entre a Geometria, a Análise, a Álgebra, a e a Matemática Discreta (Estatística, Análise Combinatória e Probabilidades), integrando tanto quanto possível o estudo dos diversos temas e estabelecendo o maior número de conexões possíveis, para que os alunos possam ver que são faces diferentes de uma mesma moeda. Foi dada uma posição de destaque à Geometria e são dadas indicações que permitem que seja retomada em praticamente todos os outros temas do programa. Deu-se prioridade à criação de condições para uma grande diversidade de tipos de trabalho em Matemática, tanto de carácter geral como específicos de cada tema, em detrimento de um aprofundamento que na maioria das vezes é ilusório se não for cimentado na compreensão dos processos elementares.

Coordenação com o 3º ciclo

Apesar de o programa de Matemática para o 3º ciclo ser relativamente extenso, partiu-se do princípio que irá ser cumprido na sua maior parte.

Para que fique claro exactamente que conhecimentos se pressupõe serem conhecidos do 3º ciclo, no início de cada capítulo aparecem indicados os pré-requisitos de cada capítulo.

Contudo, por variadas razões, os alunos poderão não ter cumprido alguma parte do programa do 3º Ciclo, ou revelar dificuldades especiais nalgum capítulo (na medida em que poderão ter tido nota negativa a Matemática no 9º ano). Para esses alunos recomendamos enfaticamente que sejam utilizadas horas do Apoio Pedagógico acrescido para colmatar as suas lacunas e dar garantias de sucesso em Matemática a partir do 10º ano.

Apoio Pedagógico Acrescido

O Apoio Pedagógico Acrescido - APA - deve ser utilizado com os alunos que dele precisam. É óbvio que estão nessas condições os alunos que reprovaram a Matemática no 9º ano, ou que tendo obtido aprovação revelam deficiências consideráveis. Estes alunos, se fizerem um esforço razoável, poderão na sua maioria obter um aproveitamento aceitável. Para isso é preciso que a Escola faça alguma coisa por eles. Deve ser feito o diagnóstico das suas dificuldades o mais cedo possível, eventualmente logo no final do 9º ano. No início do 10º ano deve ser definido um plano de acção em que fique claro o que a Escola vai fazer pelos alunos e aquilo que a Escola espera deles para que possam obter sucesso. Assim, os alunos seriam integrados em turmas normais e teriam desde o início um acompanhamento suplementar de um certo número de horas semanais em grupos mais ou menos pequenos. É evidente que será necessário gastar algum tempo a pensar, a diagnosticar dificuldades e a conceber alternativas (que não sejam simplesmente mais do mesmo, nem longas listas de exercícios). É fundamental que a escola dê sinais inequívocos de se interessar pelo destino dos alunos. O plano definido deveria ser avaliado periodicamente (em princípio trimestralmente) devendo ser eventualmente reformulado onde se considerar necessário.

Do mesmo modo se deveria proceder para os alunos que concluírem o 10º e o 11º ano com dificuldades, devendo desde o início do ano lectivo seguinte ser preparado um plano de recuperação adequado no âmbito do APA que co-responsabilize professores e alunos envolvidos.

A experiência mostra que há vantagem de as horas de Apoio Pedagógico Acrescido se concentrarem no primeiro período escolar, para que, colmatadas as lacunas detectadas, os alunos se integrem na aprendizagem normal.

É muito importante a procura de formas imaginativas de recuperar as dificuldades reveladas pelos alunos; não parece muito eficaz que o APA se limite a fornecer horas suplementares para fazer mais exercícios, mais ou menos rotineiros; devem ser experimentadas formas variadas, por exemplo na forma de trabalhos de projecto ou de salas de estudo, podendo desenvolver-se materiais específicos; convinha que esses materiais e as experiências tidas com eles fossem devidamente divulgadas para que outros professores pudessem ter mais sugestões sobre como proceder em situações semelhantes. ■