Partilhas Justas:

Como obter uma quota justa

A MATEMÁTICA NO SECUNDÁRIO E O SEU PROJECTO DE APLICAÇÃO (HIMAP)

O objectivo do HiMAP é desenvolver, através de uma comunidade de utilizadores e investigadores, um sistema de módulos de ensino da matemática do Secundário e das suas aplicações que possam ser utilizadas para fortalecer a preparação dos professores ao nível do ensino Secundário. O Projecto é controlado por um conselho nacional de aconselhamento e um conselho editorial de matemáticos, cientistas, e educadores. O HiMAP foi fundado pelo National Science Foundation para o Consortium for Mathematics and its Aplications (COMAP), Inc., uma associação sem fins lucrativos envolvida na pesquisa e desenvolvimento de curriculum na educação matemática.

Partilhas Justas:
Como obter uma quota justa.

Manuscrito original preparado sob NSF Grant No.MDR-8550106

Sandi Bennett
North Central High School
Spokane, WA

Duane De Temple
Washington State University
Pullman, WA

Michael Dirks
North Central High School
Spokane, WA

Bob Newell
Mead High School
Spokane, WA

Jack M. Robertson
Washington State University
Pullman, WA

Bob Tyus
Mead High School
Spokane, WA

Original illustrations by
Elizabeth Jaszii
Spokane, WA

Como Utilizar este Módulo.

Existem uma série de coisas que os professores devem ter em conta ao utilizar este módulo. Vejamos.

- Os comentários para os professores encontram-se no manual do professor. Este inclui os objectivos das várias actividades, itens que devem ser realçados aos alunos, e, claro as respostas às actividades e exercícios.

- Os autores indicaram o nível de dificuldade para cada actividade ou exercício, colocando uma letra maiúscula A, B, ou C entre parêntesis junto á resposta no manual do professor. As questões de nível A são as mais fáceis, o nível B indica dificuldade média, e os problemas de nível C foram considerados os mais difíceis. Os professores podem pois gerir esta unidade de acordo com a turma que tiverem.

- Aparência do manual difere ligeiramente da versão dos alunos, as referências internas das páginas são idênticas em ambas as versões.

- Uma vez que se pede aos estudantes que apresentem todas as notas e cálculos, foi deixado em cada página espaço para essa finalidade. Pode ser no entanto necessário espaço adicional.

Conteúdo

Parte 1. Divisão de um Bolo

Parte II. Dividindo Bens

This material was prepared with the support of the National Science Foundation (NSF) Grant No. DPE8318104. Recommendations expressed are those of the author and do not necessarily reflect the views of the NSF or of the copyright holder.

All correspondence should be addressed to:

Professor Joseph Malkevitch
COMAP, Inc.
60 Lowell Street
Arlington, MA 02174

Published by: COMAP, Inc., 60 Lowell Street, Arlington, MA 02174

ISSN 0889-2652

Manual do Professor

Dois problemas se colocam e são respondidos neste módulo.

1. Imaginar um método de dividir justamente um objecto sempre divisível, como seja uma fatia de bolo, entre duas ou mais pessoas.
2. Imaginar um método de dividir justamente um conjunto de objectos, como sejam uma casa, um terreno, e um carro, entre duas ou mais pessoas.

Estes problemas são típicos dos considerados no processo de desenvolvimento rápido da teoria dos problemas de partilha justa. Embora possa ser inconsequente que algoritmos possam ser encontrados para assegurar a divisão justa de um bolo, muitos dos casos de justeza e de uma maneira geral dos métodos similares de ataque, estão presentes em problemas de consequência séria.

Por exemplo, se uma grande firma está em vias de instalar um novo sistema telefónico através da qual uma conta única será apresentada à firma em vez de um determinada número de sub-unidades que antes eram representadas separadamente, como deverão ser distribuídos os custos?
Que método de votação deve ser adoptado por uma empresa se se pretende representar justamente os vários grupos dos seus investidores individuais?
Como devem ser escritas as leis que definem as contribuições para distribuir justamente a carga fiscal num país?
Será que existem métodos de repartição de bens, que os herdeiros considerem justos, diminuindo a necessidade de recorrer a tribunal para um arbítrio final?

Quando existem injustiças em algum destes pontos, como são avaliadas? Encontram-se actualmente em desenvolvimento teorias matemáticas para todos estes pontos. (Ver Fair Allocation, de H.Peyton Young, por exemplo).
Quais são algumas das características comuns destes diferentes problemas? Primeiro, deve-se definir **justeza.** Por exemplo, alguém pode sugerir que três pessoas se devem sentir justamente tratadas quando dividem uma porção de bolo entre elas sempre que um dos seguintes critérios seja atingido.

Devem receber uma porção que um árbitro independente considere um terço do bolo.
Devem receber cada uma porção que considerem ser um terço do bolo.
Devem receber cada uma porção que não trocariam por outra.

Cada um destes critérios garante algum grau de justeza, mas as garantias não são todas igualmente fiáveis. A regra geral é que quanto mais garantias forem pedidas mais difícil é encontrar um algoritmo adequado. De facto, em alguns casos notáveis tal como repartir um corpo representativo similar ao da House of Representatives e na decisão da seriação geral de um grupo de uma lista de alternativos originando o ranking individual de cada um no grupo, é sabido que o método pode satisfazer sempre uma pequena lista de critérios razoavelmente justos. Existem alguns pontos de referencia recentes «teoremas de impossibilidade» que direccionam problemas sociais bastante antigos.

As condições de justeza que cada um adopta em cada um destes pontos desempenham o papel de axiomas num sistema lógico/matemático. Idealmente esperamos construir e caracterizar todos os métodos que satisfaçam o conjunto de critérios de justeza. No sentido contrário, se algum método é dado, podemos questionar que condições de justeza se encontram satisfeitas e quais as que o não são. A aproximação axiomática a estes problemas sociais continua em desenvolvimento.

Um outro aspecto comum é o papel central do algoritmo. Será que a «solução» satisfaz verdadeiramente as necessidades a que se destina? Dados mais do que um algoritmo, qual deve ser preferido e em que casos? Muitas vezes não existe uma melhor solução à partida, o que vai contra aquilo que fomos levados a esperar das nossas experiências matemáticas anteriores nas ciências exactas.

Na maioria das aplicações matemáticas aos problemas do mundo real, assume-se a simplificação e ignoram-se as características mais complexas. "O melhor é não fazer ondas". Por exemplo, assume-se que cada indivíduo participe no mesmo pé de igualdade, mas o que acontecerá se alguns se aliarem? Na divisão de bens parte-se do princípio que os pagamentos em dinheiro podem ser feitos ao bem sem induzir um stress financeiro aos herdeiros. O que acontece à justeza se àquele que avaliou mais alto a casa, se pede para fazer um pagamento à margem em dinheiro, ao bem, que não tem prontamente disponível . Enquanto o algoritmo, que divide justamente uma porção de bolo o faz de modo correcto, estando este congelado ou não, a presença de uma noz (assumindo que esta seja indivisível) pode complicar seriamente o assunto.

Os materiais apresentados neste módulo são concebidos para despertar tanto quanto possível a atenção dos alunos para estes temas. Aos alunos são fornecidas oportunidades de explorar os assuntos da justeza, chegar aos seus «axiomas», e desenvolver, testar , e reformular os seus algoritmos. Os materiais são também concebidos de modo a serem flexíveis, tanto em termos do tempo gasto com eles, como do nível de pormenor que é apresentado. A classificação A, B ou C apresentada antes de cada resposta aos exercícios indica o nível de dificuldade, sendo A o mais fácil e C o mais complicado. A dificuldade das tarefas pode ser adaptada à capacidade da turma através de uma selecção minuciosa das páginas do manual do alunos que irão ser utilizadas. Uma turma atenta irá provavelmente melhorar à medida que for respondendo a novos tipos de questões.

Finalmente podemos listar alguns objectivos específicos. A finalidade destes materiais é:

- Submeter os alunos a algumas novas aplicações da matemática nas ciências sociais.
- Fornecer algumas experiências interactivas de resolução de problemas aos alunos.

- Informar os alunos do trabalho desenvolvido desde 1945 por eminentes matemáticos nos problemas do dia a dia das ciências sociais.(A visão histórica no final desta unidade fornece detalhes de um conjunto de resultados relacionados.)
- Informar os alunos que os matemáticos dos nossos dias não se dedicam só a trabalhar em aplicações tradicionais da matemática às ciências exactas.
- Fornecer aos alunos experiências que os conduzam a formular cuidadosamente problemas, a partir de dados pouco concretos, procurando uma solução algorítmica para esse problema, comparando várias soluções, e comunicando de seguida os seus resultados.

Antes de ensinar este módulo os professores deverão ler a breve história, que se encontra no final da versão para alunos e como tal é apresentada na tabela de conteúdos(Índice).

Módulo series do HiMAP

HiMAP Module 1

Teoria Matemática das Eleições

de Joseph Malkevitch and Gary Froelich

Mostra como os matemáticos podem conceber e analisar métodos eleitorais e de seriação, incluindo a discussão do trabalho do vencedor do prémio Nobel Kenneth Arrow.

HiMAP Module 2

Relações Recorrentes-«Contando para trás»

de Margaret B. Cozzens and Richard D. Porter

Explora o aparecimento de relações recorrentes (equações diferenciais) e soluções para as mesmas no contexto da aplicação do computador às ciências.

HiMAP Module 3

As Matemáticas do Conflito

de Frank Zagare

Modelos matemáticos aplicando os principais conceitos de analise da teoria dos jogos a situações de conflito e interesse.

HiMAP Module 4

Simetria, Movimentos Rígidos, e Padrões

De Donald Crowe

Um olhar imaginativo à classificação e aplicação dos quatro movimentos rígidos de um avião, os sete padrões de margem e os dezassete padrões de fundo.

HiMAP Module 5

Utilizando Percentagem

de JoAnne S. Growney

Uma revisão da percentagem que realça a sua inutilidade numa grande variedade de situações. A utilização de calculadoras é encorajada com este módulo.

HiMAP Module 6

Resolvendo Problemas Usando Grafos

de Margaret B. Cozzens and Richard D. Porter

Olha para uma variedade de problemas (problemas do caixeiro viajante, problemas do caminho mais curto) e utiliza técnicas da teoria dos grafos para resolver cada tipo de problema.

HiMAP Module 7

Gerações de Estudantes

de Stephen I. Brown

Uma introdução ao papel e estratégias (heurísticas) dos alunos na formulação de problemas. Ensina os alunos a colocar, e não só, a resolver problemas.

HiMAP Module 8

O Problema da divisão : A Procura da Democracia Perfeita

de Jack M. Robertson, et al.

Uma análise profunda dos vários métodos de lidar com problemas de divisão de representação política. Existem edições para alunos e para professores.

Novos módulos estão em contínuos desenvolvimento. Actualmente *Partilha Justa*, de Duane De Temple, et- al.,e *A Mathematical Look at the Calendar* de Richard L. Francis está em produção. Contacte COMAP, Inc. periodicamente para ver que novos materiais estão prontos a ser utilizados

Parte I

Divisão de um Bolo

1. Introdução

Um acontecimento comum em qualquer sociedade é o de que as pessoas têm de partilhar certas coisas. É desejável que o modo como cada coisa é dividida seja considerada justa por aqueles que estão envolvidos.

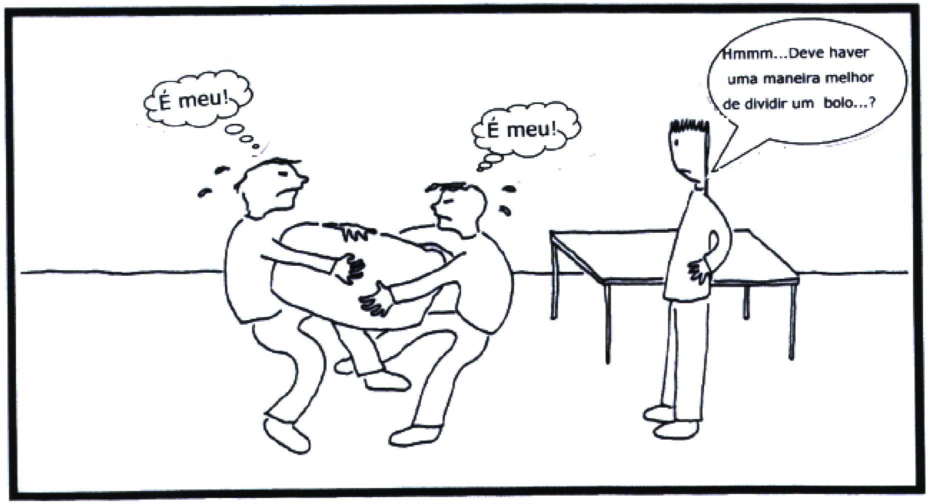
Um método de divisão justa envolve uma aproximação autoritária, na qual uma agência ou indivíduo imparcial distribui as partes. Por exemplo a Federal Communication Commission (FCC) decide como as ondas radioeléctricas deverão ser partilhadas entre as diversas estações de rádio e televisão, e as estações envolvidas podem ou não aceitar a decisão da FCC como justa.

Outro método de divisão justa permite aos envolvidos ter um papel activo na decisão do modo como a divisão irá ser feita. O objectivo é conceber um método de divisão dos bens de modo a que, cada pessoa sinta que a parte que recebeu constitui a parte justa. **É este tipo de aproximação que é o assunto desta unidade.**

2. Alguns Métodos de Divisão Justa – A

Bill e a sua irmã Jill têm uma última fatia de bolo, e querem dividi-la. Eles querem dividir o bolo justamente, mas não sabem ao certo como devem faze-lo. Cinco métodos de como dividir o bolo encontram-se listados abaixo. Ordena-os a partir daquele que consideras ser o melhor até ao pior. Justifica a tua ordenação. (São permitidos empates).

1. A mãe corta o bolo naquilo que ela considera ser partes iguais e dá uma a cada filho.
2. A mãe corta o bolo naquilo que ela considera ser partes iguais e deixa a Jill escolher a fatia que ela quer; o Bill fica então com a parte restante.
3. A mãe corta o bolo naquilo que ela considera ser partes iguais, e o Bill e a Jill lançam a moeda ao ar para ver quem escolhe a primeira fatia.
4. O Bill corta o bolo e distribui as fatias.
5. O Bill corta o bolo e a Jill escolhe a primeira fatia.

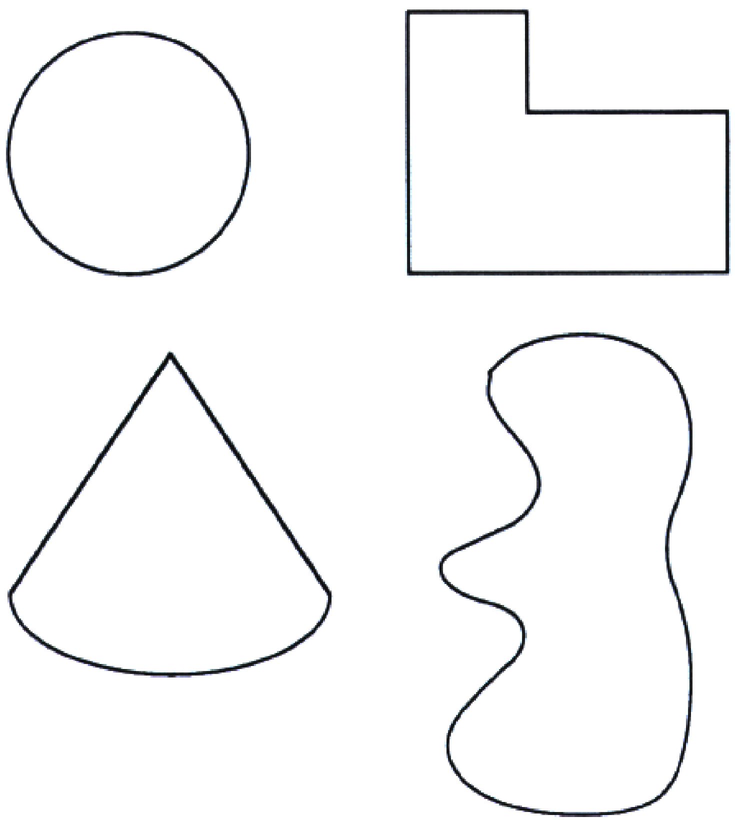


2. Alguns Métodos de Divisão Justa – A

1. O Bill e a Jill são forçados a aceitar a opinião de uma autoridade exterior. É possível que nem o Bill nem a Jill fiquem satisfeitos com a fatia que ele ou ela recebem.
2. À Jill é garantida uma fatia aceitável pela sua escolha; ao Bill não.
3. A primeira pessoa a escolher obterá aquilo que ele ou ela considera uma fatia aceitável; à segunda pessoa a escolher não é garantida a satisfação.
4. O Bill irá gostar deste algoritmo!
5. **Este é um exemplo importante.** Certifique-se que os alunos vêem que isto garante tanto ao Bill como à Jill uma fatia que eles consideram, justa pelos seus próprios critérios. Na actividade «dividindo o bolo entre três pessoas - A , procuramos um algoritmo deste tipo para três pessoas. Esta é uma boa altura para olhar para o problema 1A na página 12.

2. Alguns Métodos de Divisão Justa – B

Quatro bocados de um bolo estão representados abaixo. Utiliza o método da actividade anterior que consideraste como o mais justo e pelo menos um dos outros métodos para dividir os bocados em duas porções iguais.



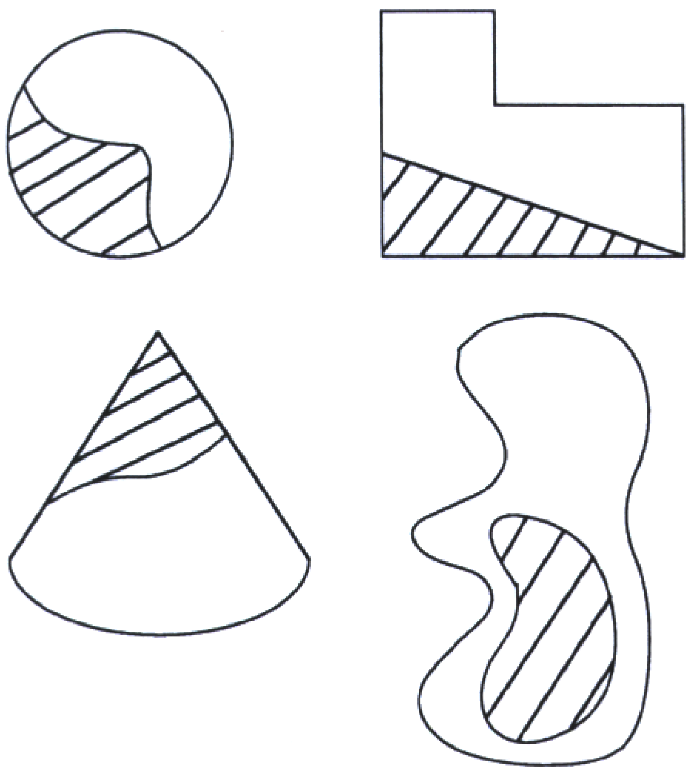
Continuas a achar que a ordenação da actividade anterior é apropriada? Senão o que mudarias. Porquê?

2. **Alguns Métodos de Divisão Justa – B**

Isto é prática e deve ser feito rapidamente ou deixado para trás.

2. Alguns Métodos de Divisão Justa – C

Quatro pedaços de um bolo estão representados abaixo. Em cada um dos desenhos, uma região sombreada representa uma camada de cobertura. Usando o método das duas actividades anteriores que consideraste o mais justo e pelo menos um dos outros métodos, divide os bocados de bolo em duas porções iguais.



Será que o método que preferiste funcionou correctamente nestes bocados? Senão, qual é o problema?

2**. Alguns Métodos de Divisão Justa – C**

Esta actividade pretende mostrar que o problema é mais do que obter metade do volume do bolo. A cobertura irá alterar as avaliações; alguns irão gostar de cobertura e valorizar mais essa parte do bolo; alguns não e irão desvalorizar a parte coberta. A questão é que através do método 5 na **secção 2-A** , ambas as pessoas ficarão satisfeitas seja qual for a sua opinião acerca da cobertura.

3. Alguns Pressupostos Básicos

Se o problema da partilha - divisão justa pelos indivíduos envolvidos é conseguir uma solução as seguintes condições devem ser aceites.

- Diferentes pessoas podem ter diferentes opiniões acerca do valor de um objecto.
- «Justeza» deve ter em consideração a opinião de cada pessoa, mesmo que esta não coincida com a opinião de mais ninguém. Para dividir algo justamente, cada pessoa deve obter uma porção que ela julgue ser justa, do seu próprio ponto de vista.
- Cada pessoa pode dividir um objecto em partes que ela própria considere serem iguais.
- Se um objecto é dividido em partes, cada pessoa pode determinar um valor fraccional para cada uma destas partes. A soma das partes fraccionais é igual a um.
- O valor que uma pessoa atribui a uma parte de um objecto pode envolver algo para além do tamanho desta parte.

3. Alguns Pressupostos Básicos

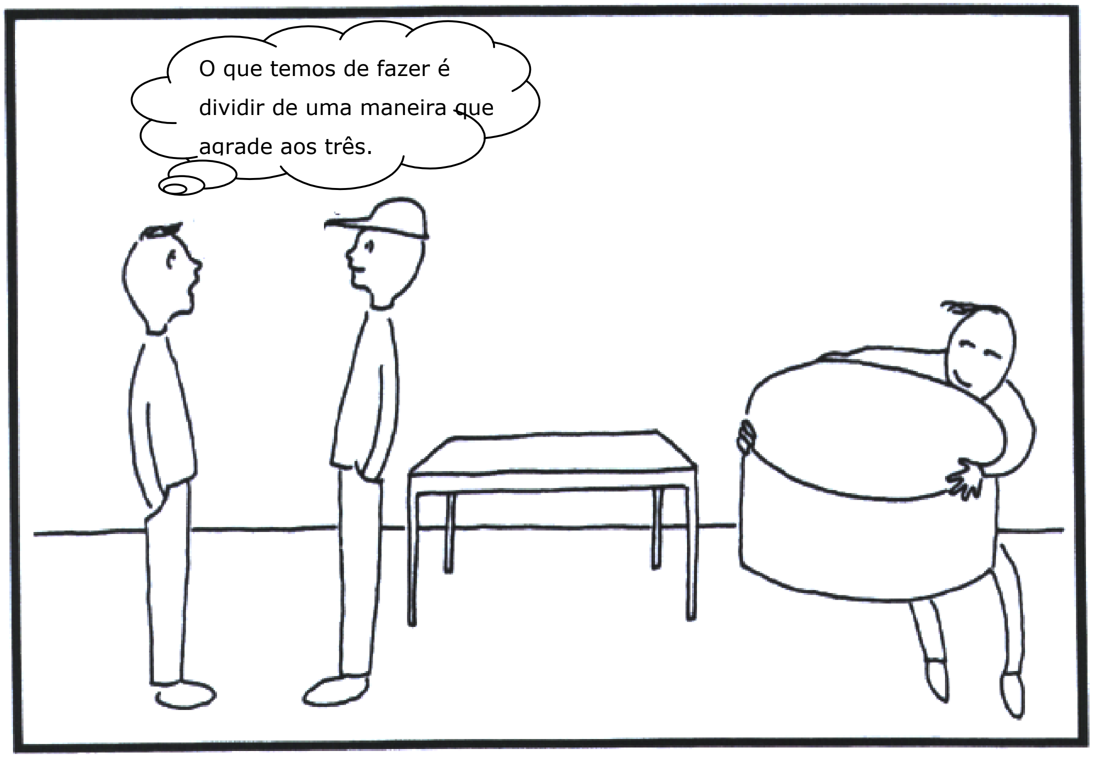
Nós fazemos alguns pressupostos ao formularmos os nossos problemas. Estes pressupostos desempenham o mesmo papel que os axiomas num curso de geometria. Os dois primeiros pressupõem que cada pessoa deverá ficar satisfeita do seu próprio ponto de vista independentemente do que os outros pensam do valor das partes. O terceiro pressuposto diz que cada pessoa pode dividir um objecto em metades, terços e quartos, etc. iguais do seu próprio ponto de vista. Isto implica também que uma pessoa pode dividir o objecto em um terço, e em porções de um terço e de dois terços.

O quarto pressuposto diz que se uma pessoa divide um objecto, outra pessoa pode atribuir o seu próprio valor às partes. A segunda pessoa não necessita de considerar as partes de igual valor só porque o divisor o faz. O pressuposto final considera que o problema envolve algo mais que somente a divisão do item pelo seu volume geométrico. Iremos ter em conta os meios, terços etc. mas devemos lembrar que não se trata de volumes mas de como os indivíduos envolvidos valorizam às porções.

4. Dividindo um Bolo entre Três Pessoas - A

Suponha que o Bill e o Jill estão prestes a dividir uma porção de bolo quando o Phil se junta a eles. Determina um método de divisão do bolo de modo a que cada um dos três receba uma porção que cada um considere justa.

Explica o método cuidadosamente e com os pormenores suficientes de modo que possa ser utilizado por qualquer outra pessoa.



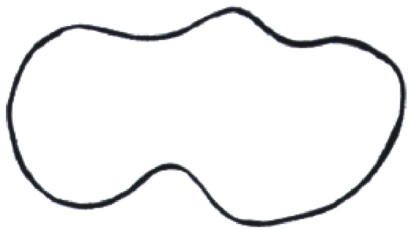
4.Dividindo um bolo entre três pessoas – A

Esta é a actividade chave da unidade. Forme grupos de três alunos e dê tempo suficiente(de um dia para o outro) para a realizarem . O problema não é fácil e muitos dos grupos não chegarão a algoritmos correctos. Mesmo assim vamos deixá-los «lutar» com um problema mais substancial, do que eles já viram na maioria dos textos. Pode deixá-los apresentar as suas «soluções» aos outros grupos para observar as suas reacções ou pode levar os grupos a trocar as suas «soluções». Isto irá mostrar a importância dos passos certos no algoritmo. Eles irão aprender bastante mesmo a partir de algoritmos incorrectos.

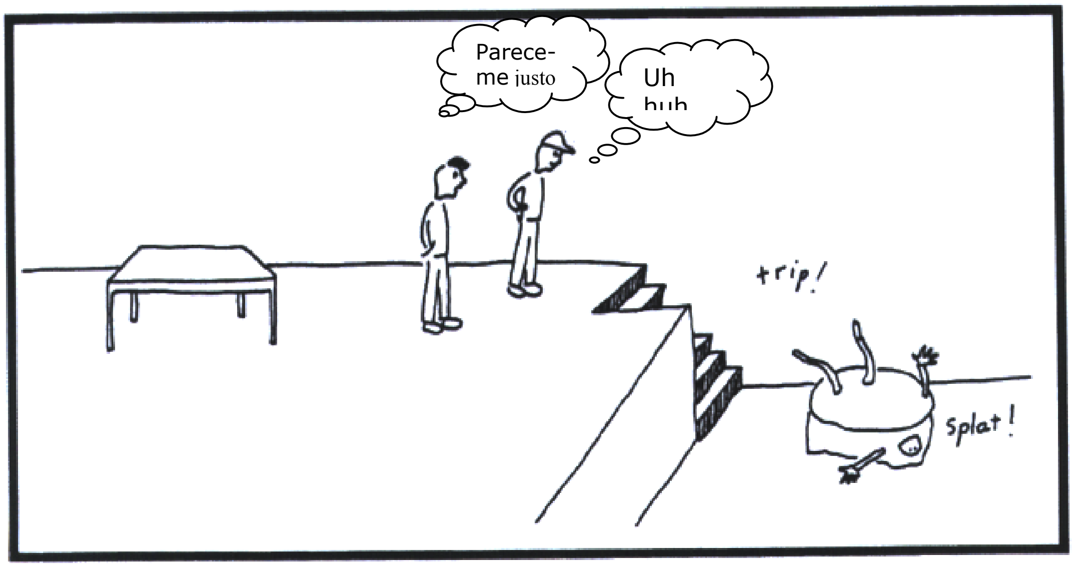
Não desespere se tiver de ir para casa pensar numa solução. Isto continua a acontecer mesmo depois de mais experiência com a unidade. Descobrimos que o interesse dos alunos muitas vezes aumenta quando isto acontece.

4. Dividindo um Bolo entre Três Pessoas - B

Tenta o teu método num pedaço de bolo com a porção de bolo apresentada seguidamente. Continuas satisfeito com o teu método? Se não revê-o.



Justifica porque ou o teu método original (se este te satisfaz) ou o teu método revisto irão garantir que cada um dos três indivíduos irá receber uma porção que considere ser justa do seu próprio ponto de vista.



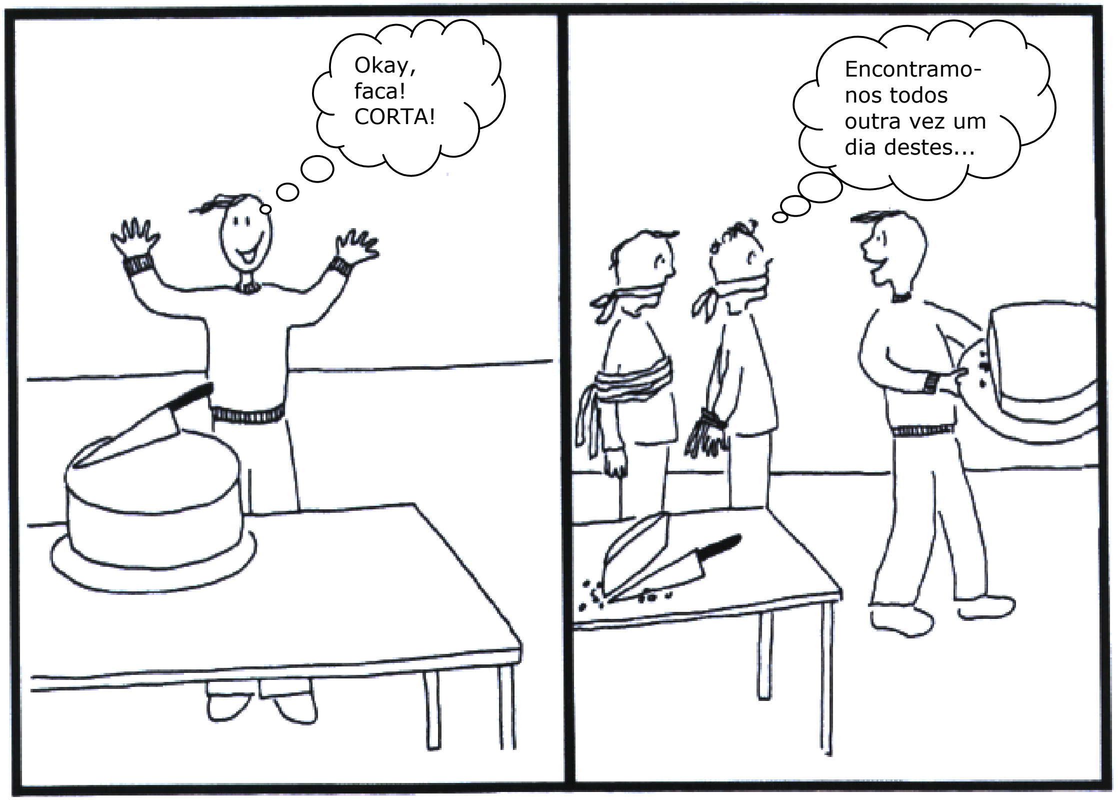
4.Dividindo um Bolo entre Três Pessoas – B

O objectivos desta actividade podem ser atingidos através da discussão na sala de aula ou por troca de algoritmos entre grupos. Em qualquer caso, a sua justificação deve ser dada através de um algoritmo escrito, tal como o dado por «Outro Algoritmo de Divisão Justa» na página 10.

5. A Solução da Faca Deslizante

O método seguinte conduz a uma divisão justa de uma porção de bolo entre três pessoas.

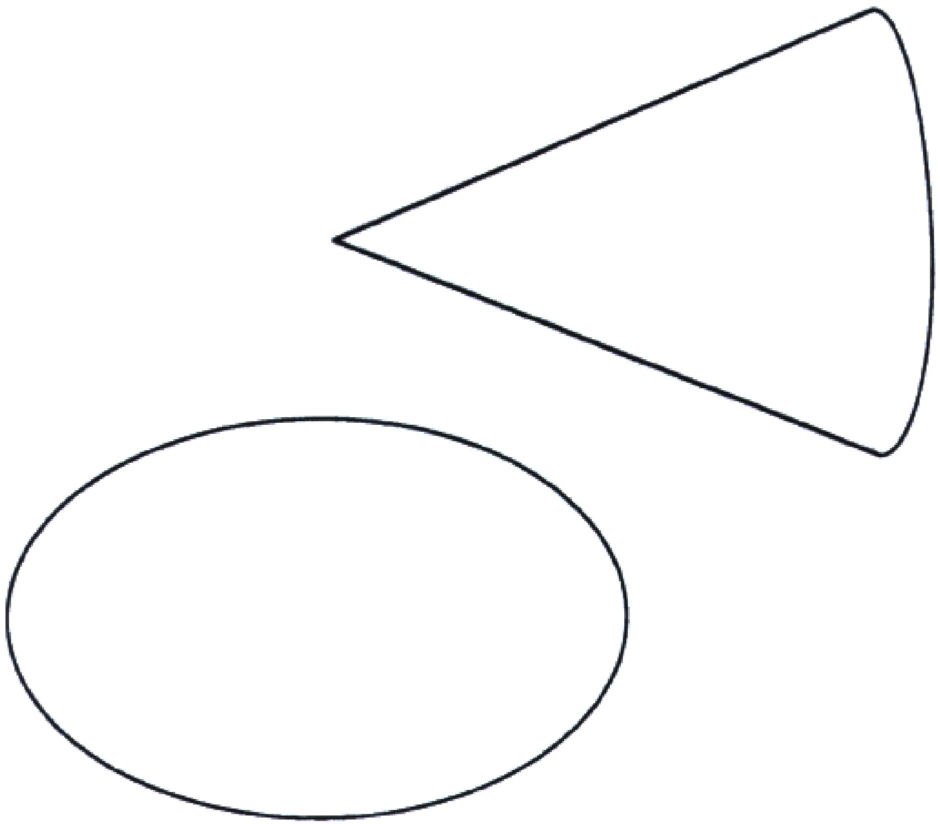
- Uma faca grande move-se continuamente e lentamente sobre a porção de bolo.
- Qualquer uma de três pessoas pode dizer «corta» a qualquer momento.
- A parte que é então cortada pertence à pessoa que disse «corta».
- As outras duas pessoas repetem o processo com a restante porção de bolo.



5. A Solução da Faca Deslizante

Isto conduz provavelmente à solução mais simples para o problema. Certifique-se que os alunos conseguem explicar porque a cada um é pelo menos garantido um terço do bolo, do seu próprio ponto de vista.

Experimenta este método nas duas porções de bolo representadas abaixo.

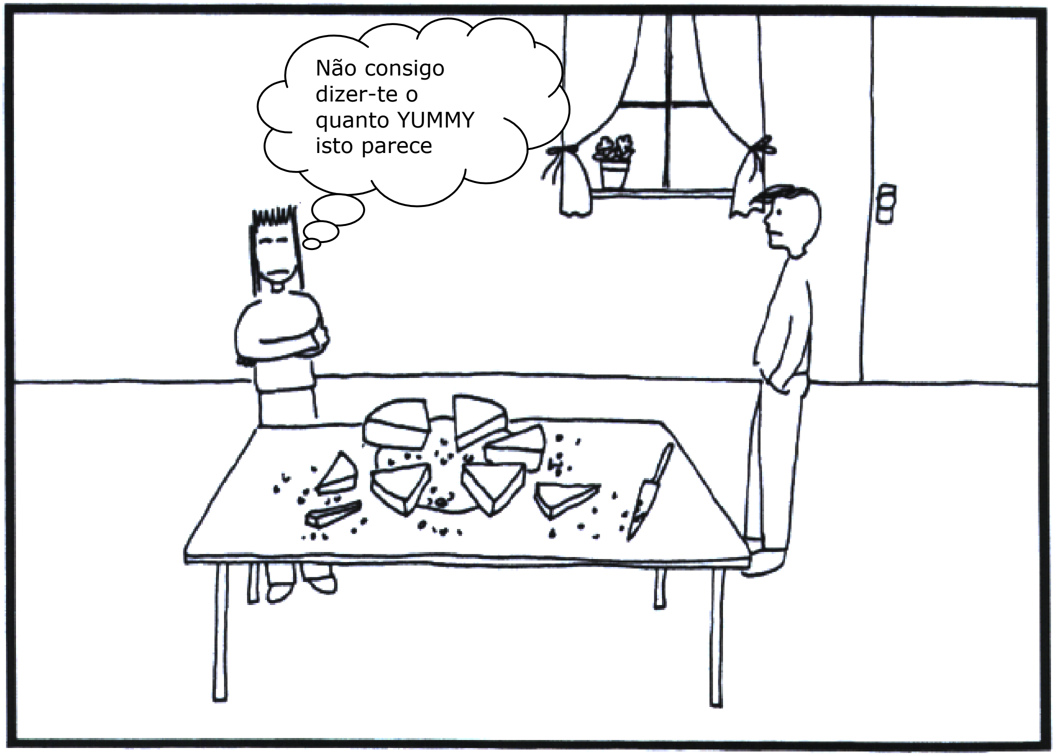


Explica porque é que este método garante que cada pessoa irá receber uma porção justa, do seu próprio ponto de vista.

6. Outro Algoritmo de Divisão Justa

O método seguinte conduz-nos à divisão justa de uma porção de bolo entre três pessoas.

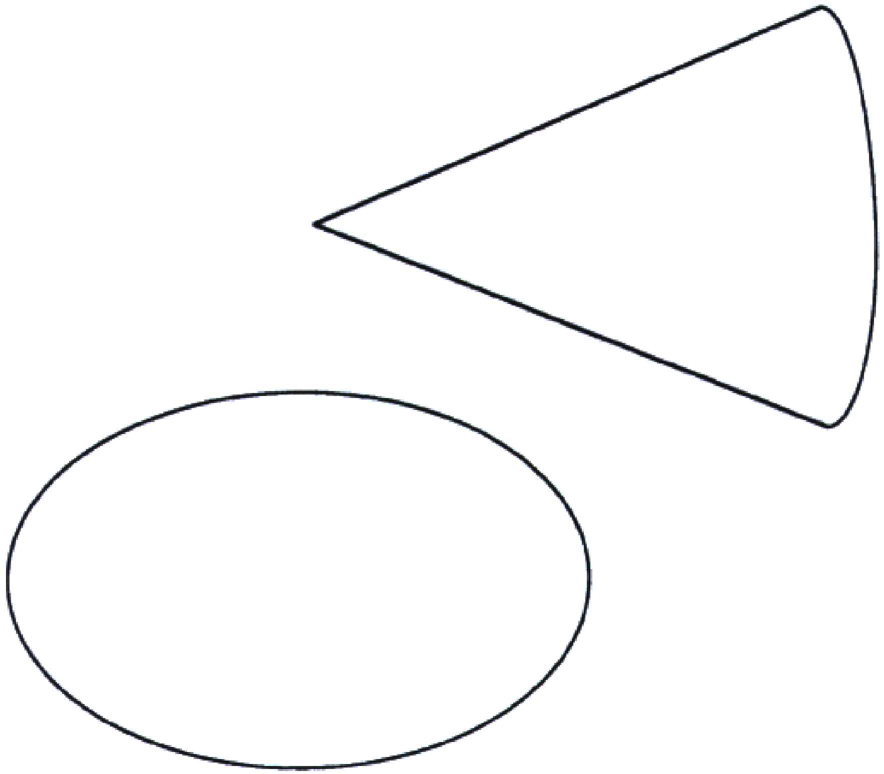
- Phil corta o bolo naquilo que ele considera ser duas partes exactamente iguais.
- Jill escolhe a primeira porção e Phil fica com a outra.
- Ambos a Jill e o Phil dividem as suas porções naquilo que ambos consideram ser terços exactos.
- O Bill escolhe um das três porções da Jill e uma das três do Phil .
- O Phil e a Jill ficam com as suas restantes porções.



6. Outro Algoritmo de Divisão Justa

Isto fornece-nos um algoritmo elegante para resolver a divisão do bolo entre três pessoas. Veja a solução do **Problema 5** (pagina 14) para uma explicação completa de como o método funciona. Os melhores alunos devem ser encorajados a generalizar esta solução para casos de quatro ou cinco pessoas (**Problema 10**, página 18). Para cursos onde a indução matemática faz parte do programa, o **Problema 17** (página 22) é particularmente eficiente.

Experimenta este método nas duas porções de bolo representadas abaixo.



Explica porque é que este método te garante que cada pessoa irá receber uma porção justa do seu próprio ponto de vista.

7. Exercícios - I

1a. Um método justo de dividir uma porção de bolo entre duas pessoas é, para uma pessoa, cortar o bolo, e para a outra pessoa, escolher a primeira porção. Gostarias de ser a pessoa que corta o bolo ou a pessoa que escolhe primeiro? Porquê? **1b.** O método descrito em «outro algoritmo de divisão justa» fornece a solução para o problema da divisão do bolo entre três pessoas. Qual das três pessoas gostarias menos de ser quando este método é utilizado? Porquê? 2. Existe uma falha no método que se segue para a divisão de uma porção de bolo entre três pessoas. Determine quem irá garantir uma porção justa do seu próprio ponto de vista e quem não o irá. • O Bill corta a porção de bolo em três fatias que ele considera como sendo terços exactos. • A Jill escolhe a primeira fatia. • O Phil escolhe a segunda fatia. • O Bill fica com a última	**6. Exercícios – I** **(A)1.a** A que escolhe primeiro. A pessoa que corta obterá exactamente o que considera serem metades. Deixando a outra pessoa cortar enquanto escolhes em primeiro lugar pode permitir-te obter mais do que metade, do teu ponto de vista. Embora quem corta considere as duas partes como metades exactas. **1b.** O Phil irá obter exactamente um 1/3, do seu ponto de vista, porque ele obtém exactamente 2/3 de uma metade. A Jill obtém exactamente 2/3 de pelo menos um meio, o que pode ser mais que 1/3, do seu próprio ponto de vista. O Bill obtém pelo menos um terço (ver **Problema 5**). Você não quererá ser o Phil, porque ele irá obter *exactamente* 1/3, do seu ponto de vista, enquanto os outros dois irão obter pelo menos 1/3 (possivelmente mais) segundo os seus pontos de vistas. **(A)2**. A Jill obtém pelo menos um terço (segundo o seu ponto de vista) uma vez que é ela a primeira a escolher. O quarto pressuposto da Secção 3 assegura- o. O Phil pode não obter um terço, segundo o seu ponto de vista—a Jill pode escolher a única porção que ele aceitaria. O Bill obtém exactamente 1/3, segundo o seu ponto de vista, uma vez que ele corta o bolo.

3a. Considera o método seguinte para dividir uma porção de bolo entre três pessoas. Ficarás satisfeito usando este método? • O Bill corta a porção naquilo que ele considera serem exactamente fatias de um terço e dois terços. • O Phil corta a fatia que o Bill considera ser dois terços, naquilo que ele acredita serem metades. • A Jill escolhe primeiro uma fatia. • Depois escolhe o Phil. • O Bill fica com a fatia que resta.	**(A) 3a.** A Jill ficará satisfeita já que ela escolhe a primeira fatia. O Phil pode não obter uma fatia aceitável. Ambas as fatias que ele cortou podem ser inaceitáveis, e a Jill pode escolher a outra. O Bill pode não ficar satisfeito já que pode obter uma das fatias que o Phil cortou e uma (mas não ambas) destas pode ser inaceitável.
3b. Altera o método utilizado em **3a.** De modo a que o Bill escolha a segunda fatia e o Phil fique com a última. Quem irá ficar satisfeito utilizando este método revisto?	**3b.** A Jill continua satisfeita. O Bill também ficará já que duas fatias podem ser aceitáveis para ele; nomeadamente a fatia que ele cortou e pelo menos uma das duas que o Phil cortou. O Bill considera a parte maior que cortou como sendo exactamente 2/3, assim pelo menos uma das duas fatias que o Phil cortou deve satisfazer o Bill. Nada protege o Phil.
4. Se três pessoas dividem uma porção de bolo em três partes, irá a primeira pessoa a escolher, ficar sempre satisfeita? Qual dos pressupostos básicos garante que ficará?	**(A)4**. A soma das partes deve ser igual a um no pressuposto de qualquer pessoa, assim elas não podem ter menos de 1/3. O quarto pressuposto básico é usado neste problema.

5a. Explica porque é que o Phil irá obter uma parte justa usando o método descrito em «Outro Algoritmo de Divisão Justa».

5b. Explica porque é que a Jill obterá uma porção justa, utilizando o mesmo método.

5c. Explica porque é que o Bill obterá uma porção justa, utilizando o mesmo método.

6. Considera o método seguinte para dividir um bolo entre três pessoas.

- O Bill corta o bolo naquilo que ele considera serem terços exactos.
- A Jill e o Phil decidem se acham ou não que todas as três fatias são iguais (justas), e os resultados são apresentados num quadro.

Caso 1. O quadro é tal que as três porções podem ser dispostas de modo a que cada pessoa obtenha uma fatia que considere justa.

(A)5. O Phil obtém exactamente 2/3 de 1/2 (segundo o seu ponto de vista), o que é exactamente 1/3. A Jill obtém 2/3 de *pelo menos* 1/2 segundo o seu ponto de vista, o que é *pelo menos* 1/3. Não sabemos o que o Bill pensa da divisão original do Phil. Se ele pensa que uma fatia é uma *a*-ésima parte de um bolo (seja qual for o *a*), ele deve pensar que a outra é pior (1–*a*). Deste modo o Bill obtém pelo menos

$(1/3)a + 1/3(1 - a) = (1/3)a + 1/3 - (1/3)\,a=$
$=1/3$,
uma vez que ele obtém a primeira escolha das três partes que compõem *a;* do mesmo modo as três partes que compõem *(1- a).*

(A)6. (**Nota :** Isto dá-nos outra solução para o problema das três pessoas.)

(A) a. O Phil obtém a Parte1, a Jill obtém a Parte2, e o Bill obtém a Parte3

b.

	Parte1	**Parte2**	**Parte3**
Bill	Sim	Sim	Sim
Phil	Sim	Não	Não
Jill	Sim	Não	Não

c. ***Caso 1***: O Caso 1 é obvio; cada um obtém uma porção aceitável.

Exemplo

	Parte1	Parte2	Parte3
Bill	Sim	Sim	Sim
Phil	Sim	Não	Não
Jill	Sim	Não	Não

Caso 2 : O quadro é tal que tanto o Phil como a Jill acham que uma única parte é aceitável. Atribua ao Bill uma das duas partes restantes. O Phil e a Jill dividem as duas partes restantes com um corte e o outro escolhe.

a. No exemplo do ***Caso 1*** quem obtém cada uma das porções?

b. Constrói um quadro para o ***Caso 2***.

c. Explica porque é garantido a toda a gente exactamente um terço, segundo o seu próprio ponto de vista, utilizando este método.

d. Que pressuposto básico permite colocar três respostas «sim» na linha do Bill, no quadro?

e. Quem pode obter mais do que aquilo que considera um terço, utilizando este método? (Note que não se obtêm mais do que cinco fatias de bolo com esta solução. A solução obtida com «Outro Algoritmo de Divisão Justa» resulta em seis porções.)

Na alínea **b** do caso 2, o Bill fica satisfeito, uma vez que obtém a Parte2 ou 3; digamos que é a 2. Tanto o Phil como a Jill acham que a Parte1 mais a Parte 3 é mais que 2/3 uma vez que a Parte2 é menos que 1/3, segundo os seus próprios pontos de vista. Utilizando o método um corta o outro escolhe, em ambas as Partes1 e 3, eles irão obter cada um, um total de pelo menos metade, de pelo menos 2/3.

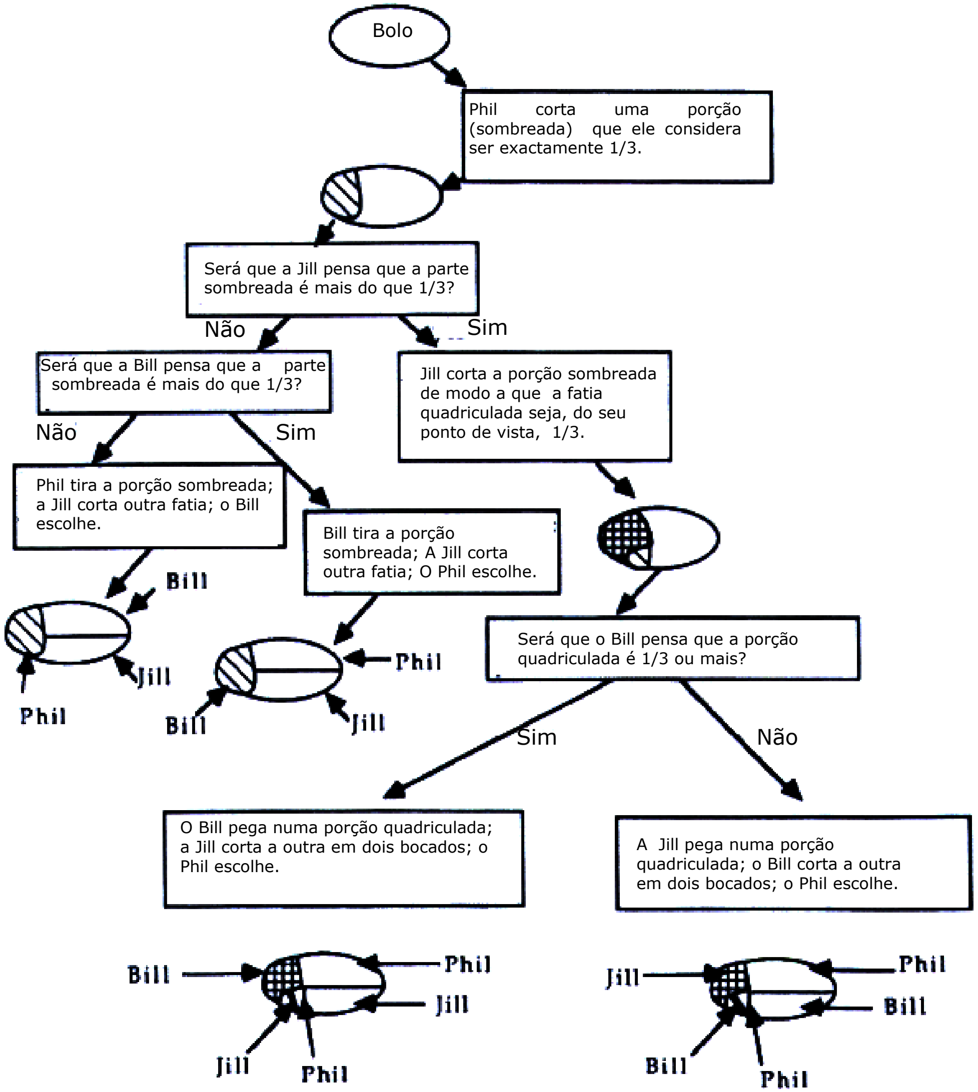
d. O terceiro pressuposto.

e. O Phil e a Jill irão obter mais de 1/3 segundo o seu ponto de vista, mas não o Bill, que irá obter exactamente 1/3 segundo o seu ponto de vista.

Veja o Problema 11, para uma extensão efectiva do Problema 6.

(B) 7. (**Nota:** Isto oferece outra solução para o problema das três pessoas. Esta é a solução original dada por Steinhaus. (Veja o resumo histórico)

7a. Mostre que este fluxograma fornece a solução para o problema das três pessoas.



a. Os algoritmos podem ser apresentados sobre a forma de fluxogramas como é ilustrado neste exercício. É fácil de ver que qualquer que seja a parte retirada, cada pessoa obtém 1/3, segundo o seu próprio ponto de vista.

b. Os casos mais à esquerda dos dá ao Phil um terço exacto, segundo o seu ponto de vista. Os casos mais à direita dá à Jill um terço exacto, segundo o seu próprio ponto de vista. Podemos observar que o Bill pode obter mais de 1/3, segundo o seu próprio ponto de vista, em cada um dos quatro casos.

(B)8. Isto trata-se na realidade de um exercício.

a. A Jill obtém pelo menos 1/6 uma vez que escolhe primeiro. Não podemos garantir nenhum valor para a sua última escolha , segundo o seu próprio ponto de vista. O Phil obtém pelo menos 1/3. Se ele pensa que o Bill cortou o bolo em partes de tamanhos *a* e (*1* – *a*), ele irá obter pelo menos (1/3)*a* + 1/3 (*1* – *a*) = 1/3. (Veja a solução do **Problema 5**). Não podemos garantir ao Bill nenhuma quantidade fixa, segundo o seu ponto de vista. Ele pode pensar que o Phil cortou uma fatia extremamente larga de cada uma das duas porções originais (apesar de o Phil considerar as partes como terços), as quais podem ser ambas escolhidas na altura em que o Bill escolhe.

b. A Jill obtém pelo menos 1/6; o Bill obtém pelo menos 1/6 (uma vez que duas partes- uma das três de cada uma das duas porções originais – devem ser pelo menos 1/6);ao Phil é garantido

7b. Mostra que um dos casos conduz a uma solução em que o Phil obtém exactamente um terço do bolo, segundo o seu ponto de vista, e o outro conduz a uma solução onde a Jill obtém exactamente um terço do bolo, segundo o seu ponto de vista, mas que todos os casos oferecem a possibilidade de que o Bill pode obter mais de um terço do bolo, segundo o seu ponto de vista. (Note que a partir deste algoritmo não obtemos mais do que cinco fatias de bolo). **8.** Em cada uma das situações seguintes a quem é garantido receber um terço do bolo, segundo o seu ponto de vista? E a quem o não é? Em cada caso, qual o tamanho da porção que é garantida a cada pessoa segundo este método? (Dica: desenhar uma figura pode ser útil.) **A.** O Bill corta o bolo, naquilo que ele considera ser metades exactas, e depois o Phil divide cada uma das duas partes naquilo que considera terços. Agora temos seis fatias, que serão escolhidas pela seguinte ordem: Jill, Phil, Bill, Bill, Phil, Jill. **B.** O método utilizado é o mesmo que em **A**, excepto que a ordem de escolha é: Jill, Bill, Phil, Phil, Bill, Jill. **C.** O Bill corta o bolo naquilo que ele considera serem terços exactos, de seguida o Phil divide cada uma das três fatias naquilo que ele considera ser metades exactas. As seis partes são escolhidas pela seguinte ordem: Jill, Phil, Bill, Bill, Phil, Jill. **D.** É utilizado o mesmo método que em **C**, excepto que a ordem de escolha é: Jill, Bill, Phil, Phil, Bill, Jill.	1/3 uma vez que obtém ((1/3 *a* + 1/3 (*1* – *a*)). (Veja a solução para o **Problema 5**). **c.** A Jill obtém pelo menos 1/6; 0 Phil obtém pelo menos 1/6 (exactamente 1/2 de uma das três porções, o que deve ser pelo menos 1/3); o Bill obtém pelo menos 1/3 uma vez que ele pode escolher qualquer dos terços originais. **d.** A Jill obtém pelo menos 1/6; o Bill obtém pelo menos 1/3 uma vez que das quatro fatias que restam após a sua escolha, pelo menos três delas deverão, quando adicionadas à sua primeira escolha, dar-lhe 1/3. O Phil não está nada protegido - ele pode pensar que o Bill cortou uma fatia extremamente grande (apesar de o Bill pensar que se tratavam de terços iguais) e as duas partes da fatia maior podem já ter sido escolhidas quando chega a vez do Phil. **(A) 9.** Uma solução é que o Bill corte o bolo naquilo que ele considere metades. A Jill escolhe uma das duas porções. O Bill corta a sua parte, naquilo que ele considera terços exactos. A Jill tira uma fatia do Bill e guarda a sua fatia original.(qualquer uma das soluções para três pessoas pode aqui ser utilizada. Nós permitimos agora à Jill desempenhar o papel de duas das três pessoas.) . Note que esta é uma solução de

9. Supõe que a Jill e o Bill querem dividir um bolo de modo a que o Bill obtenha um terço e a Jill dois terços. Como é que se pode fazer isto.

10. Mostra como alterar os seguintes métodos para dividir o bolo de modo a alterar a divisão por três pessoas para uma divisão por quatro.

a. O método apresentado na actividade da faca deslizante.

b. O método apresentado em «Outro Algoritmo de Divisão Justa». Prove que as suas alterações funcionam.

c. O método apresentado no **Problema 6.**

11. Imagine que a situação seguinte ocorre no método da tabela apresentado no **Problema 6**.

	Parte1	**Parte2**	**Parte3**
Bill	Sim	Sim	Sim
Phil	Sim	Não	Não
Jill	Sim	Não	Não

Sabemos que o Bill obtém a Parte2 ou a Parte3. Suponha que o Phil quer que o Bill obtenha a Parte2 mas a Jill gostaria mais de dar ao Bill a Parte3. Consegues encontrar uma solução que possa satisfazer tanto o Phil como a Jill?

quatro fatias para o problema de divisão 1/3–2/3 entre duas pessoas. Uma solução para três fatias é dada pelo Bill cortando terços exactos e a Jill escolhendo duas vezes.

(B) 10a. Cada pessoa grita «corta» quando acha que a faca atingiu um quarto do bolo.

b. *A* corta o bolo em metades. *B* escolhe uma porção. Cada um corta a sua parte em três, e *C* retira uma fatia de *A* e outra de *B*.
Agora *A, B,* e *C* têm pelo menos um terço segundo os seus critérios. Todos eles cortam as suas duas partes em quartos iguais (obtendo 6x4=24 fatias). *D* escolhe agora duas fatias a partir de *A, B,* e *C*. Agora *D* tem 6 fatias (tal como *A*, *B*, e *C*). *A, B,* e *C* obtêm exactamente ¾ de pelo menos 1/3, o que é pelo menos ¼. *D* pode avaliar as seis partes (que foram cortadas em quartos)

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, em que

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1$.

D obtém pelo menos

$$\frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{4}a_4 + \frac{1}{4}a_5 + \frac{1}{4}a_6 =$$

$$= \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) = \frac{1}{4}$$

12. Suponha que sabemos que dez pessoas podem dividir um bolo de modo a obterem cada uma 1/10 do mesmo segundo os seus critérios. Explique de que modo a Jill e o Bill poderiam dividir o bolo de modo a que a Jill achasse que tinha obtido 3/10 e o Bill 7/10.

13. Considere o seguinte processo infinito envolvendo três pessoas dividindo um bolo.

- **Passo 1:** O Bill e o Phil dividem o bolo utilizando a solução para duas pessoas; o bolo é dividido nas partes B1 e P1.
- **Passo 2:** O Bill e a Jill dividem B1 usando a solução para duas pessoas nas partes B2 e J1. O Phil e a Jill dividem P1 usando a solução para duas pessoas nas partes P2 e J2. (O Bill tem agora B2 o Phil P2 e a Jill J1 e J2.)
- **Passo 3:** O Bill e a Jill dividem J1 nas partes B3 e J3. O Phil e a Jill dividem J2 nas partes P3 e J4. (O Bill tem agora B2 e B3, o Phil tem P2 e P3 e a Jill J3 e J4.)
- **Passo 4:** O Bill e a Jill dividem B3 como apresentado acima. O Phil e a Jill fazem o mesmo com P3.

A tabela do topo da página seguinte mostra a porção mínima (segundo o seu critério) que cada pessoa obtém após cada passo.

c. Existe uma série de casos a considerar. Talvez seja melhor dar alguns exemplos e deixar os alunos decidir o que fazer. Por exemplo

	Parte1	**Parte2**	**Parte3**	**Parte4**
A	Sim	Sim	Sim	Sim
B	Sim	Não	Não	Não
C	Sim	Não	Não	Não
D	Sim	Não	Não	Não

Solução: Dê a Parte4 (ou 3) a *A*, e deixe *B, C, D,* dividir as Partes1, 2, e 3. Ou dê a Parte4 a *A*, a Parte2 a *B* e deixe *C* e *D* aplicar a solução para duas pessoas às Partes 1 e 3.

(B)11. Deixe o Phil cortar a Parte3 em duas fatias e o Bill escolher uma delas; deixe a Jill cortar a Parte2 em duas fatias e o Bill escolher uma. Agora o Bill tem pelo menos 1/3. O Phil ou a Jill cortam agora a Parte1 e o outro escolhe. Deste modo tanto o Phil como a Jill podem evitar a fatia que pensam ser a mais pequena.

(A)12. Deixe a Jill desempenhar o papel de três pessoas e o Bill a parte de sete da solução para dez pessoas. Em alternativa uma pessoa podia cortar o bolo em metades enquanto a outra escolhe. A Jill corta a sua parte em quintos e deixa o Bill escolher dois deles.

	Passo1	Passo2	Passo3	Passo4	Passo5	Passo6
Bill	1/2	1/4	3/8	5/16		
Phil	1/2	1/4	3/8	5/16		
Jill	0	1/2	1/4	3/8		

a. Completa as colunas para os passos 5 e 6 da tabela.

b. A porção de cada pessoa pode ser expressa como a soma de uma série infinita convergente. Utiliza a tabela para escrever estas séries.

14. Mostre que a variação seguinte do método utilizado no **Problema 13** produz uma solução finita para a divisão de um bolo entre quatro pessoas.

- **Passo1:** O Bill a Jill e o Phil utilizam qualquer método de divisão justa para dividir um bolo em três fatias dando origem às fatias B1, P1 e J1.
- **Passo2:** Lil divide B1 com o Bill, P1 com o Phil e J1 com a Jill.
- **Passo3:** Lil divide cada uma das três fatias que tem com o Bill, o Phil e a Jill respectivamente.

(C) 13. Este é um bom exercício que conduz a uma série geométrica. Considere que todas as fatias divididas entre cada duas pessoas são consideradas exactamente metade para todos eles; de outro modo complicações difíceis (mas ultrapassáveis) podem surgir. O Bill e o Phil irão obter

½ - ½(1/2) + ½ (1/4) - ½ (1/8) + ½ (1/16) - ...= (1/2) (1+1/2) =

= 1/3

Jill obtém

0 + ½ - ½ (1/2) + ½ (1/4) – ½ (1/8)=1/3 também.

	Passo5	Passo6
Bill	11/32	21/64
Phil	11/32	21/64
Jill	5/16	11/32

Este é um exemplo de um algoritmo não finito ou infinito, o qual, de facto não é facilmente aplicável. Esta é uma solução que foi apresentada por um grupo de alunos numa aula de cálculo.

(B) 14.

	Passo1	Passo2	Passo3
Bill	1/3	1/6	1/4
Phil	1/3	1/6	1/4
Jill	1/3	1/6	1/4
Lil	0	1/2	1/4

(C) 15. Assuma que todas as divisões dão origem a partes iguais segundo o critério de cada pessoa; de outro modo complicações

15. Considere a seguinte variação ao **Problema 13.**

- **Passo1:** O Bill, o Phil e a Jill usam qualquer método de divisão justa de um bolo em três fatias dando origem às fatias B1, P1 e J1.

- **Passo2:** O Bill e a Lil dividem B1 de modo a que o Bill obtenha o que ele considera ser 2/3 de B1, enquanto a Lil obtém 1/3; chamemos-lhe L1. (ver **Problema 9**). Agora o Bill tem o que ele considera ser pelo menos 1/3 – (1/3)(1/3). A Lil repete esta operação tanto com o Phil como com a Jill.

- **Passo3:** O Bill e a Lil dividem L1 em B2 e L2 de modo a que o Bill obtenha B2 e a considere como sendo 1/3 de L1. A Lil considera L2 como sendo pelo menos 2/3 de L1.

a. Constrói uma tabela mostrando que porções são geradas durante cinco passos.

b. Mostre que as porções convergirão para ¼.

16. Imagine um processo infinito para cinco pessoas que convirja para uma porção de 1/5 para cada pessoa. (Dica: compare isto com os **Problemas 13 e 15**).

difíceis (mas ultrapassáveis) irão surgir.

	Passo1	**Passo2**	**Passo3**	**Passo4**
Bill	1/3	2/9	7/27	20/81
Phil	1/3	2/9	7/27	20/81
Jill	1/3	2/9	7/27	20/81
Lil	0	1/3	2/9	7/27

O Bill, o Phil e a Jill obtêm

1/3 – 1/3 (1/3) + 1/3 (1/9) – (1/3)(1/27) + … = (1/3) / (1 + 1/3) = ¼

A Lil obtém

0 + 1/3 – 1/3 (1/3) + 1/3(1/9) - … = ¼

(C) 16. A tabela irá ser

	Passo1	**Passo2**	**Passo3**	**Passo4**
A	1/4	3/16	13/64	51/256
B	1/4	3/16	13/64	51/256
C	1/4	3/16	13/64	51/256
D	1/4	3/16	13/64	51/256
E	0	1/4	3/16	13/64

Assim a série gerada será

¼ - ¼(1/4) + ¼ (1/16) – ¼ (1/64) + … = 1/5

17. (Indução) Iremos mostrar que existe uma solução para *n* pessoas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ por indução. Especificamente se *n* tomar um valor maior ou igual a 2, então *n* pessoas podem dividir um bolo de modo a que cada uma recebe pelo menos *1/n* do bolo segundo os seus próprios critérios.

Demonstração:

i. Para n = 2, sabemos que a afirmação é verdadeira. (Porquê?)

ii. Suponha que existe uma solução para *k* pessoas (a hipótese de indução). Temos de mostrar como conseguir uma solução para *k* + 1 pessoas.

- **Passo 1:** Deixe $P_1, P_2, \ldots, P_k$ dividirem o bolo em *k* fatias $A_1 + A_2 + \ldots + A_k$, de modo a que P_1 considere a porção A_1 como sendo pelo menos 1/*k* do tamanho do bolo.

- **Passo 2:** P_1 corta a porção A_1 naquilo que considera serem $k+1$ fatias iguais.

- **Passo 3:** $P(k+1)$ tem de escolher uma das $k+1$ que P_1 cortou de A_1.(repita os passos 2 e 3 para $P_2, P_3, \ldots, P_k$).

Mostre que isto deixa cada pessoa com pelo menos 1/(*k* + 1) do bolo segundo os seus próprios critérios.

(C) 17.

$P_1, P_2, \ldots, P_k$ obtém cada um uma parte de

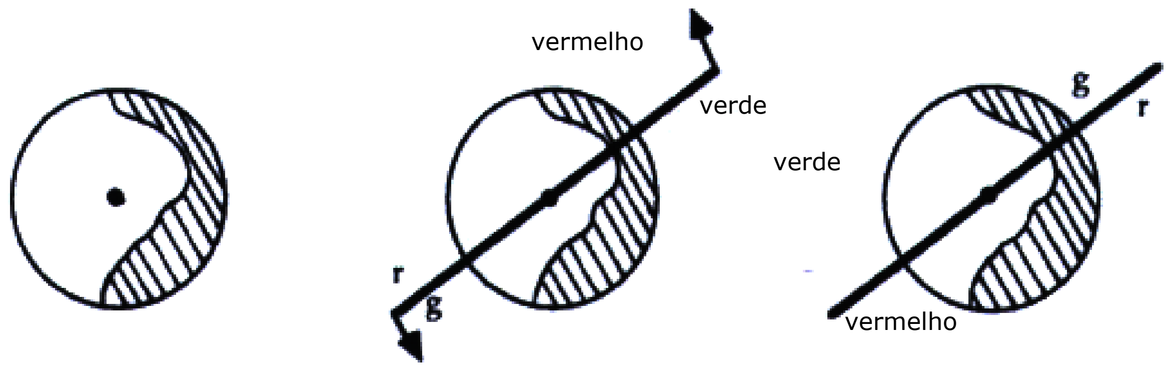
K/(K+1) de 1/k, o que é uma parte 1/(k + 1).

P_k + 1 obtém pelo menos

$1/(k+1)a_1 + \ldots + [1/(k+1)]a_k =$
$= [1/(k+1)]\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$

onde $(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) = 1$.(Veja as soluções do **Problema 5** e **9**.)

18. Em «Alguns Métodos de Divisão Justa – C» fatias de bolo com cobertura foram cortadas em duas partes. Essa poção do bolo é mostrada na figura abaixo. Pode ser mostrado que uma linha irá dividir ambas as áreas do bolo e da cobertura em metades exactas.



Neste exercício, pressupomos que o bolo é circular, e a cobertura cobre a parte do bolo que aparece a sombreado, na figura. Pressupomos que tanto o bolo como a cobertura têm espessuras uniformes.

Demonstração:

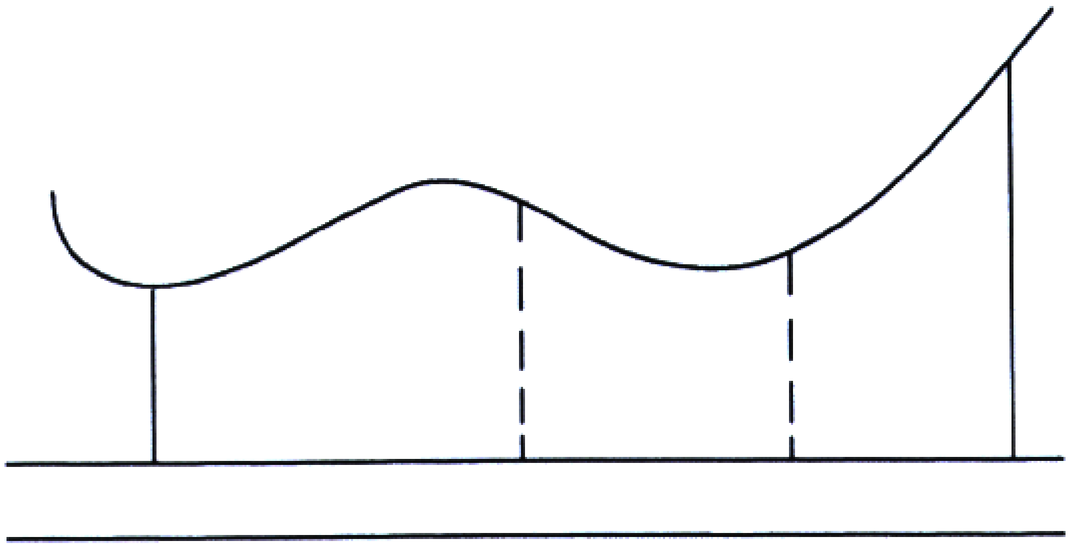
Primeiro note que qualquer linha que passe pelo centro do bolo corta o bolo em metades exactas. Insira uma linha qualquer e depois pense na linha como tendo um lado vermelho e outro verde. Na nossa figura, parece que existe mais cobertura no lado verde que no lado vermelho. Agora rode a linha à volta do centro do círculo.

a. Após a linha rodar 180º onde estão os lados vermelho e verde?
b. Será possível uma linha dividir igualmente a área do bolo e a área da cobertura?

(**Nota:** Isto é um caso especial do que é conhecido em matemática como *O Teorema da Sanduíche de Fiambre.* Veja o resumo histórico que começa na página 37.

(B) 18. Se de início existe mais cobertura no lado verde do que no lado vermelho, depois de uma rotação de 180º da linha, irá existir mais cobertura no lado vermelho do que no verde, porque os lados foram invertidos. Assim nalgum ponto ao longo do caminho a cobertura em ambos os lados irá ser igual.

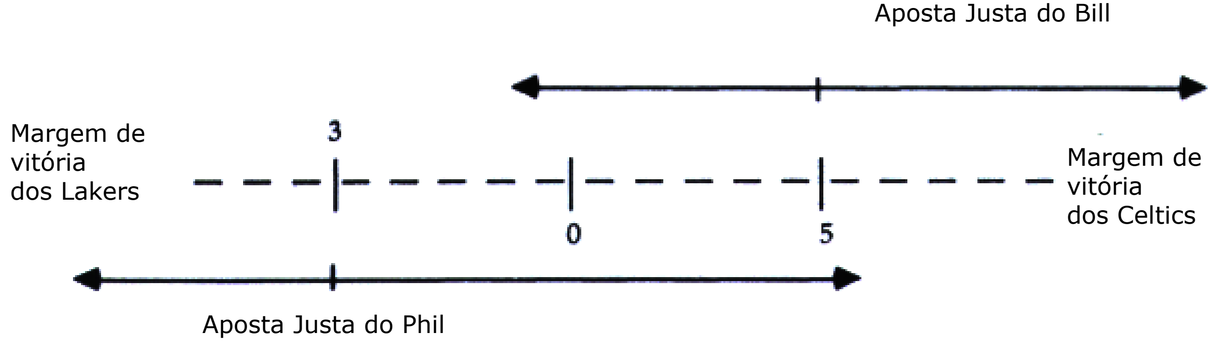
19a. O Bill, a Jill e o Phil herdaram uma propriedade limitada a norte por um lago e a sul por uma estrada. Ao Bill foi pedido que desenhasse duas linhas tracejadas perpendiculares á estrada no mapa da propriedade, de modo a que a terra fique dividida em três partes, qualquer uma das quais ele consideraria um terço justo. A Jill e o Phil fizeram o mesmo nos seus mapas; nenhum deles viu a divisão dos outros. Mostre que apesar do local onde as linhas estão situadas, a cada pessoa pode ser atribuída uma porção que eles cortaram de modo que não haja sobreposição das porções. De facto, na maioria dos casos, irá existir «excesso» de terra não atribuída no processo.



b. Mostre que os resultados de **a.** podem ser estendidos a qualquer número de herdeiros.

(B) 19. Coloque todas as linhas num único mapa. Atribua a primeira porção mais à esquerda a uma pessoa que tem a sua primeira linha mais à esquerda. Remova todas as outras linhas dessa pessoa. Atribua a segunda porção à pessoa que tem a sua segunda linha mais à esquerda, etc. este método funciona seja qual for o número de participantes.

20. Os Lakers e os Celtics estão a jogar um jogo, e Bill disse à Jill que ele pensa que os Lakers «mais cinco» é uma aposta justa (uma pessoa ganha se os Lakers ganharem ou se eles perderem por menos do que cinco pontos; a outra pessoa ganha se os Celtics ganharem por mais do que cinco pontos. Se os Celtics ganharem por cinco, a aposta não vale). O Phil disse mais tarde à Jill que pensa que Celtics «mais três» é uma aposta justa.

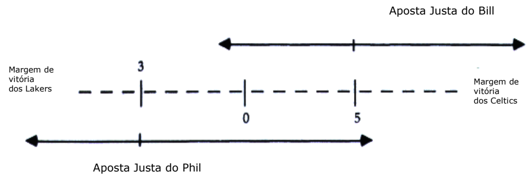


Descobre uma maneira de a Jill apostar um euro com o Bill e o Phil usando as suas apostas justas, de modo a não perder seja qual for o resultado do jogo.

21. Estará a solução de corte do bolo sujeita a batota? Explica.

22. Se três pessoas estiverem para dividir justamente uma porção do bolo e as duas primeiras executarem todos os cortes, seja qual for o número de fatias produzidas pelo algoritmo, explica porque é que a terceira pessoa deve ser a primeira a escolher.

(B) 20. Os alunos gostam deste problema.



Na secção central a Jill ganha €2,00; nas pontas finais ela ganha €1,00; de outro modo ela fica na mesma.

(A) 21. Sejam quais forem as intenções maléficas que um jogador possa ter, nada pode ser feito, quando se aplica o nosso algoritmo, para negar a alguém a sua porção justa. Neste sentido todos se encontram protegidos da batota.

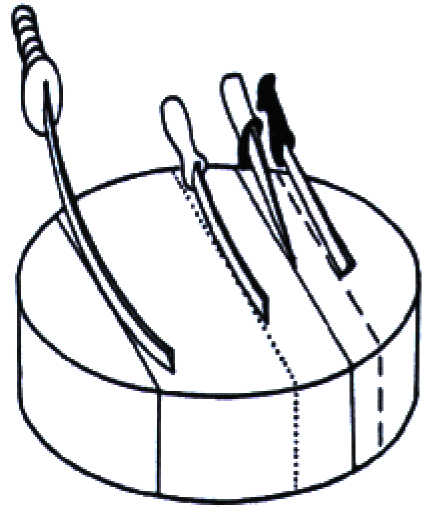
Contudo, na solução do **Problema 7**, a Jill e o Bill podem-se associar para melhorar a sua parte conjunta se ambos pensarem que a porção cortada pelo Phil era mais de 1/3. Um pode dizer sim, o outro não, e o Phil não obterá nada da «fatia menor» (a qual ele obteria se não tivesse havido associação).

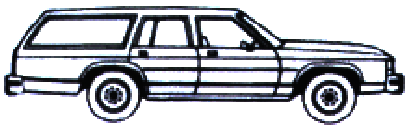
(A) 22. O indivíduo 3 pode pensar que uma das fatias é mais do que 2/3 do bolo.

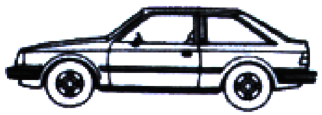
8. O Problema dos Objectos Indivisíveis

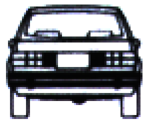
Objectos como sejam bolos e parcelas de terra são considerados como sendo divisíveis com precisão, o que quer dizer que estes objectos podem ser divididos fisicamente em qualquer número de partes.

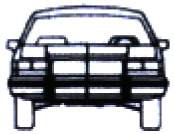
Objectos como casas e carros são considerados como sendo indivisíveis. Os métodos para a divisão justa de bolos, terrenos ou itens similares não se aplicam habitualmente a objectos indivisíveis. Por exemplo suponha que duas pessoas herdam uma casa. A divisão da casa em duas partes não parece ser uma solução realista. Novas ideias são necessárias.







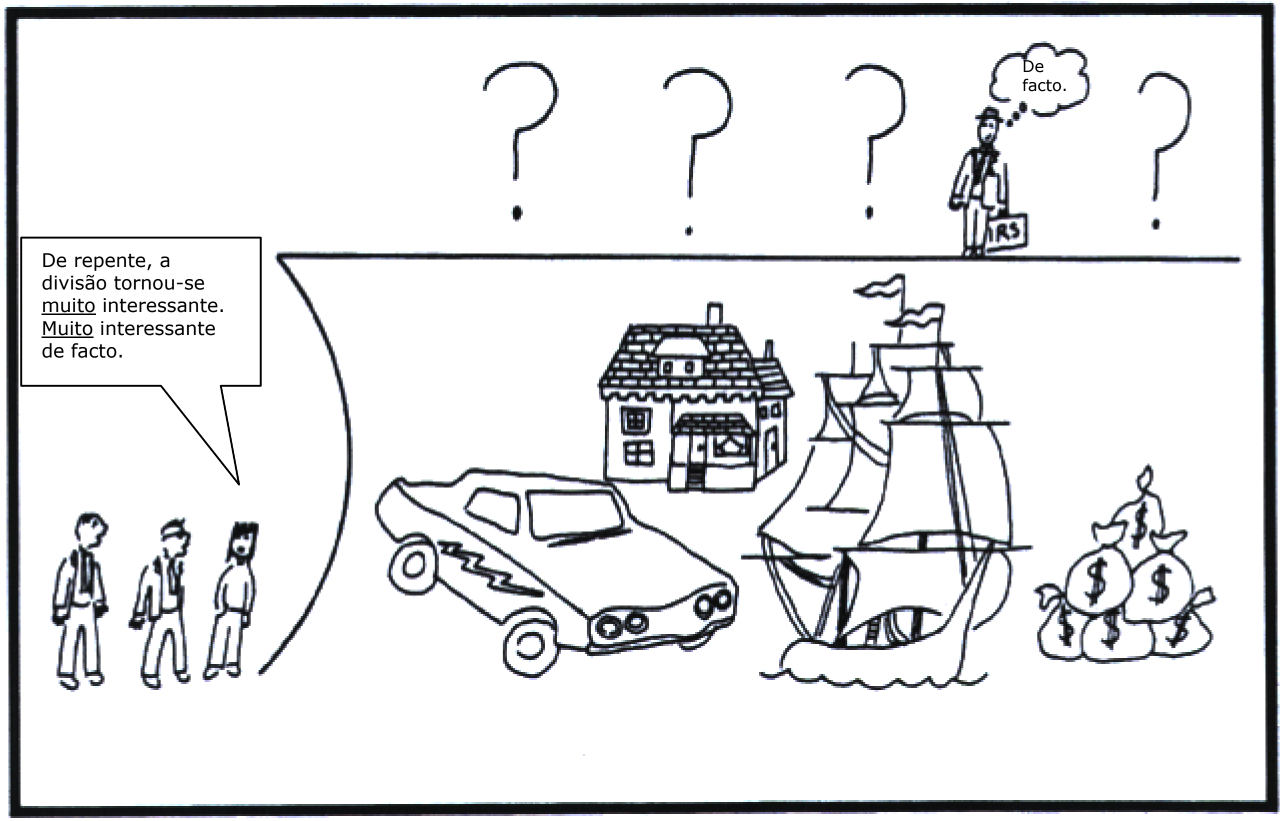




9. Alguns Métodos para Dividir um Bem – A

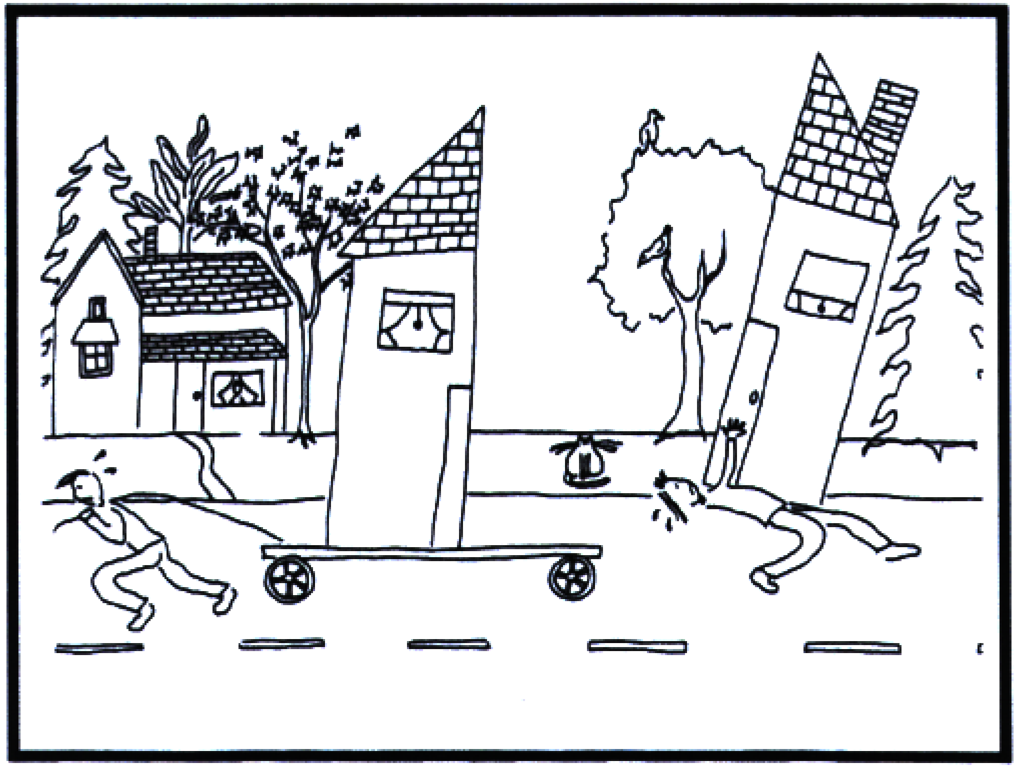
Considere o seguinte problema. Suponha que o Al, o Bev e o Cal se tornaram herdeiros de uma casa, um carro, um barco e algum dinheiro. Quais são os processos pelos quais a herança pode ser dividida?

Que problemas podem surgir?



9. Alguns Métodos para Dividir um Bem – A

Esta é suposta ser uma actividade quebra cabeças para a qual vários métodos serão sugeridos. Esperamos que os alunos descubram neles, algo que não gostem.

# 9. Alguns Métodos para Dividir um Bem – B	**9. Alguns Métodos para Dividir um Bem – B**
Suponha que um assessor independente é chamado para avaliar a situação apresentada na pagina anterior. O assessor diz ao Al, Bev e Cal que a casa é avaliada em €45.000,00 , o carro em €12.000,00 , e o barco em €6.000,00. Os bens também incluem €150.000,00 em dinheiro. Como podem os bens ser divididos se: **a.** Todos os bens são vendidos pelo valor atribuído pelo assessor? **b.** O Bev quer a casa, o Cal quer o carro e o barco, e o Al concordaria com isto? 	**a.** Cada pessoa obteria 1/3 de €45.000,00 + €12.000,00 + €6.000,00 + €150.000,00 o que dá €71.000,00. **b.** Dê ao Bev a casa mais € 26.000,00. Dê ao Cal o carro, o barco, e €53.000,00. Dê ao Al €71.000,00.

10. Dividindo um Bem de uma Forma Justa

Um método de divisão de um bem encontra-se ilustrado no exemplo abaixo. Neste método, cada pessoa atribui um valor aos itens de acordo com o seu ponto de vista, sobre o seu valor, sabendo que a avaliação mais alta de qualquer item será atribuída ao mesmo como preço de avaliação. Portanto, o valor total do bem, para cada pessoa, irá ser determinado pela soma das avaliações das pessoas. Uma porção justa para cada pessoa pode ser facilmente determinada a partir das sua avaliação total.

Exemplo: O Al, o Bev e o Cal herdaram um bem composto por um piano, um carro, um barco, um casa de campo, e €30.000,00 em dinheiro. Cada pessoa atribui um valor a cada item. A maior avaliação de cada item é atribuída ao mesmo, e ajustamentos em dinheiro foram feitos de modo a que cada pessoa receba uma porção justa, do seu ponto de vista.

	Al	**Bev**	**Cal**
Piano	1.800	1.500	1.650
Carro	2.600	2.400	2.000
Barco	1.000	800	1.200
Casa de campo	12.000	13.000	10.000
Dinheiro	30.000	30.000	30.000
Soma das avaliações	47.400	47.700	44.850
"Porção justa" 1/3 da soma das avaliações	15.800	15.900	14.950
Objectos atribuídos	Carro/piano	Casa de campo	Barco
Valor dos objectos	4.400	13.000	1.200
Valor de dinheiro*	11.400	2.900	13.750
Acordo inicial	15.800	15.900	14.950
1/3 do restante dinheiro	650	650	650
Acordo final	16.450	16.550	15.600

10. Dividindo um Bem de uma Forma Justa

Certifique-se que os alunos compreendem o procedimento aqui dado, porque ele é a base para o que se segue. O acordo final global de €16.450,00 inclui o carro e o piano, que ele considera valerem €4.400,00. Do mesmo modo o do Bev de €16.550,00 inclui a casa de campo com a sua avaliação de €13.000,00 ; a do Cal de €15.600,00 inclui o barco com a sua avaliação de €1.200,00. Embora os acordos não apareçam listados com um valor igual, fazemos notar que cada um é baseado no *ponto de vista de cada pessoa.* Cada pessoa recebe mais €650 para além do que pensaria ser 1/3 do bem.

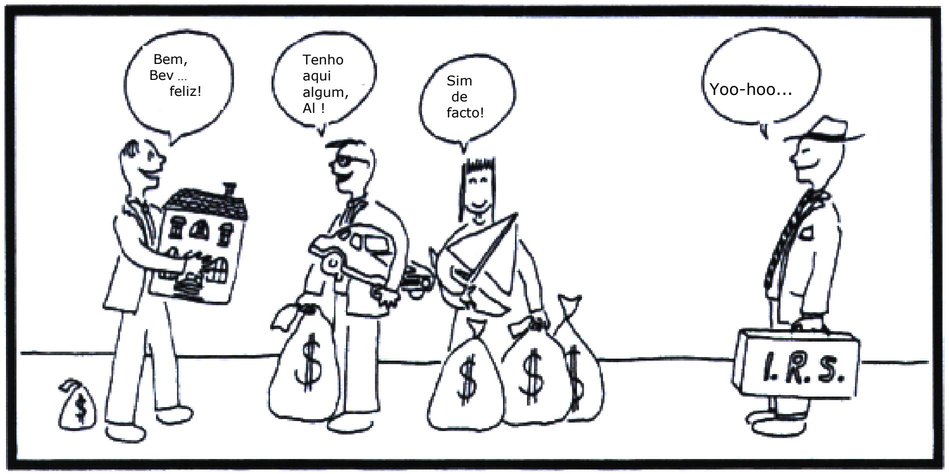
* A soma das três quantias é €28.050,00 , deixando €1.950,00 por atribuir.

11. Testando o Método

Uma casa, um barco, e um carro estão representados abaixo. Trabalhando independentemente, determine um valor para cada item. Após todas as três pessoas terem terminado introduza as avaliações na tabela que se segue.

	Pessoa 1	Pessoa 2	Pessoa 3
. Casa 			
. Barco 			
. Carro 			
. Soma das avaliações			
. "porção justa"			
. 1/3 da soma das avaliações			

Aplica o método descrito na **Secção 10** para «Avaliar o Bem». Assuma que cada indivíduo tem dinheiro disponível suficiente para fazer pagamentos à margem aos outros, se necessário. Um pagamento à margem é necessário se a distribuição dos objectos dá origem a que uma pessoa receba mais que o seu terço de porção justa.



11. Testando o Método

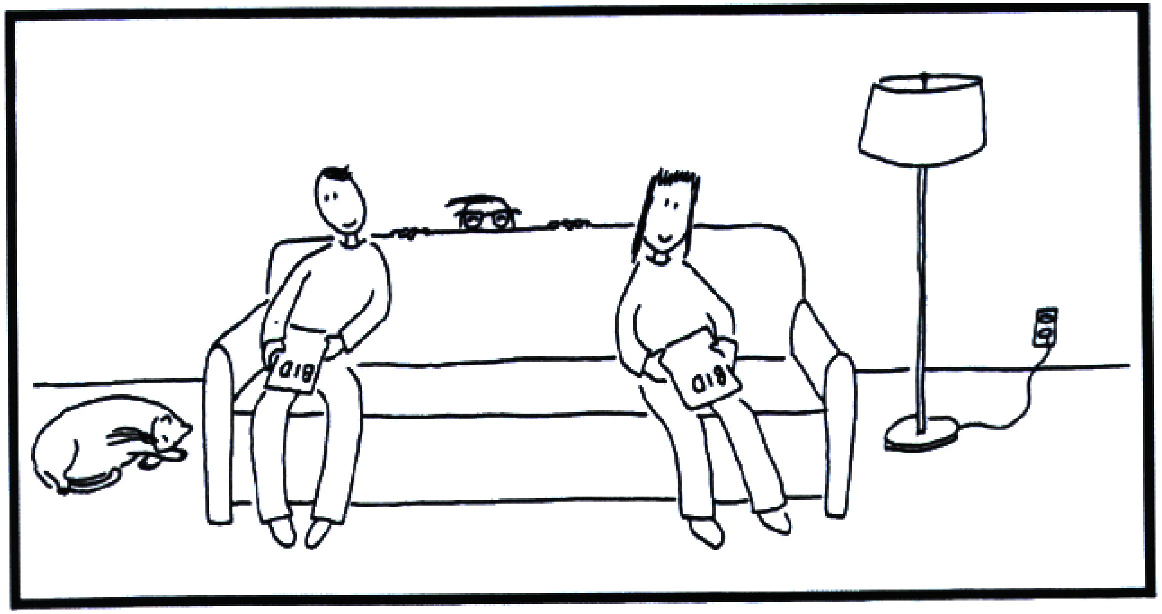
Nesta actividade, os alunos têm que fazer as suas próprias avaliações, depois é-lhes pedido que façam uma divisão como é proposto em «Dividindo Justamente um Bem». A pessoa que fica com a casa irá provavelmente obter mais que o seu terço e será de esperar que devolva algum dinheiro. Por exemplo, se a Pessoa 1 avaliou a casa em €60.000,00, o barco em €2.400,00 e o carro em €12.000,00 e essa avaliação é elevada para a casa mas nenhuma das avaliações dos outros dois itens é alta, a Pessoa 1 obterá a casa mas irá devolver €60.000,00 – 1/3(€60.000,00 + €2.400,00 + €12.000,00) = €60.000,00 - €24.000,00 = €35.200,00 em dinheiro. A pessoa 1 considera €24.000,00 como sendo 1/3 do bem.

Depois das três pessoas terem os seus itens e ajustamentos financeiros feitos, o que atribui a cada um, 1/3 do valor do bem, segundo o seu ponto de vista, eles terão, quase de certeza, um excesso de dinheiro (mas nunca uma falta) por distribuir, o qual pode então ser dividido entre os três herdeiros.

12. Exercícios – II

1. Divide o bem seguinte utilizando o método idealizado em «Dividindo Bens».

	Joan	Henry	Sam
Lote vazio	8.000	7.500	6.200
Barco	6.500	5.700	6.700
Computador	1.340	1.500	1.400
Aparelhagem	800	1.100	1.000
Dinheiro	10.000	10.000	10.000



12. Solução dos exercícios—II

(A) 1.

	Joan	Henry	Sam
Lote vazio	8.000	7.500	6.200
Barco	6.500	5.700	6.700
Computador	1.340	1.500	1.400
Aparelhagem	800	1.100	1.000
Dinheiro	10.000	10.000	10.000
Soma das avaliações	26.640	25.800	25.300
Porção justa	8.880	8.600	8.433
Objectos atribuídos	Lote vazio	Computador Aparelhagem.	Barco
Valor dos objectos	8.000	2.600	6.700
Valor do dinheiro	880	6.000	1.733
Acordo Preliminar	8.800	8.600	8.433
1/3 do dinheiro em excesso	462	462	462
Acordo final	9.342	9.062	8.895

2. Se num bem não existe dinheiro, o mesmo procedimento básico continua a ser aplicado. Contudo os herdeiros podem necessitar de pagar em dinheiro se os objectos que lhe são atribuídos têm um valor total que ultrapassa a sua porção justa. Ver «Pagamentos à margem» em «Testando o Método».

a. Determina a divisão justa dos três itens abaixo.

	Anne	**Beth**	**Jay**
Computador	1.800	1.500	1.650
Carro	2.600	2.400	2.000
Aparelhagem	1.000	800	1.200
Soma das Avaliações			

b. Quais são algumas das dificuldades que podem surgir quando não existe dinheiro suficiente no bem para fazer os acordos finais de dinheiro sem que os herdeiros façam pagamentos quando o valor dos objectos que lhe são atribuídos excede a sua porção justa?

(A)2.

	Anne	**Beth**	**Jay**
Computador	1.800	1.500	1.650
Carro	2.600	2.400	2.000
Aparelhagem	1000	800	1.200
Soma das avaliações	5.500	4.700	4.850
Porção justa	1.800	1.567	1.617
Objectos atribuídos	Carro Computador		Aparelhagem
Valor dos objectos	4.400	0	1.200
Acordo financeiro	-2.600	1.567	417
Ajuste preliminar	1.800	1.567	1.617
1/3 do excesso dinheiro	205	205	205
Acordo final	2.005	1.772	1.822

O excesso de dinheiro é
2.600 - (1.567 + 417) = 616

b. Se uma pessoa tem de fazer um pagamento à margem em dinheiro (porque essa pessoa recebeu um item de valor muito elevado), pode ser necessário fazer um empréstimo para ter dinheiro disponível. Essa pessoa irá então pagar juros sobre o dinheiro pedido e a "justeza" do método torna-se mais obscura.

3. Suponha que o Al, o Bev e o Cal herdam o bem descrito no exemplo de «Dividindo Justamente um Bem». Contudo, visto que o Cal teve inicialmente ajuda financeira dos seus pais, ajuda que o Al e o Bev nunca tiveram, o testamento dispõe que o Al e o Bev têm ambos de receber quarenta por cento do bem, enquanto que o Cal obtém vinte por cento. Como devem ser feitos os acordos?

4. O método de divisão de bens está sujeito à aliança entre os participantes, a qual pode afectar o acordo final. No exemplo em «Dividindo Justamente um bem», se o Al e o Bev compararem as suas avaliações antes de as entregarem podem ter a seguinte conversa:

Bev: Eu posso aumentar a minha avaliação do piano para €1.799,00 e continuar sem avaliá-lo mais do que tu.

De qualquer modo eu não quero o piano.

Al: Mas isto pode tornar-se suspeito. Porque é que não alteras a tua avaliação para €1.750,00, e a diferença de € 50,00 não se torna tão obvia.

a. Porque é que será que o aumento da avaliação do Bev ao piano aumenta o seu acordo final?

b. Aumente cada uma das avaliações mais baixas entre o Al e o Bev de modo a que exista apenas uma diferença de € 50,00, e recalcule o acordo final. De que modo é afectado o acordo final para cada pessoa?

(A) 3.

	Al	**Bev**	**Cal**
Piano	1.800	1.500	1.650
Carro	2.600	2.400	2.000
Barco	1.000	800	1.200
Casa campo	12.000	13.000	10.000
Dinheiro	30.000	30.000	30.000
Soma das Avaliações	47.400	47.700	44.850
Porção justa	18.960	19.080	8.970
Objectos atribuídos	carro piano	casa campo	Barco
Valor dos objectos	4.400	13.000	1.200
Ajustamento financeiro	14.560	6.080	7.770
Acordo preliminar	18.960	19.080	8.970
Porção justa do excesso	636	636	318
Acordo final	19.596	19.716	9.288

(B) 4 a. A sua avaliação total aumentou, assim o seu 1/3 da avaliação total aumentou.

5. Outra maneira de enganar o método é ver as avaliações das outras pessoas. No exemplo em «Dividindo Justamente um Bem», se o Cal vir as avaliações do Al e do Bev antes de fazer a sua própria, ele poderá ajustar a sua. Suponha que o Cal deixa uma diferença de €50 para cada item (por exemplo). Quanto ganharia com esta desonestidade?

6. O método inglês de leilão usado neste país começa com preços baixos, depois vai subindo e finalmente atribui o item à mais alta avaliação. O método de leilão holandês começa pelo preço extremamente alto e vai baixando até que o item seja vendido ao primeiro avaliador.

a. Onde compraria mais facilmente o item, num leilão inglês ou holandês?

b. Onde preferiria vender um item, num leilão inglês ou num leilão holandês?

c. Depois de um item ser vendido num leilão holandês que avaliadores (ou potenciais avaliadores) divulgaram o seu verdadeiro pressuposto do valor do objecto?

d. Depois de um item ser vendido num leilão inglês que avaliadores (ou potenciais avaliadores) divulgarão o seu verdadeiro pressuposto do valor do objecto?

4.b

	Al	**Bev**	**Cal**
Piano	1.800	1.750	1.650
Carro	2.600	2.550	2.000
Barco	1.000	950	1.200
Casa campo	12.950	13.000	10.000
Dinheiro	30.000	30.000	30.000
Soma das avaliações	48.350	48.250	44.850
Porção justa	16.117	16.083	14.950
Objectos atribuídos	carro piano	casa de campo	barco
Valor dos objectos	4.400	13.000	1.200
Valor em dinheiro	11.717	3.083	13.750
Acordo preliminar	16.117	16.083	14.950
1/3 do dinheiro em excesso	483	483	483
Acordo final	16.600	16.566	15.433

O dinheiro em excesso 1.450. Comparado com o acordo original, o Al ganha €150, o Bev €16 e o Cal perde €167.

7. Quando um bem como o que é apresentado no **Problema 2** é dividido através destes métodos, será que o mesmo tem na sua constituição dinheiro suficiente para satisfazer as reivindicações dos herdeiros? Sob que condições não existirá «dinheiro a mais» para dividir, após as reclamações terem sido apresentadas?(Dica: considerar a questão para um item de cada vez).

Extra para peritos

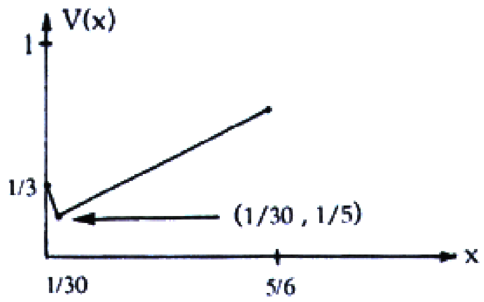
O que se segue é apropriado para usar com alunos mais avançados. Corresponde ao **Problema 8** na página 17 e **Problema 18** da página 23.

Exercício 8 : Deixe a Jill avaliar as porções $a_1 \ge a_2 \ge .... \ge a_6$, com $a_1 + ... + a_6 = 1$. Ela obtém $a_1 + a_6$. Mas, $5(a_1 + a_6) = 5a_1 + 5a_6 \ge 5a_1 + a_6 > a_1 + ... + a_5 + a_6 = 1$, assim $a_1 + a_6 \ge$ 1/5. deste ,modo a Jill obtém pelo menos 1/5 do bolo.

Poderíamos avançar mais dependendo de quão maior que 1/6 ela pensa que a sua primeira fatia é. Se $a_1 = 1/6 + x$, $0 < x < 5/6$, então $a_1 + a_6 = 1 - a_2 - ... - a_5 \ge 1 - 4a_1 = 1/3 - 4x$; e também $a_1 + a_6 \ge a_1 = 1/6 + x$, então $a_1 + a_6 \ge V(x) = \max\{1/3 - 4x, 1/6 + x\}$.

Se marcarmos $V(x)$ vemos que este tem um valor mínimo de 1/5 quando x = 1/30. Portanto o pior caso para a Jill é quando existem 5 fatias do mesmo tamanho e uma sexta fatia muito pequena.

Em todos os outros casos, ela acabará por obter mais de 1/5, segundo os seus próprios critérios.



(B) 5.

	Al	**Bev**	**Cal**
Piano	1.800	1.500	1.750
Carro	2.600	2.400	2.550
Barco	1.000	800	1.050
Casa campo	12.000	13.000	12.950
Dinheiro	30.000	30.000	30.000
Soma das avaliações	47.400	47.700	48.300
Porção justa	15.800	15.900	16.100
Objectos atribuídos	carro piano	casa de campo	barco
Valor dos objectos	4.400	13.000	1.050
Valor em dinheiro ajustado	11.400	2.900	15.050
Acordo preliminar	15.800	15.900	16.100
1/3 do dinheiro em excesso	217	217	217
Acordo final	16.017	16.117	16.317

(A) 6 a. Inglês

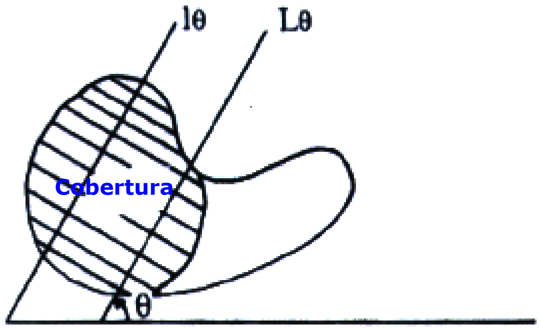
b. Holandês

c. Só o comprador

d. Todos excepto o comprador se cada avaliador avalia com um preço aceitável para si.

(C) 7. Quando existem três herdeiros o bem deve dar dinheiro a cada um dos que avaliam por baixo do valor de 1/3 das suas avaliações. Mas, o bem recebe dinheiro do avaliador mais alto na quantia de 2/3 da avaliação. Deste modo, existe sempre dinheiro disponível. Não há dinheiro em excesso quando as avaliações são iguais.

Exercício 18: É desnecessário assumirmos que o bolo é circular, como demonstram as razões que se seguem. Deixa que um par de linhas paralelas l_θ *e* L_θ, dividam o bolo e a cobertura em áreas iguais como se mostra. Se l_θ *e* L_θ coincidem terminamos. Se l_θ *e* L_θ são distintas então l_θ está, digamos, à esquerda de L_θ. Após rodarmos 180º, as linhas mudaram de posição de modo que l_θ está agora à direita de L_θ.



Existe pelo menos um ângulo onde as linhas coincidem e $l_\theta = L_\theta$. Esta linha bissecta simultaneamente a área do bolo e a área da cobertura. O mesmo argumento aplica-se a bolos e coberturas de espessuras não uniformes, o que mostra que um corte simples na vertical com uma faca pode bissectar simultaneamente o volume do bolo e o volume da cobertura.

Parte III
A História dos Problemas de Divisão Justa

O problema do corte do bolo (dividindo um bolo «justamente» entre um determinado número de pessoas) foi primeiramente apresentado pelo bem conhecido matemático polaco Hugo Steinhaus. Em 1948, ele escreveu, «tendo descoberto durante a guerra uma solução para três pessoas, propus o problema de *n* pessoas a B. Knaster e S. Banach.» Os dois eram colegas de Steinhaus na Polónia, e todos eles, matemáticos eminentes com reputação internacional.

Steinhaus avançou depois a solução de Knaster e S. Banach para *n* pessoas, a qual é a resposta dada para o **Problema 7** da página 16. No mesmo artigo ele apresenta um método de divisão de heranças, que também é mencionado neste módulo.

Dois problemas similares são o *Problema da Sanduíche de Fiambre* e o *Problema do Nilo.* O problema da sanduíche de fiambre diz que se tivermos uma sanduíche feita com três ingredientes – pão, manteiga e fiambre – então seja qual for a forma que os três ingredientes possam ter, é possível fazer um corte que divida todos eles exactamente a meio (por volume).

As cheias do Nilo em cada primavera, alteram o valor das parcelas de terra. Se soubéssemos à partida que o rio iria atingir um de *n* (um valor positivo) níveis, e se tivéssemos uma parcela de terra para dividir entre *k* famílias, sendo essas parcelas $A_1, \ldots, A_k$ constituindo o todo, que podia ser atribuído às *k* famílias, seja qual for o nível da cheia que ocorresse, será que cada família obterá uma porção justa? Surpreendentemente a resposta é sim.[Dubins 1961.]

O Problema do Nilo pode ser aplicado ao corte do bolo para chegarmos ao seguinte resultado. Se n pessoas estão prestes a dividir uma porção de bolo isto pode ser feito de tal modo que cada pessoa sente que recebeu uma igual porção do mesmo.

O matemático inglês D. R. Woodall e o seu congénere americano W. Stromkuist forneceram provas da existência (sem algoritmos para mostrar como obter as fatias) que o bolo pode ser cortado em *n* fatias e distribuído a *n* pessoas de modo a que cada pessoa prefira a sua própria fatia em relação a todas as outras. Note que nas soluções apresentadas neste módulo um indivíduo pode sentir que obteve o seu terço, mas pode estar insatisfeito porque sente que alguém obteve mais do que ele.

Stromquist forneceu uma solução construtiva para três pessoas, que é a seguinte. Um avaliador move um espada da esquerda para a direita sobre o bolo, hipoteticamente dividindo numa fatia esquerda pequena e numa grande fatia direita. À medida que o avaliador movimenta a sua espada [ou faca], os jogadores ajustam continuamente as suas facas, mantendo-as paralelas à espada. (ver **Figura 1**.) Quando um jogador grita «*corta"*» o bolo é cortado pela espada e pela faca do jogador que esteja no meio das três.

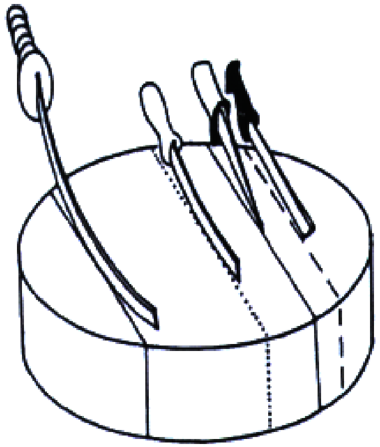


Figura 1. A solução da faca deslizante

O jogador que gritou "corta" recebe a fatia esquerda, ele deve estar satisfeito, porque ele sabia quais seriam as três fatias quando gritou "corta". Depois o jogador cuja faca se encontra mais próxima da espada, se não foi ele que gritou "corta", fica com a fatia direita. O jogador cuja faca foi usada para cortar o bolo ficará satisfeito com seja qual for a fatia que reste (se não foi ele que gritou "corta"). Se tivermos que resolver empates, seja porque dois ou três jogadores gritaram simultaneamente ou porque duas das facas coincidem, eles devem ser resolvidos arbitrariamente.[Stromquist 1980].

Parta do princípio que seja qual for aquele que segura a faca do meio, uma atribuição pode ser feita de modo a que nenhum dos três prefere outra fatia. Se duas de *n* pessoas discordam do valor de uma fatia de bolo, existe um algoritmo descrito [em Woodall 1956] que atribui a cada pessoa mais do que 1/*n* do bolo segundo os seus próprios pressupostos.

Finalmente, o matemático americano T. Hill mostrou que se *n* países fizerem fronteira com um terreno em disputa, esse território pode ser dividido em *n* porções adjacentes aos *n* países de modo a que a cada país possa ser atribuído uma parcela adjacente que ele considere ser pelo menos 1/ *n* do território em disputa. [Hill 1983].

Bibliografia

Dubins, Lester E, 1977. Group decision devices. *American Mathematical Monthly*, 84,5: 350-356.

Dubins, Lester E. and E.H. Spanier, 1961. How to cut a cake fairly. *American Mathematical Monthly,*68, 1-17.

Hill, Theodore, 1983. Determining a fair border. *American Mathematical Monthly,* 90,7: 438-442

Knaster, B and h. Steinhaus, 1946. Ann. De la Soc. Poliaise de Math., 19, 228-231.

Kuhn, Harold W., 1967. On games of fair division. *Essays in Mathematical Economics* (in honor of oscar Morgenstern), ed. By Martin Shubik. Princeton University Press, Princeton: 29-37.

Rebman, Kenneth. 1979. A fair share of a cake. *Dolciani Math Expositions, Mathematical Plums*, MAA. 4: 22-37.

Singer, E. Extension of classical rule of " divide and choose". *Southern Economic Journal*, 28, 391-394.

Steinhaus, H. 1948. The prolem od fair division. *Econometrica*, 16: 101-104

Steinhaus, H. *Mathematical Snapshots*, 2nd ed., New York, 1960.

Stromquist, walter. 1980. How to cut a cake fairly. *American Mathematical Monthly*, 87, 8: 640-644.

Woodall, D. R. 1980. dividing a cake fairly. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 78: 233-247.

Woodall, D. R. 1986. A note on the cake-division problem. *Journal of Combinatorial Theory*, 42: 300-301.