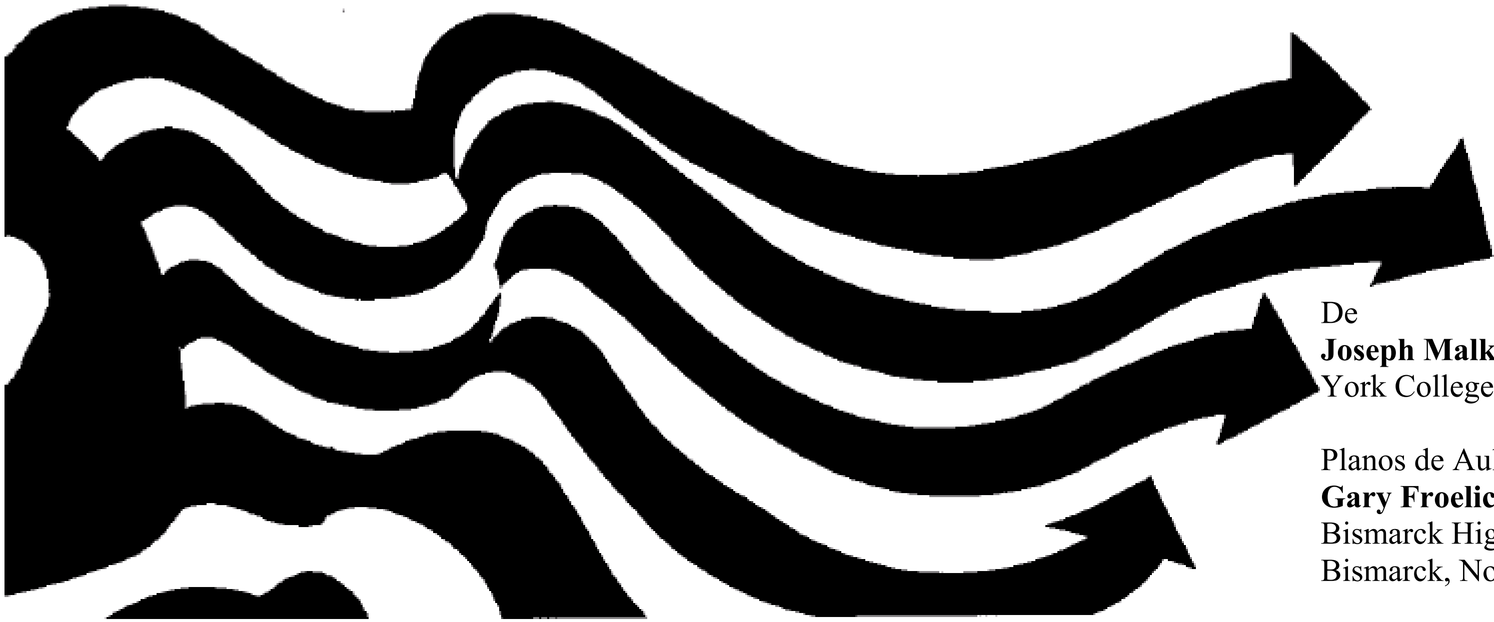
Teoria Matemática das Eleições

Teoria Matemática das Eleições



De
Joseph Malkevitch
York College, CUNY

Planos de Aula de
Gary Froelich
Bismarck Hight School
Bismarck, North Dakota

Índice

Capítulo 1. Alguns Resultados Eleitorais

A tabela 1 mostra os resultados de três eleições em Nova Iorque. Os dados apresentados são, aparentemente, os resultados típicos de uma eleição. Contudo, em duas das situações apresentadas, o candidato que os eleitores pensavam que tinha menos hipóteses de triunfar é o vencedor.

Como poderão tantos eleitores estar enganados?

Porque é que este fenómeno acontece?

Tabela 1. RESULTADOS DE ALGUMAS ELEIÇÕES EM NOVA IORQUE

1968 (Senador: Nova Iorque)			
(vencedor esperado)	Javits	1 902 986	(vencedor)
	O'Dwyer	1 333 362	
	Buckley	629 944	
		3 866 292	
1969 (Mayor: Cidade de Nova Iorque)			
	Lindsay	964 844	(vencedor)
(vencedor esperado)	Proccoccino	813 316	
	Marchi	538 404	
		2 316 564	
1970 (Senador: Nova Iorque)			
	Goodell	1 434 472	
(vencedor esperado)	Ottinger	2 171 232	
	Buckley	2 288 190	(vencedor)
		5 893 894	

Uma tentativa para explicar este facto requer uma segunda análise dos resultados. Um aspecto interessante é que, ao contrário de muitas eleições americanas, cada uma das eleições descritas na tabela 1 têm três candidatos, obtendo cada um deles um número significativo de votos. Será que o facto de existirem três candidatos, em vez dos habituais dois, está de alguma forma relacionado com os resultados observados?

Lição 1 – Eleições

Esta primeira lição corresponde ao capítulo um do módulo principal.

Com esta lição pretende-se que os alunos conheçam o modo através do qual é habitualmente escolhido o vencedor de uma eleição nos Estados Unidos. Desta forma, os estudantes deverão aprender a diferenciar um vencedor por pluralidade de um vencedor maioritário. Para além disso, pretende-se que os alunos façam cálculos que envolvam percentagens.

Para iniciar a lição pode mostrar à sua turma a transparência 1. (Como alternativa poderá mostrar a transparência 1.5, também incluída.) As eleições nos Estados Unidos envolvem frequentemente mais do que dois fortes candidatos; como exemplo podem referir-se as duas eleições sucessivas para o senado de Nova Iorque. Muitas pessoas pensam que o método utilizado para escolher o vencedor, nestas eleições, não é o mais justo.

Transparência 1

1968 (Senado: Nova Iorque)

Javits	1 902 986
O'Dwyer	1 333 362
Buckley	629 944
	3 866 292

1970 (Senado: Nova Iorque)

Goodell	1 434 472
Ottinger	2 171 232
Buckley	2 288 190
	5 893 894

Projecto 1

Recolha dados recentes de algumas eleições locais, com mais de dois candidatos para um determinado cargo. Os resultados correspondem ao esperado?

Para responder a esta questão analisemos, rapidamente, o procedimento usado para eleger os candidatos para a maioria dos cargos importantes na América. Cada eleitor vota no seu candidato favorito. Seguidamente, os votos são contados e o candidato com maior número de votos é o vencedor. (Existe a possibilidade de acontecer um empate. Para uma eleição onde existe um grande número de votantes é muito improvável que isso aconteça, logo, essa possibilidade não vai ser tida em conta.)

O procedimento eleitoral pode ser dividido em duas componentes, a primeira relaciona-se com a forma como o eleitor preenche o boletim de voto e a segunda com o método utilizado para a contagem dos votos. Na maior parte das eleições americanas, cada eleitor vota apenas num candidato e utiliza-se o método da pluralidade para a escolha do vencedor. Através deste método vence o candidato que tiver maior número de votos.

Podemos questionar se haverá algo de errado com este procedimento. Não é isto a democracia? Permitir que cada eleitor escolha o seu candidato preferido e que aquele que tenha maior número de votos ganhe? O vencedor, utilizando este processo, representará "a escolha do povo"? Considere, novamente, a Tabela 1 e os exemplos que encontrou no Projecto 1. O que podemos observar na tabela, é que existem dois candidatos com a mesma visão política que concorrem separadamente, permitindo, dessa forma, que um terceiro candidato de outra linha política ganhe. Talvez agora nos surjam algumas dúvidas quanto à justiça deste método. Então, se este método é injusto e pouco democrático, porque é utilizado?

Como já foi mencionado, a maior parte das eleições são disputadas entre dois candidatos. Nesse caso, um candidato obterá sempre a maioria dos votos, excepto se houver um empate. A distinção entre maioria e pluralidade é crucial para a nossa discussão. Para eleições com dois candidatos o vencedor pelo método da pluralidade obtém a maioria dos votos. Contudo, como a Figura 1 mostra, pode existir ou não um vencedor por maioria, embora haja sempre um vencedor por pluralidade.

Informe os alunos que actualmente existem métodos alternativos ao habitual.
Discuta estas duas eleições com os seus alunos e peça-lhes para determinarem, para cada um dos candidatos, a percentagem de votos que estes obtiveram nas referidas eleições. Escreva-os na transparência.

1968:
Javits 49,2%
O'Dwyer 34,5%
Buckley 16,3%

1970:
Goodell 24,3%
Ottinger 36,8%
Buckley 38,8%

Chame a atenção dos alunos para o facto dos candidates Goodell e Ottinger serem do mesmo quadrante político. Peça aos estudantes para indicarem em qual dos candidatos os apoiantes de Goodell votariam se ele não fosse candidato. Pergunte-lhes ainda, se Buckley representa a tendência política da maioria dos votantes. Pode chamar a atenção para um vencedor por pluralidade e por maioria. Os estudantes terão tempo para reflectir sobre estes dois conceitos quando realizarem a ficha de trabalho (FT1).
O mais importante não é chegar a conclusões, mas sim discutir os aspectos estudados.

FT1 – A, B, C

	Candidato A	Candidato B	Candidato C	Total	Vencedor por Maioria	Vencedor por Pluralidade
Eleição 1	99	100	101	300	Nenhum	C
Eleição 2	50	300	150	500	B	B

Figura 1. Resultados de duas eleições fictícias

Exercício 1
Determine, com duas casas decimais, a percentagem de votos obtida por cada um dos candidatos nas eleições da Fig. 1.

Exercício 2
Suponha que para um determinado cargo temos sete candidatos. Construa uma eleição em que o vencedor, por pluralidade, tenha exactamente 16% dos votos. Consegue encontrar um exemplo em que o vencedor, por este método, tenha menos de 16% dos votos? Qual é a menor percentagem que o vencedor de umas eleições pode ter se houver sete candidatos?

Repare que o vencedor por pluralidade da Fig. 1, o candidato C, tem um pouco mais que um terço do total de votos, no entanto, é o vencedor.

Talvez agora encontre razões para perceber porque é importante para a democracia encontrar um vencedor maioritário. Assim, na Eleição 1 podemos eliminar o candidato A, o que tem menos votos, e escolher entre B e C, de forma a obtermos um vencedor maioritário. Neste momento, em que já foi sugerido um método diferente do usual, estará preparado para aceitar que existem muitos sistemas alternativos (ver abaixo!) e descobrir como poderemos escolhê-los? Quais serão os prós e contras desses diferentes sistemas? Relembre-se que o objectivo da nossa discussão é mostrar como o pensamento analítico (matemático) contribui para as questões levantadas.

Prepare, a partir dos resultados de uma eleição recente que tenha ocorrido na sua localidade, com mais de dois candidatos, uma transparência para introduzir esta lição. Outra possibilidade é pedir aos estudantes que recolham essa informação. A discussão poderá ser iniciada a partir da informação obtida pelos alunos.

Transparência 1.5

1968 Eleição Presidencial

Richard Nixon	31 785 480
Hubert Humphrey	31 275 166
George Wallace	9 906 473
	72 967 119

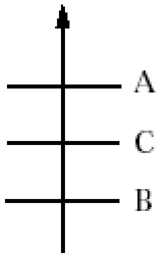
FT1 – D, E5

Capítulo 2. Tipos de Votação

Considerando que numa eleição existem dois aspectos a ter em conta: a forma como se vota e o método que se utiliza para a contagem dos votos. Comecemos por estudar o primeiro.

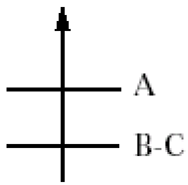
Imagine que um eleitor tem que escolher entre os candidatos A, B e C na Eleição 1 (Fig. 1). Um eleitor inteligente examina a posição dos candidatos e compara-os. Seguidamente, utiliza a informação recolhida para ordenar os candidatos por ordem de preferência. Por exemplo, se preferir A a B ou C e C a B, o seu ranking de preferências poderá ser representado pelo esquema da Fig. 2.

Figura 2. Possível ranking de preferências de um eleitor, numa eleição com 3 candidatos



O esquema da Fig. 3

Figura 3. O eleitor prefere A a B ou C mas não tem preferência entre B e C.



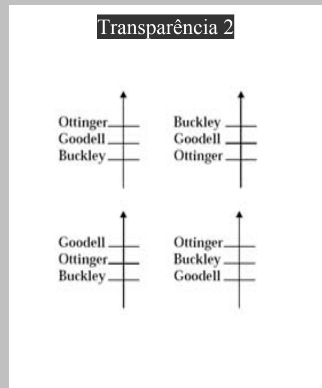
revela que o eleitor prefere A a B ou C, mas não faz distinção entre os dois últimos. Note-se que se um eleitor só tiver que votar num candidato – voto standard - votará em A, independentemente das suas segundas ou terceiras escolhas, porque A é a primeira escolha em ambas as situações (Fig. 2 e Fig. 3) perdendo-se contudo informação. Se o eleitor tiver que ordenar os candidatos pela ordem das suas preferências, essa votação, denominada *ordinal,* permite a utilização de métodos de votação mais sofisticados que o método da pluralidade.

Lição 2 – Votos e Método da Pluralidade

Esta lição está relacionada com os capítulos dois e três do módulo principal, até à discussão do método de eliminação.

Esta lição vai permitir que os alunos conheçam uma alternativa à votação convencional. Posteriormente, os alunos compreenderão o que são listas de preferência e votações ordinais.

É possível, apenas numa aula, abordar esta lição e a anterior.



FT2 – A

Exercício 3
De quantas formas diferentes podemos ordenar:
(i) Três candidatos
(ii) Quatro candidatos
(iii) n candidatos
se o eleitor nunca manifestar indiferença entre candidatos?

Exercício 4
Construa as várias listas de preferência possíveis no caso de considerarmos três candidatos e também o facto do eleitor poder não ter preferência entre nenhum deles.

Exercício 5
Supondo que um eleitor nunca demonstra indiferença entre os candidatos de uma eleição, faça a lista de todas as formas possíveis de ordenar esses quatro candidatos.

Se quisermos utilizar o método da pluralidade numa votação ordinal, só precisamos de ter em conta a escolha para o primeiro lugar. Por exemplo, observe na Fig. 4 os resultados de uma eleição:

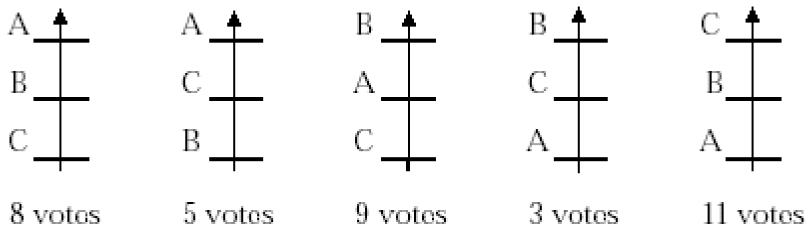
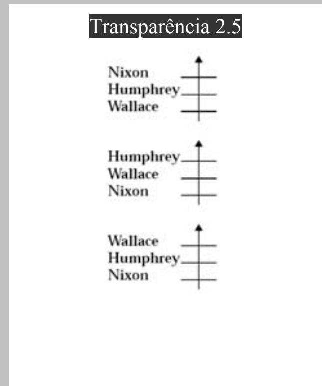


Figura 4. Resultados de uma eleição fictícia.

Usando o método da pluralidade, o vencedor é o candidato A com 13 votos. Seguem-se os candidatos B e C com 12 e 11 votos, respectivamente.

Inicie esta lição, mostrando aos alunos os resultados da eleição de 1970 em Nova Iorque (transparência 1). Embora o Goodell tenha apenas 24% dos votos, parece evidente que ganharia a Buckley numa disputa dois a dois.
Pergunte aos estudantes como é que isso poderia acontecer. Estes devem concluir que a maioria dos eleitores de Ottinger ou Buckley optariam por Goodell se o seu candidato não estivesse em votação. Mostre aos alunos a transparência 2. (A transparência 2.5 pode ser uma alternativa.)



Exercício 6.
Se numa votação ordinal é permitido que mais do que um candidato ocupe a mesma posição na lista de preferências de um eleitor, imagine um procedimento razoável para encontrar o vencedor de uma eleição, utilizando o método da pluralidade.

No caso do ranking da Fig. 2, podemos ter uma situação em que o eleitor, embora prefira A, não faça uma grande distinção entre A e C. O mesmo não acontece entre C e B, porque prefere claramente o primeiro. Se for permitida a utilização de uma escala de 10 pontos (de 1 a 10) e 10 for a pontuação mais elevada, podemos ordenar os candidatos do seguinte modo: A – 10 pontos, C – 9 pontos e B – 2 pontos. Esta votação, denominada *votação cardinal*, permite que o eleitor demonstre claramente as suas preferências. Pode definir um sistema de eleição baseado neste tipo de votação, no entanto, no próximo capítulo, só se analisarão sistemas eleitorais baseados na votação ordinal.

Capítulo 3. Métodos Eleitorais

No capítulo anterior observou-se que, utilizando uma votação ordinal, se obtém informação complementar sobre as preferências dos eleitores. O objectivo deste capítulo é investigar os vários sistemas eleitorais baseados neste tipo de votação. Para simplificar, vamos supor que os eleitores nunca colocam mais do que um candidato na mesma posição da lista de preferências. Assim, se um eleitor tiver que escolher entre os candidatos A_1, A_2 ou A_3 , poderá fazê-lo como mostra a Fig. 5.

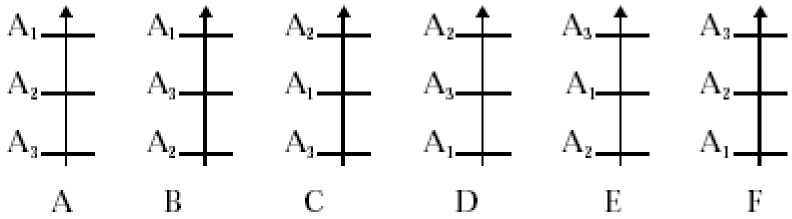


Figura 5. Seis formas diferentes de escolher três candidatos.

A Fig. 6 apresenta os resultados típicos de uma eleição, em que participaram 178 eleitores.

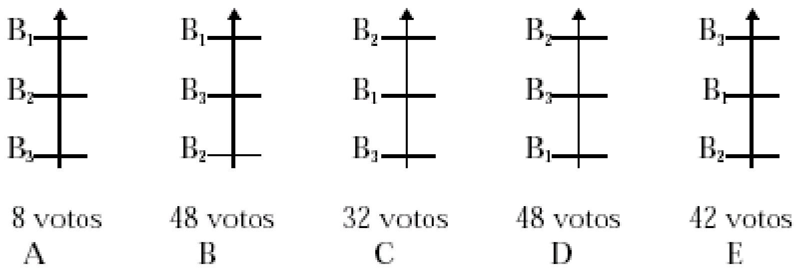


Figura 6. Eleição fictícia.

Explique aos alunos que as listas de preferência da transparência 2 nos indicam como os eleitores ordenariam os seus candidatos. Chame a atenção para o facto de, aparentemente, não existirem muitos eleitores a escolher Goodell em último lugar. Peça aos seus alunos que indiquem possíveis listas de preferência que não constem da transparência. Quando, numa votação, os eleitores podem ordenar os candidatos por ordem das suas preferências, estamos perante uma votação ordinal.
Mostre aos seus alunos a citação de Thomas Jefferson (transparência 3). Existem, nos Estados Unidos, várias propostas que pretendem reformular os procedimentos eleitorais. Algumas delas requerem o uso da votação ordinal.
Distribua a segunda ficha de trabalho pelos alunos.

Transparência 3

"I am not an advocate for frequent changes in laws and constitutions, but laws and institutions must go hand in hand with progress of the human mind. As that becomes more developed, more enlightened, as new discoveries are made, new truths discovered and manners and opinion change, with the change of circumstances, institutions must advance also to keep pace with the times."

Thomas Jefferson

Método da Pluralidade

Para decidir quem é o vencedor da eleição da Fig. 6, usando o método da pluralidade, procedemos da seguinte forma:

O número de votos para B_1 é $8 + 48 = 56$.

Obtém-se este número somando o número de votos dos casos A e B, isto porque B_1 é a primeira escolha em ambos. De modo análogo obteríamos os votos para B_2 e B_3:

O número de votos para B_2 é $32 + 48 = 80$;
O número de votos para B_3 é 42.

Utilizando o método da pluralidade, B_2 é o vencedor da eleição com 45% dos votos, no entanto, não é um vencedor maioritário. Para referência futura, sintetizaremos os votos de cada candidato da seguinte forma:

$$B_1=56, \qquad B_2=80, \qquad B_3=42. \qquad (1)$$

Exercício 7

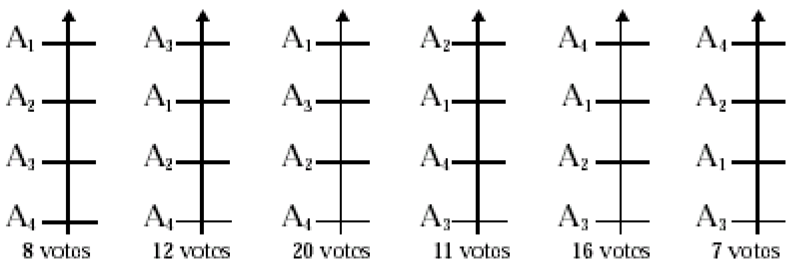


Figura 7. Dados eleitorais

(a) Determine, para a eleição anterior, o vencedor pelo método da pluralidade (Fig. 7).
(b) Qual foi a percentagem de votos que cada candidato obteve para primeiro lugar?
(c) Qual foi a fracção de votos que cada candidato obteve para primeiro lugar?
(d) Qual foi a fracção de votos que cada candidato obteve para primeiro e segundo lugares?

FT2 – D

Método de Eliminação (Run-off)

Se nenhum candidato tem a maioria dos votos para o primeiro lugar, então, como já foi mencionado, podemos eliminar todos os candidatos, excepto os dois primeiros, e repetir a eleição entre eles. Note que uma das vantagens da votação ordinal é o facto de não ser necessário que os eleitores tornem a ir às urnas. Deste modo, a escolha do vencedor pode ser feita a partir das listas de preferência. Embora as preferências de um eleitor possam mudar com o tempo, assumimos que se um candidato é eliminado da eleição, a nova lista de preferências do eleitor não inclui esse candidato. Por exemplo, se a lista de preferências de um eleitor for como mostra a Fig. 8 (a) e B_4 e B_2 forem eliminados, a nova lista será como a (b) da Fig.8.

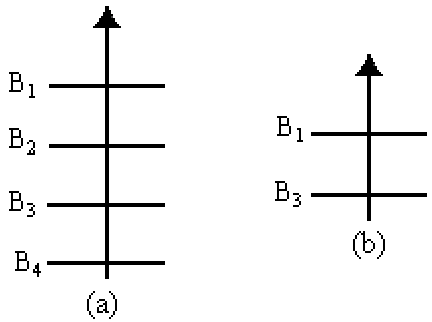


Figura 8. Se os candidatos B_4 e B_2 forem eliminados, a lista de preferências (a) passa a (b).

Podemos aplicar o método de eliminação à eleição da Fig. 6. Como observamos em (1), B_3 é o candidato com menor número de votos, logo é eliminado e realizar-se-à uma segunda volta entre B_1 e B_2. Como 42 pessoas preferiam B_3 em primeiro lugar e B_1 em segundo, esses votos passam para $B_{1,}$ que ganha a eleição com 98 votos.

$$B_1 = 8 + 48 + 42 = 98$$
$$B_2 = 32 + 48 = 80.$$

Deste modo, B_1 é o candidato vencedor pelo método de eliminação.

Lição 3 – Método de Eliminação

Esta lição está relacionada com uma parte do capítulo três do módulo principal, onde se discutiram os métodos de eliminação e eliminação sequencial.

Com esta lição, pretende-se compreender o modo como funcionam os dois métodos referidos. Deve entregar a cada aluno uma cópia da transparência 4. Utilize a transparência para explicar como se preenche o boletim de voto, referente a uma votação em que se pretende saber os sabores de gelado que os alunos preferem. No lado esquerdo da tabela, os alunos devem escolher apenas um dos sabores e no lado direito devem ordená-los por ordem de preferência 1,2,3,4.

Transparência 4

	Avelã	
	Chocolate	
	Morango	
	Baunilha	

	Avelã	
	Chocolate	
	Morango	
	Baunilha	

FT3 – A

Exercício 8

(i) Determine o vencedor da eleição da Fig.9 utilizando os métodos da pluralidade e eliminação.

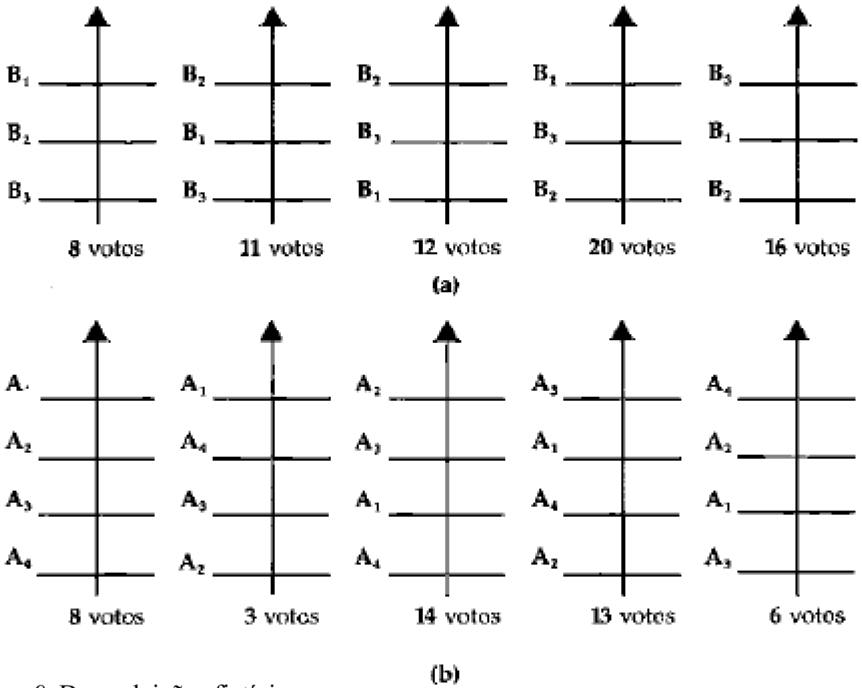


Figura 9. Duas eleições fictícias.

(ii) Qual é o vencedor da eleição (b) da Fig. 9, usando o método de eliminação sequencial. Este método, quando há n candidatos, funciona do seguinte modo: na primeira volta é eliminado o candidato com menos votos. Seguidamente, é feito um novo escrutínio entre os restantes candidatos (n-1) e é eliminado o que tiver menor número de votos. Repete-se o processo, eliminando um candidato de cada vez, até obter o vencedor.

(iii) Consegue construir uma eleição em que, através dos três métodos analisados, resultem vencedores diferentes?

Após a votação, recolha os boletins de voto e escreva, na transparência 5, o número de votos que cada sabor obteve para primeiro lugar. Não considere os dois sabores com menos votos e volte a fazer a contagem para os dois restantes. Escreva, na transparência, os valores obtidos. Diga aos seus alunos que este método é conhecido por método de eliminação. Peça aos estudantes para compararem os vencedores que se obtém através dos dois métodos já estudados (pluralidade e eliminação). O método de eliminação sequencial poderá ser abordado durante a resolução das fichas de trabalho.

Transparência 5

Sabor	N.º Votos
Avelã	
Chocolate	
Morango	
Baunilha	

Sabor	N.º Votos

Poderá tornar esta aula mais interessante para os alunos do ensino secundário se lhes pedir que consultem , por exemplo, revistas com os tops dos álbuns mais vendidos (4 ou 5 tops). Então, em vez de utilizar os sabores de gelados poderá usar a informação recolhida pelos alunos.

FT3 – B

Exercício 9
(a) Considere as listas de preferência da Fig. 10:

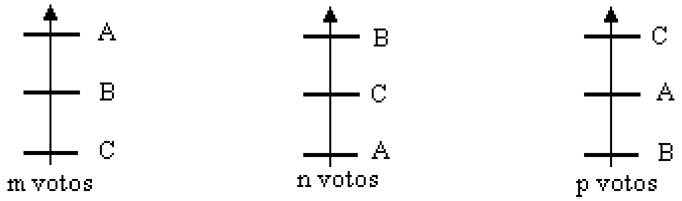


Figura 10. Figura para o Exercício 9 (a).

A que condições têm que obedecer *m, n* e *p* para que A seja o vencedor pelo método de eliminação? E para que seja B?

(b) Repita o exercício para as listas de preferência da Fig. 11.

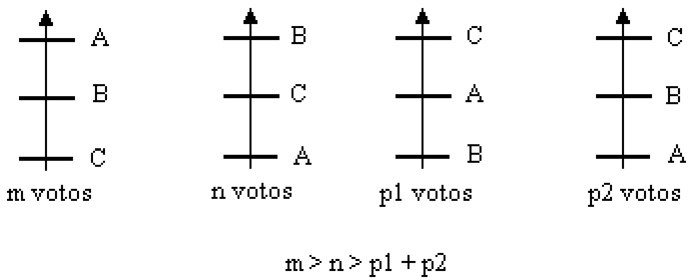


Figura 11. Figura para o Exercício 9 (b).

Se tiver tempo pode terminar a aula com uma discussão sobre os prós e contras do método de eliminação. (Que incluem o custo do actual método de eliminação, o tempo envolvido na recontagem e o sentimento de injustiça por parte dos apoiantes dos candidatos que não venceram. Tentativas para utilizar este sistema parecem indicar que este não é muito bem compreendido pelos eleitores, resultando daí a sua fraca participação no acto eleitoral.)

FT3 – C

Método de Borda

Considere a eleição da Fig. 12.

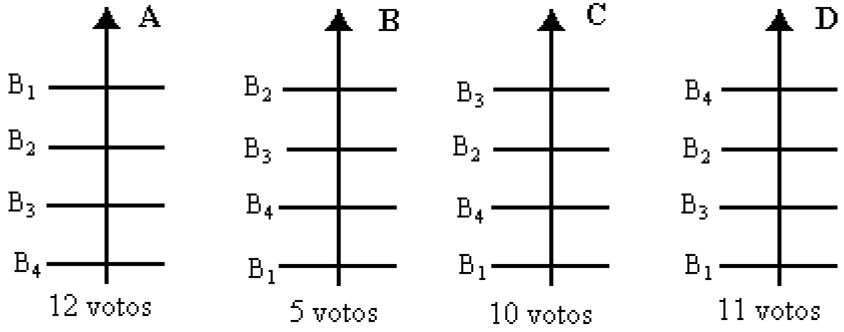


Figura 12. Eleição que ilustra a contagem de Borda.

B_1 é o vencedor por pluralidade, embora também seja o mais impopular, visto que todos os eleitores que não votaram na situação A o escolheram em último lugar. B_4 é o vencedor por eliminação, mas na generalidade não tem grande apoio. Um estudo mais cuidado revela que B_2 é a primeira ou a segunda escolha de todos os eleitores. B_2 pareceria, portanto, uma boa escolha para vencedor. Haverá algum método através do qual este candidato seja o vencedor? No século XVIII, Jean Charles Borda lançou a ideia de um novo método de eleição, que se baseava em atribuir pontos a cada candidato, conforme a posição que estes ocupassem na lista de preferências dos eleitores. Se existirem n candidatos, o candidato que estiver em primeiro lugar tem n pontos, (n-1) se estiver em segundo e assim sucessivamente.

Aplicando o método de Borda à eleição da Fig. 12, obtemos:

$$B_1 = 12(4) + 5(1) + 10(1) + 11(1) = 74$$

(B_1 tem 12 votos em primeiro lugar e cada voto vale 4 pontos; 5 votos em último lugar e cada voto vale 1 ponto; etc.)

$$B_2 = 12(3) + 5(4) + 10(3) + 11(3) = 119$$
$$B_3 = 12(2) + 5(2) + 10(2) + 11(4) = 101$$
$$B_4 = 12(1) + 5(2) + 10(2) + 11(4) = 86$$

Lição 4 – Métodos de Borda e de Condorcet

Esta lição corresponde a uma parte do Capítulo 3 do módulo principal onde se discutiram os métodos de Borda e Condorcet.

Esta lição pretende dar a conhecer os métodos de Borda e Condorcet, aos estudantes. Estes aprenderão, ainda, que pode não existir vencedor quando se utiliza o método de Condorcet.

FT4 - A

Note que o método de Borda para além de seleccionar B_2 como vencedor pode também ser usado para ordenar os candidatos (Fig. 13) com base no número de pontos que lhes são atribuídos.

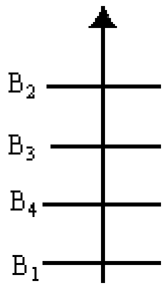


Figura 13. Ranking dos candidatos da eleição da Figura 12.

Para ilustrar outra aplicação do Método de Borda, podemos recorrer aos resultados da eleição da Fig. 6.

$$B_1 = 8(3) + 48(3) + 32(2) + 48(1) + 42(2) = 364$$
$$B_2 = 8(2) + 48(1) + 32(3) + 48(3) + 42(2) = 346$$
$$B_3 = 8(1) + 48(2) + 32(1) + 48(2) + 42(3) = 358$$

B_1 é o vencedor.

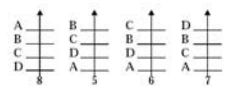
Exercício 10
Determine, utilizando o método de Borda, os vencedores das eleições das figuras 7 e 9.

Exercício 11
(a) Se numa eleição com n candidatos, utilizarmos *a* pontos para o primeiro, *b* pontos para o segundo, etc., onde $a > b > ...$ em vez de utilizarmos *n* pontos para o primeiro lugar, *n-1* para o segundo, etc., a posição relativa dos candidatos altera-se?
(b) Na Fig. 12 poderemos alterar o vencedor da eleição se considerarmos que a lista de preferências A tem mais de 12 eleitores? (Se sim, qual é o número mínimo eleitores que teremos que considerar?) Repita o exercício para cada uma das listas B, C e D.

Exercício 12
Quem é o vencedor da eleição da Fig.12 se atribuirmos (-1) pontos para o primeiro lugar, (-2) pontos para o segundo, (-3) pontos para o terceiro, etc.?

Se, da eleição anterior, resultou um número razoável de listas de preferência, faça uma transparência que lhe permita discutir estes dois novos métodos. Como alternativa, pode mostrar aos alunos a transparência 6. Peça à turma, como revisão ou teste, que determine os vencedores pelos métodos de pluralidade, eliminação e eliminação sequencial. (Os vencedores são A, D e C respectivamente!)
A transparência pode também ser utilizada para descobrir o vencedor pelo método de Borda.
A transparência 7 é, provavelmente, a mais indicada para introduzir o método de Condorcet, uma vez que implica a realização de menos comparações.

Transparência 6



FT4 - B

Método de Condorcet

Aplicando o Método de Borda, B_1 é o candidato vencedor apesar de ter apenas 31% dos votos para o primeiro lugar, ou seja, está longe de obter uma maioria. Para garantir essa maioria, consideremos todos os confrontos possíveis entre dois candidatos. Por exemplo, na eleição da Fig. 6, devemos considerar os resultados de três confrontos:

B_1 vs. B_2; B_1 vs. B_3; B_3 vs. B_2

O resultado destes confrontos dois a dois é:

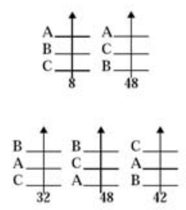
B_1 vs. B_2: $B_1 = 8 + 48 + 42 = 98$
$B_2 = 32 + 48 = 80$

B_1 vs. B_3: $B_1 = 8 + 48 + 32 = 88$
$B_3 = 48 + 42 = 90$

B_3 vs. B_2: $B_2 = 88 + 32 + 48 = 88$
$B_3 = 48 + 42 = 90$

Deste modo, B_3 vence os outros dois candidatos, logo pode ser considerado o vencedor. O método em que se baseia este exemplo, parece ter fortes atractivos. Se um candidato vence todos os outros em confrontos dois a dois, parece "justo" que ele seja o vencedor. Este método, originalmente descrito pelo Marquês de Condorcet, não é, infelizmente, tão bom como parece à primeira vista. Para ilustrar este problema consideremos a eleição da Fig. 14.

Nesta eleição, A_1 bate A_2 por 53 contra 46 e A_2 bate A_3 por 68 contra 31. A nossa intuição dir-nos-ia que se A_1 bate A_2 e A_2 bate A_3 então A_1 bate A_3. Contudo, a nossa intuição está errada porque A_3 bate A_1 por 77 contra 22!



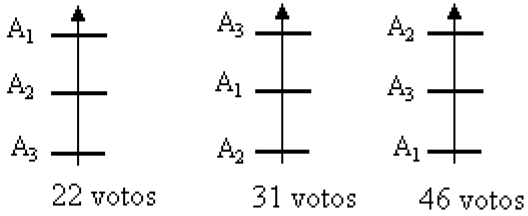


Figura 14. Uma eleição sem “vencedor Condorcet”.

Deste modo, não existe vencedor Condorcet nesta eleição. Assim, o método de Condorcet não é um procedimento que possa ser utilizado, uma vez que existem eleições onde, por este método, não há vencedor. Utilizando uma terminologia mais matemática, poderíamos dizer que não estamos perante uma função.

Exercício 13
Se pensarmos que uma eleição é uma função, qual é o seu domínio? E contradomínio?

Exercício 14
Aplique o método de Condorcet às eleições das figuras 9 e 12. Existirá um vencedor para cada uma das situações?

Exercício 15
Como podemos alterar o método de Condorcet de forma a que exista sempre um vencedor?

Exercício 16
Consegue encontrar um exemplo de uma eleição, com cinco candidatos, onde o vencedor por pluralidade, eliminação, Borda e Condorcet não seja o mesmo?

Exercício 17
Para quatro candidatos, construa um grupo de listas de preferência onde não exista um vencedor Condorcet. Consegue encontrar um exemplo onde isso se aplique com *n* candidatos?

Projecto 2

Invente um método de eleição baseado na votação ordinal. Explique porque o considera "democrático."

Um processo de visualizar o método de Condorcet é representar cada candidato por um ponto no plano e construir um segmento orientado de A para B se A vencer B. Considere as listas de preferência da Fig. 15:

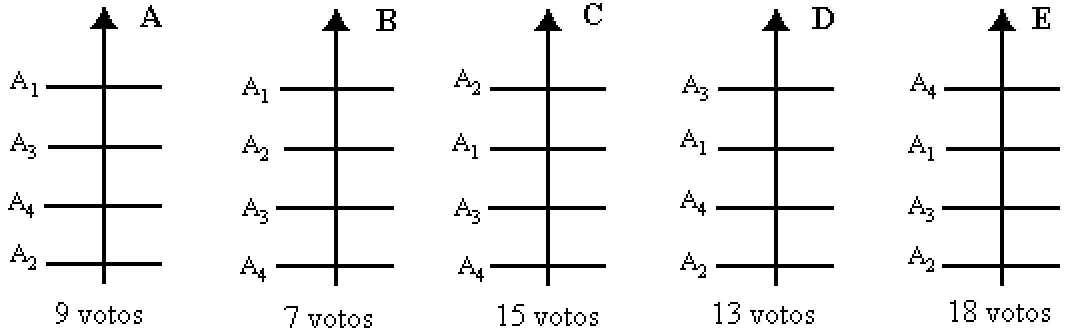


Figura 15. Uma eleição que ilustra o método de Condorcet.

Obtemos o diagrama da Fig. 16:

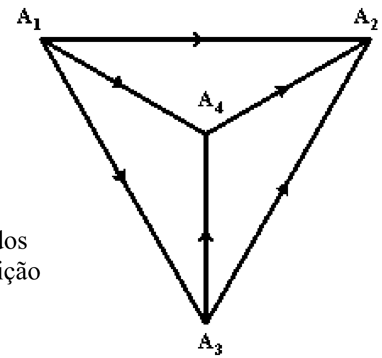
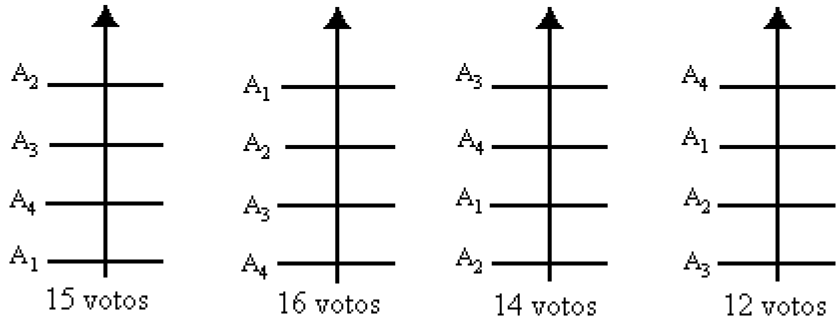


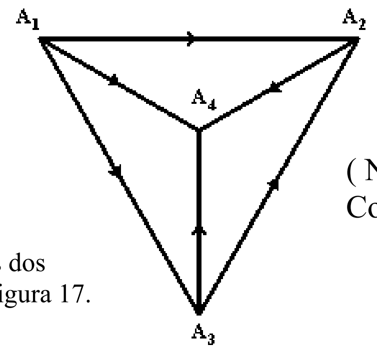
Figura 16. O diagrama mostra os resultados dos confrontos, dois a dois, dos candidatos da eleição da figura 15.

pois, por exemplo, A_1 bate A_4 por 44 contra 18. Verificando-se, por isso, que o segmento que une A_1 a A_4 está orientado de A_1 para A_4.

A partir das listas da Fig. 17:



obtemos o diagrama da Fig. 18:



(Não existe vencedor Condorcet)

Figura 18. O diagrama mostra os resultados dos confrontos, dois a dois, dos candidatos da Figura 17.

Na eleição da Fig.19 também não existe vencedor Condorcet.

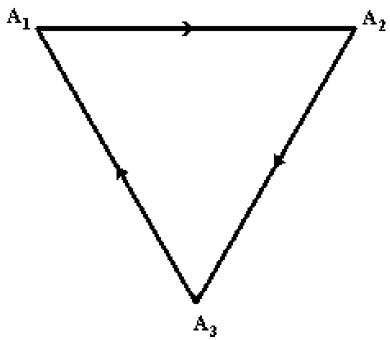


Figura 19. Diagrama de uma eleição sem vencedor Condorcet.

Aos diagramas anteriores chamamos gráficos orientados. São construídos unindo pontos - os vértices - através de segmentos orientados chamados arestas. Este tipo de gráfico é conhecido por *gráfico de torneio*, porque pode servir de modelo para apresentar os resultados de torneios em que os participantes se defrontam dois a dois. Note que, quando não existe um vencedor Condorcet, é possível começar um percurso num vértice e, seguindo o sentido dos segmentos, voltar ao início passando ou não por todos os vértices. Este percurso é denominado por circuito (orientado). Este circuito designa-se por circuito Hamiltoniano se, durante o trajecto referido passarmos uma única vez por todos os vértices. A designação de circuito Hamiltoniano surge devido ao facto de William Rowan Hamilton ter sido a primeira pessoa a abordar este conceito.

Consideremos A_1, ..., A_n propostas de lei em vez de candidatos, e suponhamos que essas propostas vão ser votadas duas a duas, até que uma delas vença e se torne lei. Este processo é eficaz se o gráfico orientado que lhe estiver associado tiver um vencedor Condorcet. Contudo, se o diagrama tiver um circuito Hamiltoniano, isso significa que a ordem pela qual são votadas as propostas de lei determina o resultado final. De facto, podemos definir uma sequência de votação para as proposta de lei, de modo a que a opção A_i escolhida se torne lei. É inquietante pensar que a aprovação de leis não depende unicamente dos legisladores, mas também da ordem pela qual as propostas de lei são colocadas a votação.

Exercício 18
Construa uma sequência de pares de votação para as propostas de lei do gráfico da Fig.20, de modo a que A_3 se torne lei. Repita o exercício, mas em vez de A_3 considere A_1, A_2 e A_4.

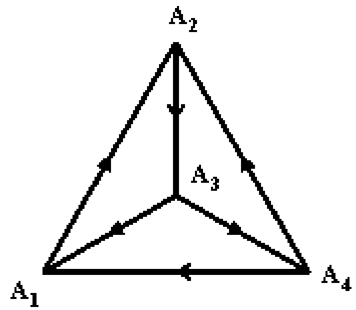
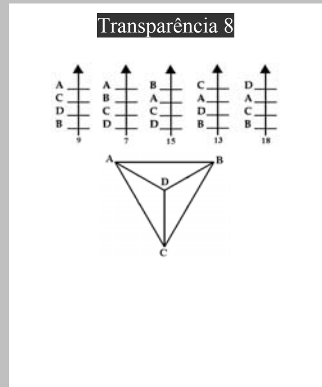


Figura 20. O gráfico orientado mostra a votação entre quatro propostas de lei.

Lição 5 – Gráficos Orientados e Voto por Aprovação

Esta lição, para terminar o módulo principal, incide sobre os capítulos 3, 4 e 6.

Esta lição pretende introduzir um esquema simples e útil (gráfico orientado) que permite analisar eleições. Para além de interpretar e desenhar estes diagramas, os estudantes devem perceber em que consiste um circuito Hamiltoniano. No âmbito das reformas dos métodos eleitorais, o voto por aprovação surge como uma das mais interessantes propostas. A transparência 8 é aconselhável para explicar os diagramas.



FT5 – A, B, C

Capítulo 4. Teorema de Arrow

Os métodos de votação descritos: pluralidade, eliminação, eliminação sequencial, de Borda e Condorcet permitem obter, numa mesma votação, diferentes vencedores. Então qual será o vencedor "mais justo" de uma eleição? Provavelmente, este facto deixa-nos mais confusos do que estávamos no início deste estudo. Este foi o problema com que Kenneth Arrow se deparou em 1950. O trabalho que desenvolveu, neste âmbito, fez com que ganhasse o prémio Nobel da Economia. Arrow propôs que, em vez de tentarmos encontrar métodos justos para uma eleição, como se vinha fazendo até à altura, se deveria definir as características que tornam justo um método de eleição e, em seguida, tentar encontrar um método que as satisfizesse.

Arrow estava mais interessado na forma como ordenar os candidatos de uma eleição do que no método para escolher um vencedor.

Arrow investigou os seguintes critérios para uma eleição justa:

(a) Não deve haver ditador.
(b) Se um eleitor prefere o candidato A ao candidato B, então a sociedade deve preferir A a B.
(c) O método usado não deve incentivar o eleitor a mentir acerca das suas preferências eleitorais.

O item (c) é uma das considerações inesperadas que pode surgir quando usamos a matemática para investigar situações deste tipo.

Por exemplo, no capítulo 3, o método de Borda, quando aplicado à eleição da Fig. 12, pode ser usado para obter o ranking dos candidatos (Fig. 13). Suponha, contudo, que os eleitores que votaram na lista de preferências C da Fig. 12 mentiram acerca das suas verdadeiras preferências e votaram na lista de preferências da Fig. 21. Aplicando o método de Borda, agora com esta nova lista de preferências (Fig. 22), obtemos o ranking da Fig. 23, onde aparecem, de forma detalhada, os cálculos necessários à aplicação do referido método.

Pode desenhar as setas na transparência depois de explicar como se fazem as comparações entre dois candidatos. Uma maneira de o fazer é riscar todos os candidatos da lista de preferências, excepto os que estão em disputa. Repita o processo para fazer a comparação seguinte.

Transparência 10

Critérios de Arrow para uma eleição justa:
1) Não deve haver ditador;
2) Se um eleitor prefere o candidato A ao candidato B, então a sociedade deve preferir A a B.
3)-5) outras condições.

Teorema de Arrow
Não existe nenhum método eleitoral que ordene três ou mais candidatos, a partir das preferências individuais e que obedeça a cinco condições de justiça.

Como pode observar, o efeito desta “mentira” é que B_3 passa à frente de B_2, tornando-se o vencedor. Como estes 10 eleitores preferem B_3 a B_2 parece razoável que eles tenham alterado as suas preferências de forma a que B_3 fosse eleito. Se conseguíssemos encontrar um método que não encorajasse os eleitores a mentir, certamente que o processo eleitoral estaria mais simplificado. (O método de Condorcet não encoraja os votantes a mentir acerca das suas preferências, o mesmo não acontece com o método de Borda.)

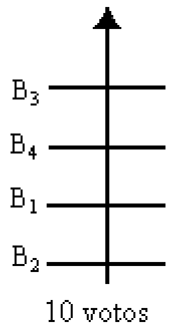


Figura 21. Alteração da lista C da figura 12, em que 10 eleitores mentiram acerca das suas verdadeiras preferências.

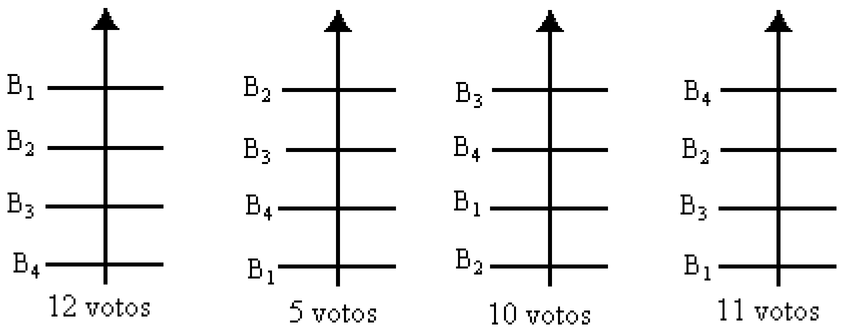


Figura 22. Alteração da eleição da Figura 12 onde se substitui uma das listas pela da Figura 21.

$B_1 = 48 + 5 + 20 + 11 = 84$
$B_2 = 36 + 20 + 10 + 33 = 99$
$B_3 = 24 + 15 + 40 + 22 = 101$
$B_4 = 12 + 10 + 30 + 44 = 96$

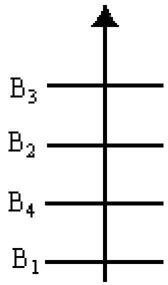


Figura 23. Ranking da eleição da Figura 22, que se obtém a partir do método de Borda

Arrow enunciou cinco critérios para uma eleição justa. Na sua tese de doutoramento *Social Values and Individual Choice*, provou um surpreendente teorema.

Teorema de Arrow (1951)
Não existe nenhum método eleitoral que ordene três ou mais candidatos, a partir das preferências individuais, e que obedeça a cinco condições de justiça.

Segundo o Teorema de Arrow qualquer processo eleitoral viola alguns dos critérios desejáveis para uma eleição justa.
Poderemos encontrar mais informação sobre estes cinco critérios em *Games and Decisions*, de R. Luce and H. Raiffa [8]. O resultado de Arrow, longe de ser a "última palavra" sobre eleições, constituiu um grande incentivo para as investigações matemáticas, no âmbito dos procedimentos eleitorais. Para além disso, encorajou os cientistas políticos a procurar reformas que corrigissem as fraquezas dos actuais métodos eleitorais (ver [2]).

Projecto 3
Muitos sistemas "exóticos" de ranking são usados para ordenar jogadores ou equipas. Investigue sistemas que permitem ordenar equipas e/ou jogadores de: (a) Ténis (b) Xadrez (c) Hóquei (d) Futebol.

Capítulo 5. Representação Proporcional

Em algumas eleições, não se pretende eleger nem ordenar candidatos para um determinado cargo. Em vez disso, pode-se querer preencher um grande número de lugares, a partir de um grande leque de candidatos. Por exemplo, em Nova Iorque existem muitos conselhos locais de escola, e a cada um correspondem vários lugares. Para complicar a questão, muitos desses conselhos servem diversos círculos. Então, um conselho pode ser escolhido por um bairro com 30% de negros, 25% de hispânicos e 45% de brancos. O mesmo bairro pode ter 35% de católicos, 45% de protestantes e 20% de judeus. Se utilizarmos um procedimento análogo ao da pluralidade, para encontrar o vencedor, os lugares disponíveis poderão ser preenchidos apenas por brancos protestantes. Em situações como esta, é desejável que exista uma forma de *representação proporcional*. Assim, dada a importância dos problemas raciais, será desejável ter alguns pretos no conselho de escola, apesar de os brancos constituírem a maioria dos habitantes do bairro. Podemos utilizar uma modificação do método da eliminação sequencial para obter uma representação proporcional para os lugares a preencher.

Para se ser eleito para um determinado lugar do conselho é necessário ter uma certa quota de votos. Se um conjunto de eleitores der ao candidato mais do que a quota necessária para a sua eleição, então o excesso de votos é transferido para a segunda opção dos eleitores. Se, num determinado momento, nenhum dos candidatos tiver a quota necessária e ainda existirem lugares por preencher, aquele que tem menos votos é eliminado e os votos desse candidato são transferidos, como no método da eliminação sequencial, para os outros candidatos. Seguidamente, far-se-à uma descrição mais detalhada deste procedimento. Suponha que existem n lugares a ser preenchidos e que M eleitores votam, ordenando os n candidatos pela ordem das suas preferências (não é permitido colocar mais do que um candidato na mesma posição).

Se um candidato obtém

$$q = \left\lfloor \left(\frac{M}{n+1} + 1 \right) \right\rfloor \qquad \text{(Ver nota de rodapé 1.)}$$

Nota de Rodapé

1. $\lfloor Z \rfloor$ parte inteira de Z, menor ou igual a Z. Assim, $\lfloor 18 \rfloor = 18$, $\lfloor 19.4 \rfloor = 19$ e $\lfloor 106.8 \rfloor = 106$

então o candidato é eleito. Para cada candidato C, o seu excesso de votos é dado pelo número de votos de C – q. Esses votos são transferidos para os candidatos que ainda não foram eleitos nem eliminados, de acordo com a lista de preferências dos eleitores. (A forma como é feita essa transferência difere de um sistema para outro.) Se um candidato é eleito num dado momento, o candidato que tem menos votos é eliminado e os seus votos são transferidos para o candidato seguinte que tem menos votos. Este processo repete-se até todos os lugares estarem preenchidos. Esta abordagem à representação proporcional é conhecida como transferência simples de voto e atingiu o seu objectivo - o de não obter representações monolíticas para os conselhos de escola. É interessante realçar que este método também é utilizado na Austrália, em eleições nacionais, embora nesse contexto não funcione como método de representação proporcional, já que envolve apenas um círculo eleitoral. Nas eleições municipais da cidade de Nova Iorque chegou a utilizar-se o método de transferência simples de voto. No entanto, o sistema foi abandonado quando, a partir deste, um candidato comunista poderia ser eleito.

Capítulo 6. Desenvolvimentos Recentes

Nos últimos anos, os métodos eleitorais, para uma eleição justa, têm sido estudados segundo vários pontos de vista. Um método diferente dos usuais permite ao eleitor votar em todos os candidatos que "aprove" (sem ordem de preferência). Ou seja, em qualquer candidato que deseje ver eleito. O candidato com maior número de votos ganha. Este sistema, conhecido por *voto por aprovação,* tem algumas características atractivas e tem sido proposto como alternativa ao método da pluralidade. Alguns dos aspectos referentes a este sistema estão descritos no livro Approval Voting, and Brams and Fishburn [2].

Exercício 19
Para a eleição da Fig. 24 determine o vencedor usando os seguintes métodos: (a) Pluralidade, (b) Eliminação, (c) Eliminação Sequencial, (d) de Borda, (e) Condorcet, (f) Aprovação (para esta última situação considere que os eleitores votaram, indiferentemente, apenas nas duas primeiras escolhas da lista de preferências.)

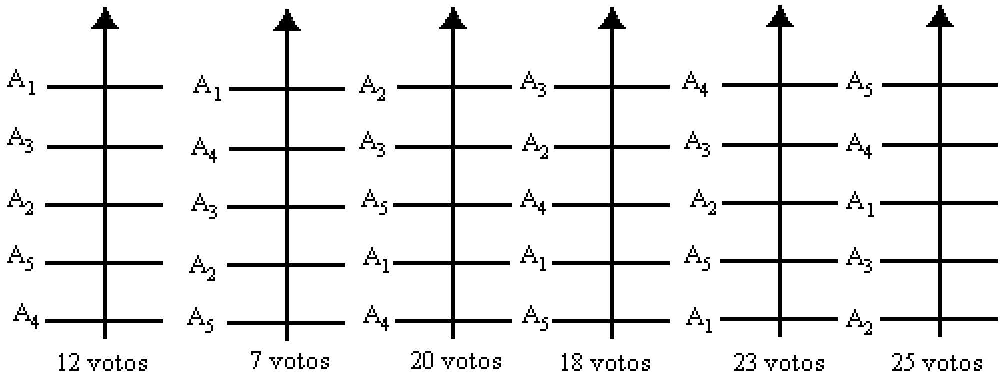


Figura 24. Eleição fictícia.

Para explicar o voto por aprovação, dê a cada estudante uma cópia da transparência 9 e refira que é possível votar em todos os sabores que desejar. Certifique-se que os alunos perceberam que não é para ordenar os sabores, mas sim para assinalar todos os sabores que gostem. Recolha os boletins de voto e faça corresponder um ponto a cada sabor assinalado. Essa correspondência pode ser feita na mesma transparência.
Compare o sabor do gelado vencedor através dos vários métodos de votação já estudados.

Transparência 9

	Avelã
	Chocolate
	Morango
	Baunilha

FT5 – D

Referências

(1) Arrow, K., *Social Choice and Individual Values*, second edition, Yale University Press, New Haven, CT, 1963.

(2) Brams, S. J. and Fishburn, P. C., *Approval Voting*, Birkhauser, Boston, MA, 1983.

(3) Black, D., *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University Press, London, 1958.

(4) Farquharson,R., *Theory of Voting*, Yale University Press, New Haven, CT,1969.

(5) Goldberg, Samuel, ed. "Social Choice and Individual Values," *Some Illustrative Examples in the Use of Undergradate Mathematics in the Social Sciences*, Committee on the Undergraduate Program in Mathematics and Mathematical Social Science Board, Mathematics Association of America, Hayward, CA.

(6) Kemeny, J. G., and Snell, J. L., *Mathematical Models in the Social Sciences*, Blaisdell, New York, 1962; reprinted by M. I. T. Press, Cambridge, MA.

(7) Lucas, W. F., (ed.), Political and Related Models, Vol. 2, Modules in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1957.

(8) Luce, R. D., and Raiffa, H., *Games and Decisions*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1957.

(9) Malkevitch, Joseph and Meyer, Walter, *Graphs, Models and Finite Mathematics*, prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1974.

(10) Olinick, Michael, *An Introduction to Mathematical Models in the Social Life Sciences*, Addison Wesley, Reading, MA 1978

(11) Roberts, Fred S., *Discrete Mathematical Models With Applications to Social, Biological and Environmental Problems*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1976.

(12) Staffin, P. D., Jr., *Topics in the Theory of Voting*, COMAP, Lexington, MA, 1980.

Glossário

Circuito / Circuito Hamiltoniano
Percurso, num gráfico orientado, em que, seguindo o sentido dos segmentos orientados, se regressa ao ponto de partida. Num circuito Hamiltoniano temos que passar através de todos os vértices, uma única vez.

Gráfico de Torneio
Figura geométrica composta por pontos que representam os candidatos de uma eleição e por segmentos que unem cada par de candidatos. Se orientarmos o segmento, colocando-lhe uma seta, de X para Y, isso significa que num escrutínio entre ambos, X tem mais votos que Y. Um gráfico deste tipo é útil para estudar uma eleição baseada no método de Condorcet.

Método de Borda
Processo eleitoral que consiste em atribuir pontos aos candidatos conforme a posição que ocupam na lista de preferências do eleitor (votação ordinal). O vencedor é o candidato com maior número de pontos.

Método de Condorcet
Método eleitoral que conduz a confrontos entre todos os pares de candidatos. Se o candidato X vence todos os confrontos em que participa, X vence. Através do método de Condorcet nem sempre existe vencedor.

Método de Eliminação
Método eleitoral em que são eliminados todos os candidatos excepto os dois com maior número de votos. Em seguida, realiza-se uma nova eleição entre estes dois candidatos. No entanto, essa eleição será desnecessária se, na primeira eleição, foi utilizada uma votação ordinal.

Método da Pluralidade
Método eleitoral onde os eleitores escolhem um candidato; o vencedor é o candidato que tiver mais votos. Este é o método utilizado na maioria das eleições americanas. Se o candidato receber mais de 50% dos votos, então é um *vencedor maioritário*.

Método de Eliminação Sequencial
Método eleitoral em que é eliminado, em primeiro lugar, o candidato com menor número de votos, fazendo-se, seguidamente, uma nova eleição entre os restantes. O processo repete-se até se encontrar um vencedor. Se for utilizada, na eleição, uma votação ordinal não é necessário mais do que uma votação.

Teorema de Arrow
Não existe nenhum método eleitoral que ordene três ou mais candidatos, a partir das preferências individuais, e que obedeça a cinco condições de justiça.

Votação Cardinal
Eleição em que o eleitor pode expressar claramente, através de uma pontuação, as suas preferências em relação a cada um dos candidatos.

Votação Ordinal
Eleição onde é permitido que o eleitor ordene os candidatos segundo as suas preferências.

Voto por Aprovação
Método eleitoral que permite que os eleitores votem no número de candidatos que não se importariam de ver eleitos. O vencedor é o candidato com maior número de votos.

Revisão

Se desejar, pode ocupar um período da aula para discutir as questões já estudadas. Pergunte aos alunos qual o método de votação que consideram mais justo.
Se, na sua localidade, houve alguma eleição recente, com vários candidatos, pergunte aos estudantes se o resultado dessa eleição teria sido diferente se se tivesse utilizado outro método eleitoral.

Os estudantes com mais dificuldades podem resolver a ficha de revisão.

Os conhecimento adquiridos podem ser consolidados através de várias actividades. Uma possibilidade é a realização de uma eleição, com vários candidatos (na turma), utilizando uma votação ordinal e de aprovação. A partir desta, os alunos devem determinar o vencedor pelos vários métodos estudados. No final, deve ser feita uma reflexão sobre o método que melhor se adequa à situação.

Outra actividade possível é criar um cenário em que os alunos, a partir de várias propostas de lei, por eles elaboradas, escolhem, através de votação, a proposta mais popular, que se tornará, desta forma, lei.
Se os alunos da sua escola quisessem que uma nova lei fosse decretada, como procederiam?
Seria interessante realizar uma eleição, como a referida, em conjunto com a disciplina de Estudos Sociais.

Se os alunos da sua turma chegarem a um consenso sobre um processo alternativo para conduzir uma eleição, poderão apresentar a sua proposta às entidades responsáveis. Faça um relatório com as opiniões dos seus alunos e pergunte-lhes se conhecem, na sua localidade, alguma proposta para alterar o sistema eleitoral.

Ficha de Trabalho 1: Lição n.º 1

A. Na maioria das eleições, o vencedor é o candidato que tem mais votos. O método utilizado para escolher o vencedor chama-se *método da pluralidade*. Se o candidato tem mais de metade dos votos, chamamos-lhe *vencedor maioritário.* Suponha que numa eleição Smith tem 50 votos, Williams 300 e Jones 150.

1. Quantas pessoas votaram nesta eleição?

2. Calcule a percentagem e a fracção de votos para cada um dos candidatos.

3. Quem é o vencedor pelo *método da pluralidade*?

4. Existe um vencedor maioritário nesta eleição? Quem?

B. Noutra eleição, McGuire recebeu 99 votos, Thompson 100 votos e Swenson 101 votos.

1. Calcule, arredondando às décimas, a percentagem de votos de cada candidato.

2. Quem é o vencedor por pluralidade?

3. Existe um vencedor maioritário? Quem?

C. Holmes e Watson são os únicos candidatos numa eleição em que votaram 500 eleitores.

1. Atribua a cada candidato um determinado número de votos, de modo a que Holmes vença com a menor diferença possível.
Holmes ________ Watson ________

2. Qual foi a percentagem de votos que atribuiu a cada um?
Holmes ________ Watson ________

3. Numa eleição só com dois candidatos existirá sempre um vencedor maioritário?

D. Existem 4 candidatos numa eleição: Preto, Castanho, Branco e Verde. Vão participar nesta eleição 200 eleitores.

1. Atribua a cada candidato um certo número de votos de modo a que o Preto seja um vencedor por pluralidade, com o menor número possível de votos.
Preto ____ Castanho ____
Branco ____ Verde ____

2. Calcule a percentagem de votos que atribuiu a cada candidato.
Preto ____ Castanho ____
Branco ____ Verde ____

E. Slater, Parker e Hall são candidatos duma eleição em que votaram 900 pessoas. Slater teve 34% dos votos, Parker teve 30% e Hall 36%.

1. Calcule o número de votos que obteve cada candidato.
Slater ____ Parker ____ Hall ____

2. Slater e Parker pertencem ao mesmo quadrante político, o que não acontece com Hall. Se Parker não for candidato quem pensa que será o vencedor?

Ficha de Trabalho 1: Lição n.º 1 - Respostas

A. 1. 500.
   2. Smith 10%; 1/10, Williams 60%; 3/5, Jones 30%; 3/10.
   3. Williams.
   4. Sim, Williams.

B. 1. McGuire 33.0%; Thompson 33.3%, Swenson 33.7%.
   2. Swenson.
   3. Não.

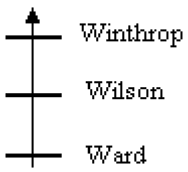
C. 1. Holmes 251, Watson 249.
   2. Holmes 50.2%, Watson 49.8%.
   3. Sim (excepto em caso de empate).

D. 1. Preto 51; os outros três poderão ter 50, 50, 49.
   2. Preto 25.5%; os outros três poderão ter 25%, 25%, 24.5%.

E. 1. Slater 306, Parker 270, Hall 324.
   2. Slater.

Ficha de Trabalho 2: Lição n.º 2

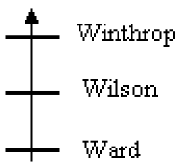
A. Em algumas eleições, os eleitores podem indicar, por ordem de preferência, os candidatos concorrentes. A este tipo de voto chamamos *voto ordinal*. Se Wilson, Ward e Winthrop são candidatos a uma eleição e se o eleitor votar Winthrop – Wilson – Ward, isso significa que em primeiro lugar prefere Winthrop, em segundo Wilson e em terceiro Ward. Uma forma prática de ordenar os candidatos será utilizando a seguinte lista de preferências:



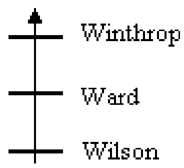
8 votos

O número oito significa que oito pessoas votaram, por esta ordem, nos candidatos.

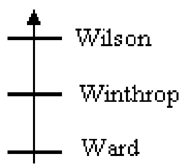
1. Quantas pessoas votaram na eleição seguinte?



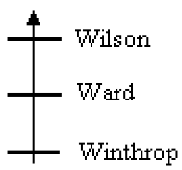
8 votos



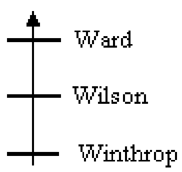
5 votos



9 votos



3 votos



11 votos

2. Qual foi o número de votos obtido por cada um dos candidatos para primeiro lugar?

3. O vencedor por pluralidade, numa votação ordinal, é o candidato com maior número de votos, para primeiro lugar. Quem é o vencedor por pluralidade nesta eleição?

4. Calcule a percentagem de votos que cada candidato obteve.

5. Terá esta eleição um vencedor maioritário?

6. Quem foi o candidato escolhido por menos votantes para o último lugar?

7. Na sua opinião, qual o candidato que deveria vencer?

8. Existe uma possibilidade de ordenar os candidatos que não foi considerada por nenhum dos eleitores. Qual?

B. Numa eleição existem três candidatos: Bumstead, Blondie e Dithers.

1. Indique as seis formas possíveis de ordenar os três candidatos.

2. Suponha que votaram 50 eleitores. Distribua os votos pelas seis situações que considerou, de modo a que Blondie ganhe, mas não seja um vencedor maioritário.

C. Suponha que existem quatro candidatos numa eleição. Designe-os por A, B, C e D.

1. Indique todas as situações possíveis para ordenar os 4 candidatos, com A em primeiro lugar.

2. Em quantas situações podemos ter B como a primeira escolha?

3. De quantas formas possíveis podemos ordenar os candidatos, nesta eleição.

D. O voto ordinal é usado quando, numa eleição, queremos encontrar um vencedor através de um processo diferente.

1. Na sua opinião qual lhe parece o processo mais justo para encontrar um vencedor na questão A desta ficha?

Ficha de Trabalho 2: Lição n.º 2 - Respostas

A. 1. 36.
2. 13,12,11.
3. Winthrop.
4. 36.1%, 33.3%, 30.6%.
5. Não.
6. Wilson.
7. Várias respostas possíveis.
8. Ward em primeiro, Winthrop em segundo, Wilson em terceiro.

B. 1.
Blondie – Bumstead – Dithers
Blondie – Dithers – Bumstead
Bumstead - Blondie – Dithers
Blondie – Dithers – Bumstead
Dithers – Bumstead – Blondie
Dithers – Blondie – Bumstead

2. As respostas podem ser várias, no entanto, par Blondie ser o primeiro terá que ter no mínimo 18 votos e não mais que 25.

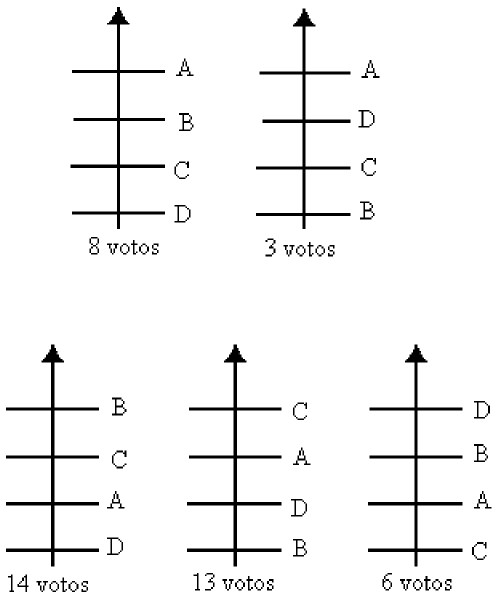
C. 1. ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADCB, ADBC.
2. 6.
3. 24.

D. 1. Várias respostas possíveis.

Ficha de Trabalho 3: Lição n.º 3

A. Se quisermos obter um vencedor maioritário, numa eleição com mais de dois candidatos em que, à partida, isso não acontece, podemos consegui-lo realizando uma segunda volta entre os 2 candidatos mais votados. No entanto, a despesa inerente à nova eleição surge como um dos maiores inconvenientes. Mas, se utilizarmos uma votação ordinal, obtemos o vencedor sem ter que realizar uma nova eleição.

Para ver como isso é possível, consideremos a eleição seguinte:



1. Indique o número de votos que cada um dos candidatos obteve para primeiro lugar.

A _____ B _____ C _____ D _____

2. Indique o candidato que ocupa cada uma das posições:
Primeiro _______ Segundo _______
Terceiro _______ Quarto _______

3. O candidato com maior número de votos, para o primeiro lugar, é o vencedor por pluralidade. Que percentagem de votos obteve o vencedor?

4. Será um vencedor maioritário?

5. Elimine os candidatos que ficaram nos dois últimos lugares. Refaça as cinco listas de preferência com os candidatos restantes.

6. O candidato que recebe o maior número de votos, a partir das novas listas construídas, é o vencedor por eliminação. Indique o número de votos de cada um dos candidatos que foram à segunda volta.
Candidato ________ n.º de votos ________
Candidato ________ n.º de votos ________

7. Qual é o candidato vencedor?

8. Que percentagem de votos teve o vencedor na segunda volta?

Ficha de Trabalho 3: Lição n.º 3 (Continuação)

B. Outra forma de determinar o vencedor de uma eleição, quando não existe vencedor maioritário, é utilizar o método de eliminação sequencial. É semelhante ao de eliminação só que os candidatos são eliminados um de cada vez.

1. Na eleição da questão A, elimine o candidato que ficou em quarto lugar. Refaça as cinco listas de preferência, sem esse candidato.

2. Determine o número de votos de cada um dos restantes três candidatos.
Candidato ________ n.º de votos ________
Candidato ________ n.º de votos ________
Candidato ________ n.º de votos ________

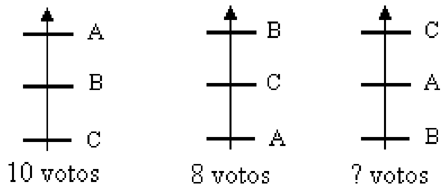
3. Qual foi o candidato que obteve o menor número de votos?

4. Elimine esse candidato das listas de preferência da questão 1. Refaça as listas de preferência.

5. Determine o número de votos de cada um dos restantes dois candidatos.
Candidato ________ n.º de votos ________
Candidato ________ n.º de votos ________

6. O vencedor por este método é o mesmo que pelo método de eliminação?

C. Observámos que vários métodos de votação conduzem a resultados diferentes numa eleição. Considere a eleição seguinte:



1. Quantos votos terá que ter a terceira lista para que o candidato A vença pelo método de eliminação?

2. Quantos votos terá que ter a terceira lista para que o candidato B vença pelo método de eliminação?

3. Quantos votos terá que ter a terceira lista para que o candidato C vença pelo método de eliminação?

4. Quantos votos terá que ter a terceira lista para que o vencedor por pluralidade não seja o mesmo que por eliminação.

5. Construa um conjunto de listas de preferência, para uma eleição com quatro candidatos, em que o vencedor por eliminação não seja o mesmo que por pluralidade com eliminação.

Ficha de Trabalho 3: Lição n.º 3 - Respostas

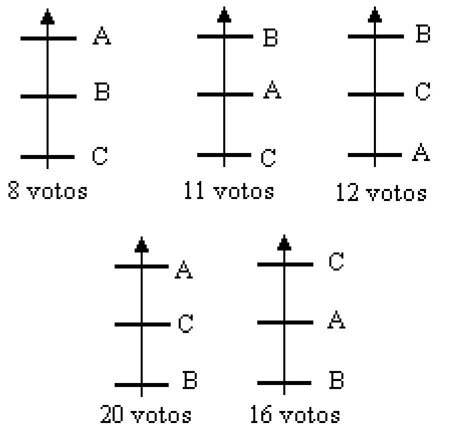
A. 1. 11, 14, 13, 6.
2. B, C, A, D.
3. 31.8%.
4. Não.
5. B-C 8, C-B 3, B-C 14, C-B 13, B-C 6.
6. B 28, C 16.
7. B.
8. 63.6%.

B. 1. A-B-C 8, A-C-B 3, B-C-A 14, C-A-B 13, B-A-C 6.
2. A 11, B 20, C 13.
3. A
4. B-C 8, C-B 3, B-C 14, C-B 13, B-C 6.
5. B 28, C 16.
6. Sim.

C. 1. Menos de 8.
2. Impossível.
3. Mais de 8 votos.
4. 9.
5. Várias hipóteses de resposta.

Ficha de Trabalho 4: Lição n.º 4

A. Outro método para encontrar o vencedor de uma eleição, utilizando o voto ordinal, consiste em atribuir a cada candidato pontos conforme a posição que ocupa na lista de preferências do eleitor. Embora a forma como se atribui o número de pontos possa variar, o processo mais simples é dar ao primeiro lugar tantos pontos quantos os candidatos concorrentes. Ao segundo deve atribuir-se menos um ponto, ao terceiro menos dois pontos e assim sucessivamente. A este processo, para encontrar um vencedor, chamamos *método de Borda*. Utilizando a eleição que se segue, analisemos como funciona.



1. Quando temos três candidatos, o primeiro da lista recebe três pontos, o segundo dois pontos e o terceiro um ponto. A primeira lista obteve 8 votos, logo, o candidato A obtém 24 (3×8) pontos.

Quantos pontos tem o candidato A, na segunda lista? ______

E na terceira? ______ E na quarta? ______

E na quinta? ______

2. Determine o número total de pontos obtidos por cada um dos candidatos.

A: 24 + ___ + ___ + ___ + ___ = ____

B: ___ + ___ + ___ + ___ + ___ = ____

C: ___ + ___ + ___ + ___ + ___ = ____

3. Quem foi o candidato vencedor da eleição, sabendo que é o que tem maior número de pontos?

4. Se o método utilizado fosse o da pluralidade, quem seria o vencedor?

5. Qual seria o vencedor se utilizássemos o método de eliminação?

6. É possível alterar o resultado desta eleição (obtido pelo método de Borda), aumentando o número de votos da segunda lista de preferências? Se a sua resposta for afirmativa, quantos votos teremos que acrescentar aos 11 já existentes?

B. Podemos, ainda, utilizar outro método para determinar o vencedor de uma eleição, o *método de Condorcet*. Neste método comparamos os candidatos, dois a dois, para tentar encontra um que vença todos os outros. Para exemplificar, consideremos a eleição da questão A.

1. Comecemos por comparar A e B. Se A está no topo de uma lista, A obtém os votos dessa lista. Preencha a tabela que se segue, para determinar qual dos dois candidatos é o mais popular.

	A	B
Lista 1	8	0
Lista 2		
Lista 3		
Lista 4		
Lista 5		
Total	44	

2. Qual dos dois candidatos, A ou B, vence esta disputa?

Ficha de Trabalho 4: Lição n.º 4 (Continuação)

3. Compare A e C.

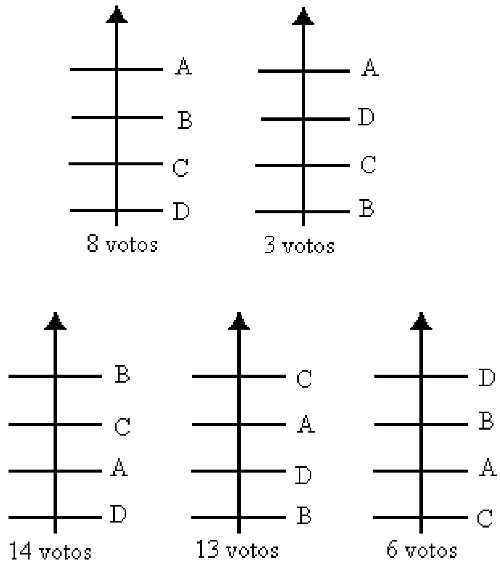
	A	C
Lista 1		
Lista 2		
Lista 3		
Lista 4		
Lista 5		
Total		

4. Compare B e C.

	A	C
Lista 1		
Lista 2		
Lista 3		
Lista 4		
Lista 5		
Total		

5. O vencedor é o candidato que vence todos os outros. Quem ganha a eleição?

C. Considere a seguinte eleição:



1. Nesta eleição o primeiro lugar recebe 4 pontos, o segundo 3, o terceiro 2 e o quarto 1 ponto. Calcule o número de pontos que cada um dos candidatos obtém.

   A: _____ pontos B: _____ pontos
   C: _____ pontos D: _____ pontos

2. Utilizando o método de Borda, quem é o vencedor?

3. Utilize o método de Condorcet para comparar os candidatos A e B. Quantos votos obtém cada um deles?

4. Compare os candidatos A e C. Quantos votos obtém cada um deles?

5. Compare os candidatos A e D. Quantos votos obtém cada um deles?

6. O candidato A vencerá todos os outros?

7. Compare B com os outros candidatos. Conseguirá B derrotá-los?

8. O candidato C vencerá todos os outros? E o D?

9. Existe sempre vencedor de uma eleição se utilizarmos o método de Condorcet?

Ficha de Trabalho 4: Lição n.º 4 - Respostas

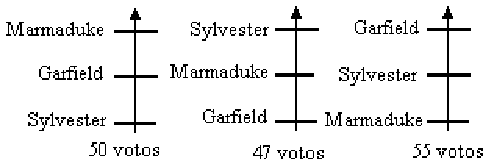
A. 1. 22, 12, 60, 32.
2. A: 22,12, 60, 32, 150.
B: 16, 33, 36, 20, 16, 121
C: 8, 11, 24, 40, 48, 131.
3. A.
4. A.
5. A.
6. Se juntarmos mais 10 votos, B fica com mais um ponto que A.

B. 1. 0-11, 0-12, 20-0, 16-0, B(total)-23.
2. A.
3. 8-0, 11-0, 0-12, 20-0, 0-16, 39-28.
4. 8-0, 11-0, 12-0, 0-20, 0-16, 31-36.
5. A.

C. 1. 123, 114, 122, 81.
2. A.
3. 24,20.
4. 17,27.
5. 38,6.
6. A não vence C.
7. B não vence A.
8. C não vence B.
9. D não vence nenhum candidato.
10. Não.

Ficha de Trabalho 5: Lição n.º 5

A. Considere as seguintes listas de preferência:



1. Suponha que Garfield e Marmaduke concorrem entre si numa primeira volta. Qual deles vencerá?

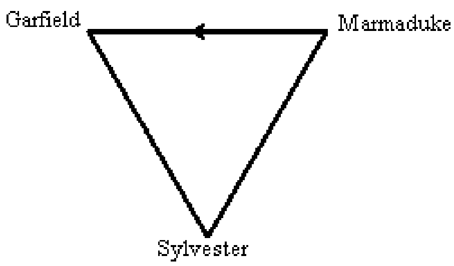
2. Se o vencedor da eleição anterior concorrer com Sylvester, na última volta, quem ganhará?

3. Quem seria o vencedor da primeira volta se os concorrentes fossem Sylvester e Garfield?

4. Se o vencedor da eleição anterior concorrer contra Marmaduke quem ganhará?

5. Suponha agora que, na primeira volta, concorrem Sylvester e Marmaduke e que o vencedor disputará com Garfield a última volta. Quem vencerá?

B. Podemos representar a situação anterior através de um diagrama, em que cada candidato se representa por um ponto. Cada par de candidatos encontra-se ligado por um segmento orientado no sentido do perdedor.

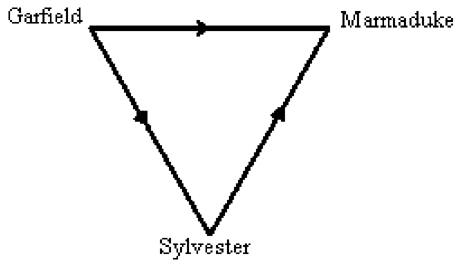


1. No diagrama acima o segmento orientado entre Marmaduke e Garfield indica que Marmaduke venceu Garfield. Defina o sentido dos outros segmentos que unem os candidatos.

2. Com um lápis trace um caminho semelhante ao do diagrama, sem alterar o sentido dos segmentos. Comece em Garfield, trace o percurso e regresse ao ponto inicial.

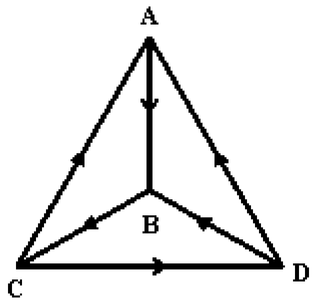
3. Se o seu percurso regressa ao ponto de partida temos um *circuito*. Se passa por todos os pontos do diagrama, sem os repetir, estamos perante um *circuito Hamiltoniano*. O percurso que desenhou é um circuito? É um circuito Hamiltoniano?

4. Considere o diagrama:



Consegue desenhar um circuito neste diagrama?
Consegue desenhar um circuito Hamiltoniano?

C. Considere o seguinte diagrama:



1. Se realizarmos um confronto entre C e D, quem vencerá? E entre A e B?

Suponha que os vencedores das duas eleições anteriores são os concorrentes à última volta da eleição. Qual deles será eleito?

2. É possível ao candidato D vencer estas eleições, se os pares concorrentes às duas primeiras eleições não forem os mesmos? Indique entre quem se teriam que realizar as duas primeiras eleições para que D fosse o vencedor.

1ª eleição: ___________ e __________
2ª eleição: ___________ e __________

3. O diagrama acima será um circuito Hamiltoniano? Se sim, construa-o.

4. Quando temos um sistema eleitoral semelhante ao da questão 3, poderemos deduzir que, no final, ganha sempre o candidato mais popular?

D. Existe um sistema eleitoral que permite que o eleitor vote em todos os candidatos que não se importe de ver eleitos. O vencedor será o candidato com mais votos. A este sistema chamamos voto por aprovação. Para exemplificar, considere que Garfield, Marmaduke e Sylvester são concorrentes a uma eleição e que pode votar em quantos concorrentes quiser. Se votar em Garfield e Marmaduke, cada um deles recebe um voto.

1. Se 16 pessoas votarem em Garfield e Marmaduke, 8 em Garfield e 10 em Marmaduke. Quantos votos obteve Garfield?

2. Quantos votos obteve Marmaduke?

3. Quantos votos obteve Sylvester?

4. Quem será o vencedor?

5. Suponha que não se utiliza o voto por aprovação e que os 16 votos para Garfield e Marmaduke são divididos, 8 para cada um.

Quantos votos obteve Marmaduke? _____

Quantos votos obteve Garfield? _____

Quantos votos obteve Sylvester? _____

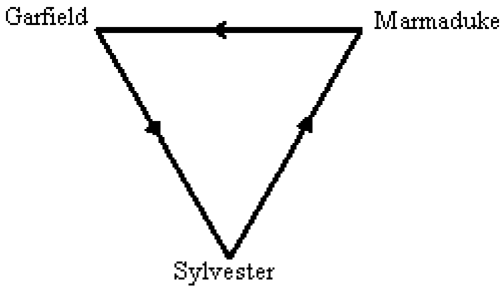
6. Neste caso, quem vencerá a eleição?

7. Qual é a percentagem de votos do candidato vencedor?

Ficha de Trabalho 5: Lição n.º 5 - Respostas

A. 1. Marmaduke.
   2. Sylvester.
   3. Garfield.
   4. Marmaduke.
   5. Garfield.

B. 1. Segmento orientado de G para S e de S para M.
   2.



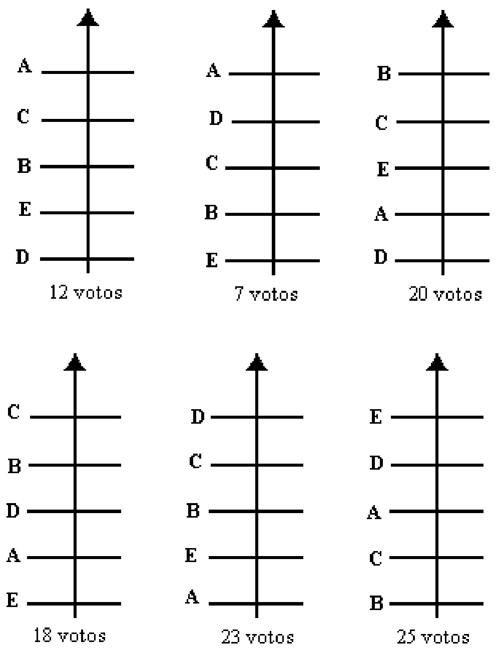
   3. Sim, sim.
   4. Não, não.

C. 1. C, A, C.
   2. D e A, B e C.
   3. Sim, B-C-D-A-B. Existem outras possibilidades.
   4. Não.

D. 1. 24.
   2. 26.
   3. 20.
   4. Marmaduke.
   5. 18, 16, 20.
   6. Sylvester.
   7. 37%.

Ficha de Trabalho 6: Revisões

Considere a seguinte eleição:



1. Determine o vencedor desta eleição pelo método da pluralidade.

2. Qual é a percentagem de votos que o vencedor teve?

3. É um vencedor maioritário?

4. Determine o vencedor da eleição pelo método de eliminação.

5. Determine o vencedor da eleição pelo método de eliminação sequencial.

6. Utilizando 5 pontos para o primeiro lugar, 4 para o segundo, 3 para o terceiro, 2 para o quarto e 1 para o quinto, determine o vencedor pelo método de Borda.

7. Determine o vencedor desta eleição pelo método de Condorcet.

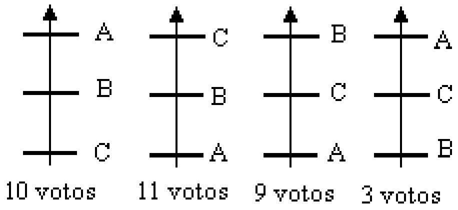
8. Considere em cada uma das listas de preferência só as duas primeiras escolhas e suponha que os eleitores não fazem distinção entre essas escolhas. Determine o vencedor pelo método de aprovação.

Ficha de Trabalho 6: Revisões

1. E.
2. 23.8%.
3. Não.
4. E.
5. D.
6. C.
7. Nenhum.
8. C.

Ficha de Trabalho 7: Teste

A. Considere a seguinte eleição:



1. Qual foi a percentagem de votos que o candidato A obteve?

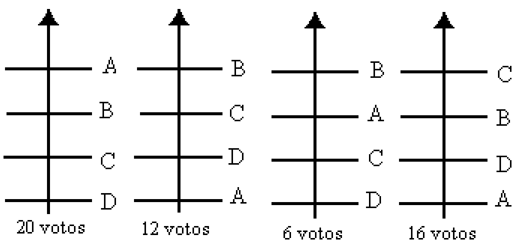
2. Quem é o vencedor por pluralidade?

3. Existe um vencedor maioritário? Se sim, quem?

4. Se o candidato B for eliminado e se se realizar uma segunda volta entre A e C, quantos votos obterá C?

5. Quem ganha o confronto entre A e C?

B. Considere a seguinte eleição:



1. Quem é o vencedor, desta eleição, pelo método da pluralidade?

2. Suponha que o vencedor desta eleição será encontrado pelo método de eliminação. Quem são os concorrentes à segunda volta?

3. Quem ganha as eleições pelo método de eliminação?

4. Pelo método de eliminação sequencial quem é o candidato eliminado em primeiro lugar?

5. Utilizando o método referido, na questão anterior, quem é o candidato eliminado em segundo lugar?

6. Quem é o candidato vencedor pelo método de eliminação sequencial.

7. Se se realizar uma eleição entre A e D, qual deles vencerá?

8. Se se realizar uma eleição entre A e C, qual deles vencerá?

9. Quem será o candidato vencedor se esta eleição for decidida pelo método de Condorcet?

10. Se esta eleição for decidida pelo método de Borda, quantos pontos serão atribuídos à primeira escolha?

11. Pelo método referido na questão anterior, quantos pontos obterá C?

12. Qual é o candidato vencedor pelo método de Borda?

C. Suponha que a eleição apresentada em **B** é decidida pelo método de aprovação. A partir dos boletins de voto foi recolhida a seguinte informação:

A – 20 votos	B, C – 12 votos
B, A, C – 6 votos	C – 16 votos

1. Pelo método de aprovação quantos votos obtém o candidato B?

2. Pelo método de aprovação, quem é o candidato vencedor?

Ficha de Trabalho 7: Teste

A. 1. 39.4%.
   2. A.
   3. Não.
   4. 20.
   5. C.

B. 1. A.
   2. A e B.
   3. B.
   4. D.
   5. C.
   6. B.
   7. D.
   8. C.
   9. B.
   10. 4.
   11. 152.
   12. B.

C. 1. 18.
   2. C.

Transparência 1

1968 (Senador: Nova Iorque)

Javits	**1 902 986**
O'Dwyer	**1 333 362**
Buckley	**629 944**
	3 866 292

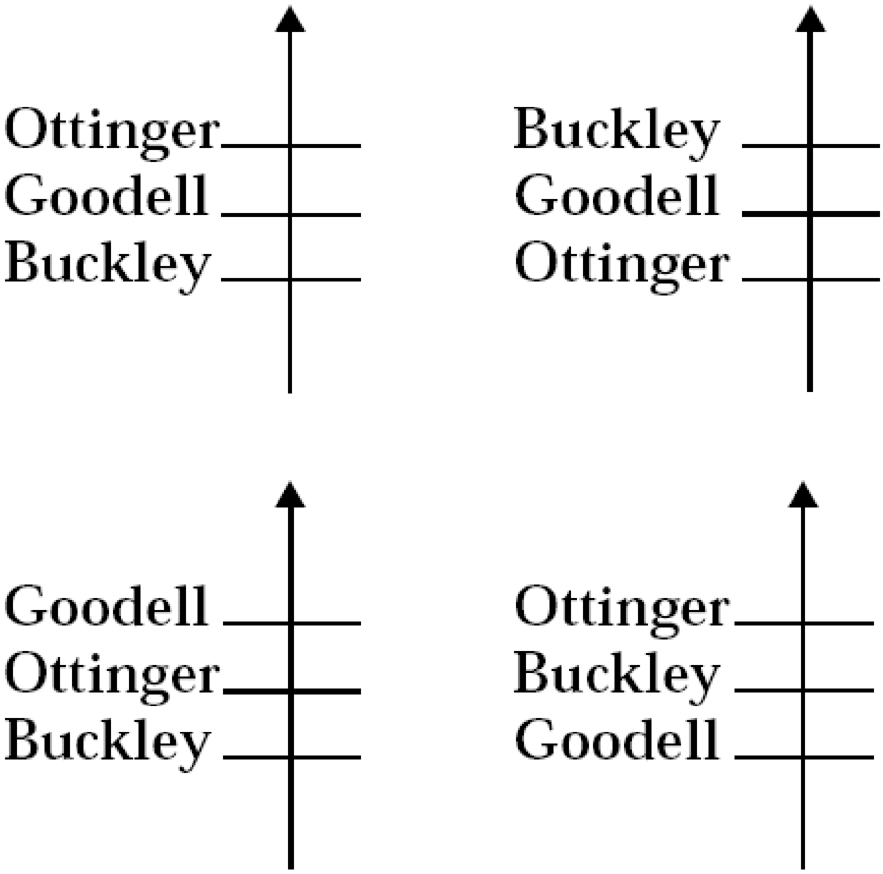
1970 (Senador: Nova Iorque)

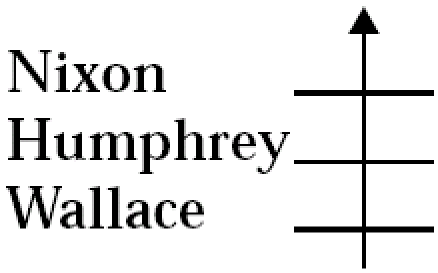
Goodell	**1 434 472**
Ottinger	**2 171 232**
Buckley	**2 288 190**
	5 893 190

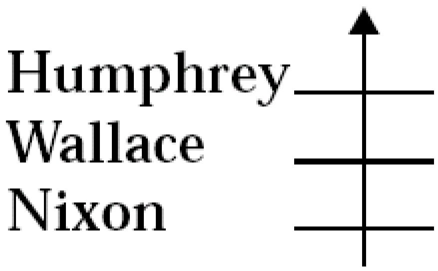
1968 Eleição Presidencial

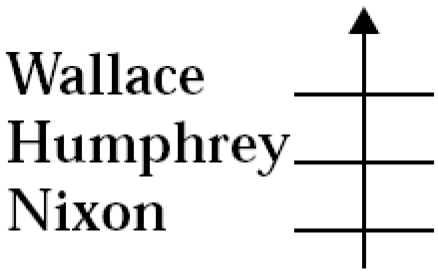
Richard Nixon	31 785 480
Hubert Humphrey	31 275 166
George Wallace	9 906 473
	72 967 119

Transparência 2




Nixon
Humphrey
Wallace


Humphrey
Wallace
Nixon


Wallace
Humphrey
Nixon

Transparência 3

“I am not an advocate for frequent changes in laws and constitutions, but laws and institutions must go hand in hand with progress of the human mind. As that becomes more developed, more enlightened, as new discoveries are made, new truths discovered and manners and opinions change, with the change of circumstances, institutions must advance also to keep pace with the times.”

Thomas Jefferson

(Não advogo frequentes alterações nas leis e na constituição, mas leis e instituições têm que acompanhar o progresso da humanidade. ...)

Transparência 4

	Avelã	
	Chocolate	
	Morango	
	Baunilha	

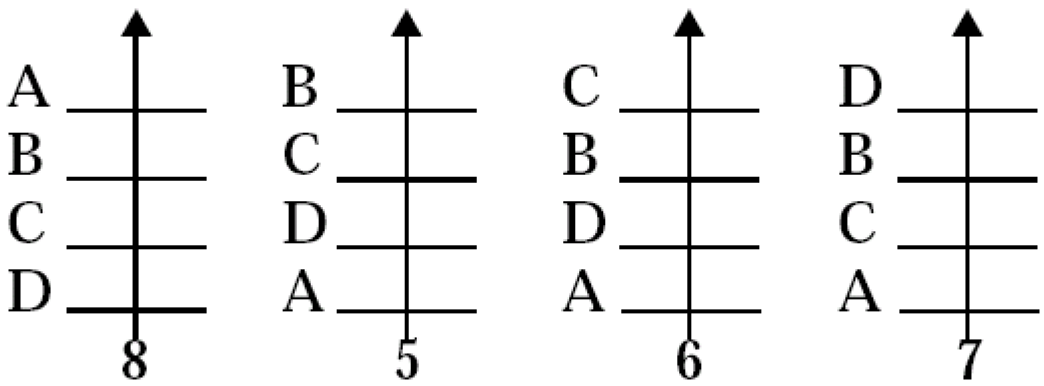
	Avelã	
	Chocolate	
	Morango	
	Baunilha	

Transparência 5

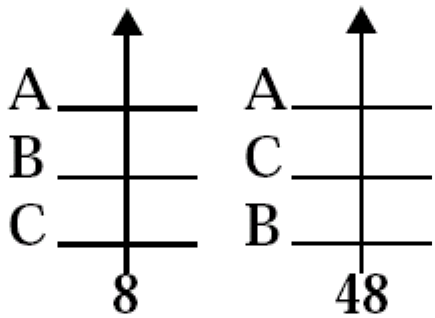
Sabor	N.º de votos
Avelã	
Chocolate	
Morango	
Baunilha	

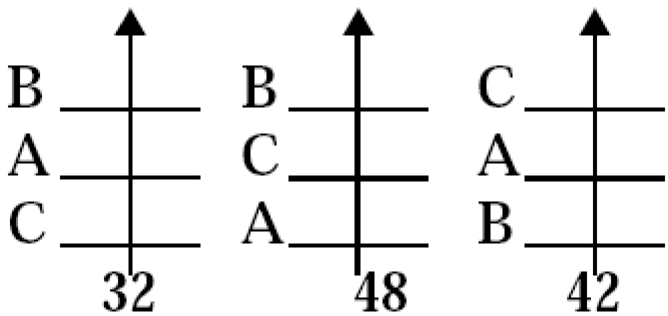
Sabor	N.º de votos

Transparência 6

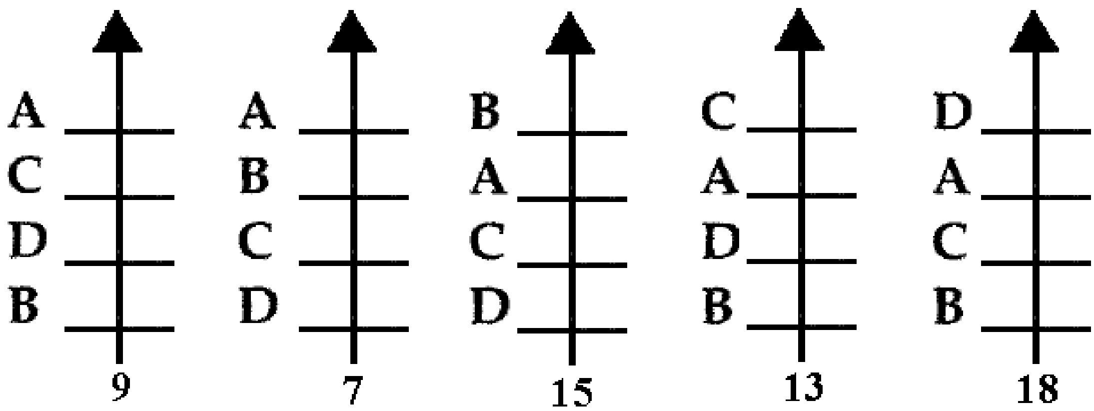


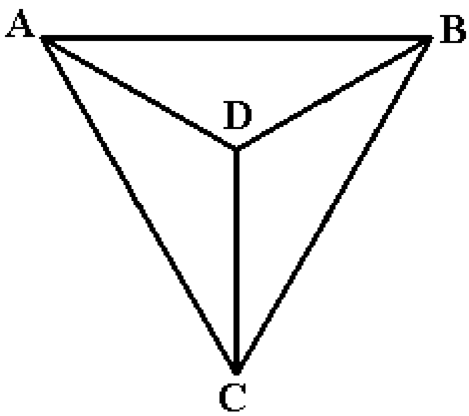
Transparência 7





Transparência 8





Transparência 9

	Avelã
	Chocolate
	Morango
	Baunilha

Transparência 10

Critérios de Arrow para uma eleição justa:

1) Não deve haver ditador;

2) Se um eleitor prefere o candidato A ao candidato B, então a sociedade deve preferir A a B.

3) - 5) outras condições.

Teorema de Arrow

Não existe nenhum método eleitoral que ordene três ou mais candidatos, a partir das preferências individuais, e que obedeça a cinco condições de justiça.