Metas Curriculares do Ensino Básico
Matemática – 3.º Ciclo

António Bivar
Carlos Grosso
Filipe Oliveira
Maria Clementina Timóteo

GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

Metas Curriculares

Funções de proporcionalidade direta – FSS7

Funções de proporcionalidade inversa – FSS9

Equações de primeiro grau – ALG7

Inequações de primeiro grau – ALG9

Proporcionalidade direta – ALG6

Revisão de descritores do 2.º Ciclo

ALG6-4.1. Identificar uma grandeza como «diretamente proporcional» a outra quando dela depende de tal forma que, fixadas unidades, ao multiplicar a medida da segunda por um dado número positivo, a medida da primeira fica também multiplicada por esse número.

ALG6-4.2. Reconhecer que uma grandeza é diretamente proporcional a outra da qual depende quando, fixadas unidades, o quociente entre a medida da primeira e a medida da segunda é constante e utilizar corretamente o termo «constante de proporcionalidade».

Proporcionalidade direta – ALG6

Caderno de Apoio: ALG6-4.1.

Neste descritor apresenta-se a definição de «grandezas diretamente proporcionais».
Se y e x designarem respetivamente as medidas de duas grandezas, a primeira dependendo da segunda, as grandezas em causa dizem-se diretamente proporcionais se, dado um número positivo q, a uma medida $q \times x$ da segunda corresponder uma medida $q \times y$ da primeira.

Pode ser extremamente trabalhoso verificar que uma grandeza é diretamente proporcional a outra pela definição. No exemplo seguinte, em que se fornecem três valores da grandeza «Velocidade Média» e os correspondentes três valores da grandeza «Gasolina Gasta», é, em rigor, necessário efetuar 6 verificações, correspondentes a todas as passagens possíveis entre valores da Velocidade Média: em km/h, de 80 para 120, de 80 para 160, de 120 para 160 e inversamente. Alguns destes cálculos são obviamente redundantes. É, no entanto, importante que os alunos apreendam esta definição e o seu significado: «se duplicar a velocidade, duplico a gasolina gasta», «se multiplicar por $\frac{3}{2}$ a velocidade, multiplico também por $\frac{3}{2}$ a gasolina gasta», etc.

Proporcionalidade direta – ALG6

ALG6-4.1.

No quadro indica-se o consumo efetuado por um veículo que completa um trajeto fixo a uma dada velocidade média.
Verifica que o consumo é diretamente proporcional à velocidade média.

Velocidade média	$80\ km/h$	$120km/h$	$160km/h$
Gasolina gasta	$10\ litros$	$15\ litros$	$20\ litros$

Proporcionalidade direta – ALG6

ALG6-4.2.

Em 4.2. apresenta-se um resultado que permite, na prática, uma verificação bem mais expedita da proporcionalidade direta entre duas grandezas, por cálculo do quociente das respetivas medidas. Por equivalência, essa propriedade pode eventualmente ser apresentada como definição, embora seja intuitivamente menos esclarecedora quanto ao significado da proporcionalidade direta. Nesse caso, o descritor 4.1 passará a descrever uma propriedade.

ALG6-4.2.

Informação Complementar para o professor

Grandezas diretamente proporcionais

Consideremos uma grandeza Y diretamente proporcional a outra X. Se as medidas y e y' de Y corresponderem respetivamente a medidas x e x' de X, como para passar de x para x' se pode multiplicar por $\frac{x'}{x}$, então $y' = \frac{x'}{x}y$, ou seja, $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$.

Inversamente, dadas duas grandezas X e Y, Y dependente de X de modo que quaisquer medidas x e x' de X e correspondentes medidas y e y' de Y respeitem a igualdade $\frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$ tomando $x' = qx$, obtemos $\frac{y'}{qx} = \frac{y}{x}$, ou seja, utilizando a propriedade expressa no descritor ALG5-1.8, $y' = qx\frac{y}{x} = \frac{qxy}{x} = qy$, logo as grandezas são diretamente proporcionais.

ALG6-4.2.

Exemplo

Num supermercado, a quantidade de arroz que se pode comprar com uma dada soma de dinheiro é-lhe diretamente proporcional.

a. *Completa a seguinte tabela*

Arroz	$3\ kg$	$6000\ g$	$3\ hg$
Preço	4 euros		

b. Efetua o quociente entre o preço e o número de quilogramas de arroz que lhe corresponde. O que verificas?

Funções de proporcionalidade direta – FSS7

3.1. Reconhecer, dada uma grandeza diretamente proporcional a outra, que, fixadas unidades, a «função de proporcionalidade direta f» que associa à medida m da segunda a correspondente medida $y = f(m)$ da primeira satisfaz, para todo o número positivo x, $f(xm) = xf(m)$ (ao multiplicar a medida m da segunda por um dado número positivo, a medida $y = f(m)$ da primeira fica também multiplicada por esse número) e, considerando $m = 1$, que f é igual, no seu domínio, a uma função linear de coeficiente $a = f(1)$.

$\times x$

Medida de X (Objeto)	m	$x.m$
Medida de Y (Imagem por f)	$f(m)$	$x.f(m)$

$\times x$

Como $x.f(m)$ é imagem de $x.m$ por f, tem-se que $f(x.m) = x.f(m)$.
Fazendo $m = 1$, ficamos com $f(x) = x.f(1)$, ou seja, $f(x) = x.a = ax$ em que $a = f(1)$.
Então uma função f de proporcionalidade direta é igual, no seu domínio, a uma função linear de coeficiente $a = f(1)$. Note-se que por esta afirmação se entende, em rigor, que a função f é igual à restrição de uma função linear ao domínio de f.

3.2. Reconhecer, dada uma grandeza diretamente proporcional a outra, que a constante de proporcionalidade é igual ao coeficiente da respetiva função de proporcionalidade direta.

Caderno de Apoio

De acordo com ALG6-4.2, uma grandeza Y é diretamente proporcional a outra grandeza X da qual depende quando, fixadas unidades, o quociente entre a medida da primeira e a medida da segunda é constante, designando-se esta constante por constante de proporcionalidade. Assim, sendo f uma função de proporcionalidade direta e X e Y as grandezas diretamente proporcionais a que está associada, atendendo ao descritor anterior, tem-se que $cx = f(x)$ é a medida y da grandeza Y que corresponde à medida x da grandeza X, pelo que a constante de proporcionalidade direta é dada, para x não nulo, por $\frac{y}{x} = \frac{cx}{x} = c$.

Funções de proporcionalidade direta – FSS7

3.3. Reconhecer que uma função numérica f definida para valores positivos é de proporcionalidade direta quando (e apenas quando) é constante o quociente entre $f(x)$ e x, para qualquer x pertencente ao domínio de f.

À imagem dos descritores ALG6-4.1 e ALG6-4.2, é possível utilizar o descritor 3.3 como definição de «função de proporcionalidade direta» no lugar do descritor 3.1. No entanto, a definição apresentada em 3.1 é a que justifica a designação dada a este tipo de funções, já que traduz na linguagem das funções a propriedade utilizada na definição original de grandezas diretamente proporcionais; no descritor 3.3 indica-se uma propriedade equivalente, e que pode, portanto, ser livremente utilizada para reconhecer que determinada função é de proporcionalidade direta.

4.1. Resolver problemas envolvendo funções de proporcionalidade direta em diversos contextos.

Exemplo

No parque de uma cidade existe um quiosque que aluga bicicletas e que tem a seguinte informação:

Preço a pagar pelo aluguer: 2 euros (taxa fixa) mais 50 cêntimos por hora.

a. *Quanto terias de pagar se o aluguer durasse 3 horas? E 4 horas?*
b. *O preço a pagar não é diretamente proporcional ao tempo do aluguer. Porquê?*
c. *Dá exemplo de um tarifário em que o preço fosse diretamente proporcional ao tempo do aluguer e indica a expressão na forma canónica da função que faz corresponder a cada valor* t *do tempo do aluguer o preço* p *a pagar.*

Funções de proporcionalidade inversa – FSS9

1.1. Reconhecer, dada uma grandeza inversamente proporcional a outra, que, fixadas unidades, a «função de proporcionalidade inversa f» que associa à medida m da segunda a correspondente medida $y = f(m)$ da primeira satisfaz, para todo o número real positivo x, $f(xm) = \frac{1}{x} f(m)$ (ao multiplicar a variável independente m por um dado número positivo, a variável dependente $y = f(m)$ fica multiplicada pelo inverso desse número) e, considerando $m = 1$, que f é uma função dada por uma expressão da forma $f(x) = \frac{a}{x}$, onde $a = f(1)$ e concluir que a é a constante de proporcionalidade inversa.

1.2. Saber, fixado um referencial cartesiano no plano, que o gráfico de uma função de proporcionalidade inversa é uma curva designada por «ramo de hipérbole» cuja reunião com a respetiva imagem pela reflexão central relativa à origem pertence a um conjunto mais geral de curvas do plano designadas por «hipérboles».

Funções de proporcionalidade inversa – FSS9

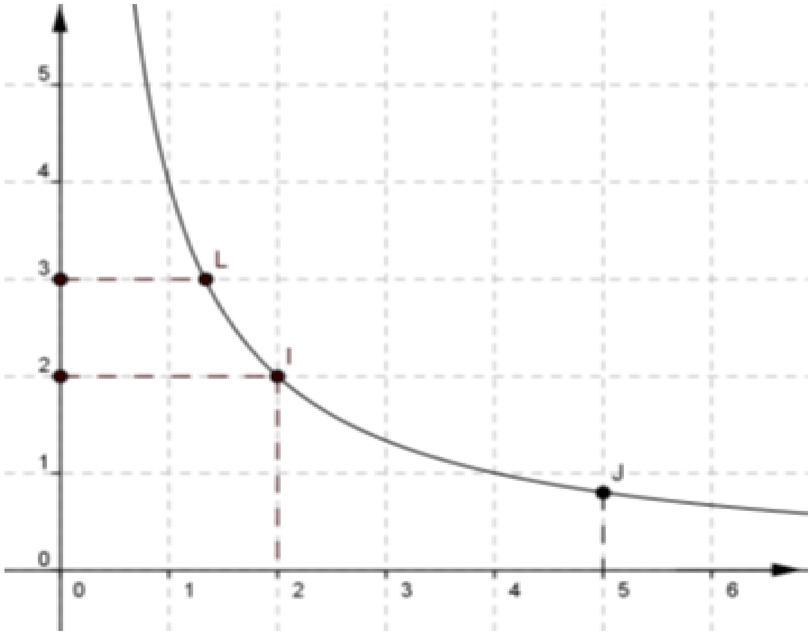
2.1. Resolver problemas envolvendo funções de proporcionalidade inversa em diversos contextos.

Exemplo

Considera a função f de proporcionalidade inversa representada graficamente no referencial cartesiano da figura.

a) Determina a expressão algébrica da função f identificando a constante de proporcionalidade inversa.

b) Determina abcissa do ponto L e a ordenada do ponto J.



Equações de primeiro grau – ALG7

3.1. Identificar, dadas duas funções f e g, uma «equação» com uma «incógnita x» como uma expressão da forma «$f(x) = g(x)$», designar, neste contexto, «$f(x)$» por «primeiro membro da equação», «$g(x)$» por «segundo membro da equação», qualquer a tal que $f(a) = g(a)$ por «solução» da equação e o conjunto das soluções por «conjunto-solução».

O conceito de equação é aqui apresentado recorrendo ao formalismo das funções. De um ponto de vista didático, poderão ser efetuadas outras abordagens, sendo no entanto necessário que o aluno venha a interpretar uma equação como uma igualdade entre duas expressões, cada uma delas definindo uma função num certo domínio e para um certo conjunto de chegada.

Por exemplo, a equação $2x = 3$ tem, respetivamente, os conjuntos-solução $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ ou o conjunto vazio $\{\,\}$, consoante se consideram os domínios $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{N}$; já no caso de se considerarem os domínios $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}^+$, os conjuntos-solução são ambos iguais a $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Equações de primeiro grau – ALG7

3.4. Identificar uma equação «$f(x) = g(x)$» como «numérica» quando f e g são funções numéricas, reconhecer que se obtém uma equação equivalente adicionando ou subtraindo um mesmo número a ambos os membros, ou multiplicando-os ou dividindo-os por um mesmo número não nulo e designar estas propriedades por «princípios de equivalência».

3.5. Designar por «equação linear com uma incógnita» ou simplesmente «equação linear» qualquer equação «$f(x) = g(x)$» tal que f e g são funções afins.

Equações de primeiro grau – ALG7

ALG7-3.7. Provar, dados números racionais a e b, que a equação $ax = b$ é impossível se $a = 0$ e $b \neq 0$, que qualquer número é solução se $a = b = 0$ (equação linear possível indeterminada), que se $a \neq 0$ a única solução é o número racional $\frac{b}{a}$ (equação linear possível determinada) e designar uma equação linear determinada por «equação algébrica de 1.º grau».

Equações de primeiro grau – ALG7

Caderno de Apoio

Existem várias redações possíveis para as provas pedidas. Utilizando, por exemplo, o formalismo das funções, podemos argumentar da seguinte forma:

Se $a = 0$ e $b \neq 0$
A função definida nos racionais pela expressão $f(x) = ax$ é a função constante de valor 0 ($ax = 0x = 0$), não tomando portanto, para nenhum número racional, o mesmo valor do que a função constante de valor $b \neq 0$. Logo, a equação $ax = b$ não tem soluções.

Se $a = 0$ e $b = 0$
A função definida nos racionais pela expressão $f(x) = ax$ é a função constante de valor 0 ($ax = 0x = 0$), tomando assim, para qualquer número racional, o mesmo valor da função constante igual a 0. Logo, todo o número racional é solução da equação $ax = b$.

Se $a \neq 0$
Dividindo-se ambos os membros da equação $ax = b$ pelo número racional não nulo a obtém-se a equação equivalente $x = \frac{a}{b}$. Desta forma, $\frac{a}{b}$ é a única solução da equação $ax = b$.

Inequações de primeiro grau – ALG9

1.1. Identificar, dadas duas funções numéricas f e g, uma «inequação» com uma «incógnita x» como uma expressão da forma «$f(x) < g(x)$», designar, neste contexto, «$f(x)$» por «primeiro membro da inequação», «$g(x)$» por «segundo membro da inequação», qualquer a tal que $f(a) < g(a)$ por «solução» da inequação e o conjunto das soluções por «conjunto-solução».

1.5. Designar por «inequação do 1.º grau com uma incógnita» ou simplesmente «inequação do 1.º grau» qualquer inequação «$f(x) < g(x)$» tal que f e g são funções afins de coeficientes de x distintos e simplificar inequações do 1.º grau representando f e g na forma canónica.

1.6. Simplificar os membros de uma inequação do 1.º grau e aplicar os princípios de equivalência para mostrar que uma dada inequação do 1.º grau é equivalente a uma inequação em que o primeiro membro é dado por uma função linear de coeficiente não nulo e o segundo membro é constante ($ax < b$).

Inequações de primeiro grau – ALG9

Atividade 1

Considere a inequação

$$2x+\frac{1}{3}>\frac{5}{2}x-5$$

Indique, em cada passo de resolução apresentado, o respetivo descritor.

$$2x+\frac{1}{3}>\frac{5}{2}x-5 \underset{\text{ALG9-1.4.}}{\Leftrightarrow} 2x-\frac{5}{2}x>-5-\frac{1}{3} \underset{\substack{\text{FSS7-1.3.}\\ \text{ALG8-2.10}\\ \text{ALG9-1.6.}}}{\Leftrightarrow} -\frac{1}{2}x>-\frac{16}{3} \underset{\text{ALG9-1.4.}}{\Leftrightarrow} -x>-\frac{32}{3} \underset{\text{ALG9-1.4.}}{\Leftrightarrow} x<\frac{32}{3}.$$