



11.º ANO | ENSINO SECUNDÁRIO

Matemática B

(Matemática Aplicada às Artes Visuais)

INTRODUÇÃO

Este documento curricular apresenta as Aprendizagens Essenciais de Matemática a que os alunos do Ensino Secundário, na disciplina de Matemática B, devem ter acesso, em articulação com o Ensino Básico e enquadradas no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória. Foi elaborado por uma equipa pluridisciplinar, composta por especialistas em Matemática e em Didática da Matemática e por professores experientes nas diferentes vertentes curriculares do Ensino Secundário: Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Alexandra Rodrigues, António Domingos, Carlos Albuquerque, Cristina Cruchinho, Helder Martins, João Almiro, Luís Gabriel, Maria Eugénia Graça Martins, Maria Teresa Santos, Nélida Filipe, Paulo Correia, Rui Gonçalo Espadeiro e Susana Carreira.

1. Matemática Escolar Orientada para o Futuro

A formação de indivíduos matematicamente competentes é um propósito fundamental do currículo de Matemática para o Ensino Secundário. A sociedade e o mundo contemporâneos, marcados pela globalização, pela crescente digitalização, conectividade e automatização, e por uma aceleração do desenvolvimento tecnológico, enfrentam desafios nos quais o conhecimento matemático adquire um papel essencial, proporcionando conceitos, métodos, modelos e formas de pensar. Esse poder matemático deve ser parte integrante da educação de todos os cidadãos, incluindo conhecimentos e capacidades necessários para a sua vida pessoal, social e profissional.

Empreender uma formação matemática, abrangente, relevante e inovadora, neste ciclo de escolaridade, significa desenvolver nos alunos a capacidade de identificar conceitos matemáticos para resolver problemas reais, aplicar procedimentos matemáticos adequados, e interpretar os resultados em contextos diversos. O raciocínio matemático está na base dos processos de compreensão dos conceitos e objetos matemáticos, que podem e devem ser analisados, representados e relacionados de diferentes formas. São igualmente importantes a formulação de hipóteses, a testagem de conjecturas, a generalização e a abstração, na construção de argumentos lógicos e conclusões, cuja comunicação de forma apropriada é cada vez mais importante no mundo atual.

O currículo consagra o propósito de preparar os alunos para formularem juízos e tomarem decisões fundamentadas, contribuindo para que se tornem cidadãos reflexivos, empenhados e participativos. Visa também contribuir para que os jovens apreciem o papel da Matemática no mundo e o seu carácter de ciência em evolução e renovação permanente, apreciando a sua dimensão estética a par do seu legado histórico.

Assim, o currículo de Matemática B orienta-se para o desenvolvimento de áreas de competências, à luz do que é preconizado no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*, nomeadamente no que se refere ao pensamento crítico aliado à resolução de problemas, promovendo a criatividade e a comunicação, além de acentuar a pertinência do trabalho colaborativo.

2. Ideias Inovadoras do Currículo

- Matemática para a Cidadania

O reconhecimento do Ensino Secundário como um ciclo que é parte integrante da formação geral dos jovens, incluído na escolaridade obrigatória, cria um contexto em que todas as disciplinas, incluindo a Matemática, devem contribuir para o desenvolvimento dos alunos enquanto cidadãos ativos, conscientes, informados e interventivos.

A crescente relevância do papel da Matemática na sociedade atual realça a importância e a necessidade de dotar os alunos de ferramentas matemáticas de análise dos processos sociais, que estão na base do exercício de uma cidadania ativa. Assim, estas Aprendizagens Essenciais exploram modelos matemáticos de processos eleitorais e a análise matemática de modelos financeiros e valorizam o desenvolvimento da literacia estatística.

- Pensamento Computacional

Os aspetos comuns entre o Pensamento Matemático e o Pensamento Computacional, bem como a relevância atual do Pensamento Computacional na ciência e na sociedade, justificam que o currículo de Matemática valorize esta abordagem conceptual na resolução de problemas. As Aprendizagens Essenciais de Matemática A promovem o desenvolvimento de práticas como a abstração, a decomposição, o reconhecimento de padrões, a análise e definição de algoritmos, bem como a aquisição de hábitos de depuração e otimização dos processos envolvidos na atividade matemática. Deste modo, a aposta no Pensamento Computacional revela a aproximação do currículo às recomendações internacionais, designadamente em relatórios da União Europeia, e também o alinhamento com o currículo de Matemática do Ensino Básico, favorecendo o desenvolvimento desta capacidade de forma integrada, coerente e progressiva.

- Diversificação de temas no currículo

Para além do desenvolvimento de competências no âmbito da cidadania, pretende-se continuar a disponibilizar aos alunos um conjunto variado de ferramentas matemáticas. Assim, aposta-se na diversificação de temas matemáticos e nas abordagens de cada tema, valorizando o recurso à tecnologia, e a inclusão de temas com pouca tradição no ensino secundário em Portugal, com diferentes graus de aprofundamento. Desta forma, pretende-se dotar os alunos de competências de índole científica que permitam sustentar diferentes percursos académicos e profissionais.

- Papel central da Geometria

O Curso de Artes Visuais dos cursos científico-humanísticos do ensino secundário necessita de uma disciplina de Matemática especialmente desenhada tendo em vista esse curso. Neste contexto, a área da Geometria deve desempenhar um papel muito

importante. Com efeito, a Geometria está de tal modo presente na natureza, que a Arte frequentemente se sustenta na Geometria para a descrever. Pareceria assim estranho que um artista não tivesse uma forte formação em Geometria, para além do que é estudado no ensino básico. A abordagem da Geometria inclui assuntos elementares de geometria analítica e sintética, padrões geométricos e trigonometria, com as competências de resolução de problemas métricos, com permanentes preocupações de contextualização, indo assim ao encontro das motivações e interesses dos alunos e também do perfil dos alunos dos Cursos de Artes Visuais.

- Aproximação aos Cursos Artísticos Especializados

Desde 2007 que os Cursos Artísticos Especializados possuem a sua própria disciplina de Matemática que, embora com menor carga horária, tem vindo a proporcionar uma formação matemática adequada aos alunos das Escolas Artísticas Soares dos Reis e António Arroio. Assim, as Aprendizagens Essenciais de Matemática B aproximam-se do programa dessa disciplina e acrescentam alguns temas também relevantes para a formação dos alunos desta área.

- Aproximação aos Cursos Profissionais

As Aprendizagens Essenciais de Matemática B integram os seis módulos obrigatórios da disciplina de Matemática dos Cursos Profissionais de 300 horas, possibilitando que, para efeitos de prosseguimento de estudos de nível superior, a prova de exame para a Matemática B e da Matemática dos Cursos Profissionais, seja centrada nesses seis módulos obrigatórios e igual nas duas disciplinas.

3. Ideias chave das Aprendizagens Essenciais

As Aprendizagens Essenciais de Matemática no ensino secundário dão continuidade às aprendizagens do ensino básico e assumem um conjunto de princípios e orientações metodológicas, cuja concretização e especificação é feita para cada ano de escolaridade e tema matemático. A seguir, enunciam-se e apresentam-se as nove ideias-chave preconizadas nas Aprendizagens Essenciais, esquematizadas na Figura 1:



Figura 1. Ideias chave das aprendizagens essenciais

1) Resolução de problemas, modelação e conexões

Dar sentido à Matemática e enfatizar a modelação e as aplicações

A resolução de problemas, tal como a modelação, devem constituir o contexto para o estabelecimento de conexões entre diferentes conceitos e áreas da matemática, assim como entre esta e outras áreas do saber, permitindo uma abordagem integrada e significativa para os alunos na sua atividade matemática. É fundamental que os alunos tenham contacto com o processo de modelação e sejam capazes de criticar, validar e aperfeiçoar modelos matemáticos. Preconizando a exploração de ideias e conceitos matemáticos, pretende-se que a aprendizagem não se reduza à memorização de regras, treino de procedimentos ou conhecimento de resultados ou à execução de procedimentos sem compreensão. É essencial que as definições, os resultados e os procedimentos matemáticos adquiram sentido e que os alunos os saibam mobilizar e aplicar adequadamente para resolver problemas do mundo real, em situações do dia a dia ou de outras disciplinas. Uma das áreas de competências no Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória, fortemente ligada à Matemática - Raciocínio e resolução de problemas - implica que os alunos sejam capazes de: i) interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; ii) gerir informações e tomar decisões; iii) desenvolver processos conducentes à construção de conhecimento, usando recursos diversificados.

2) Raciocínio matemático

Incentivar processos de raciocínio dedutivo, integrando a lógica matemática nos diversos temas

O aluno deve ser sistematicamente incentivado a justificar processos de resolução, a encadear raciocínios e a testar conjecturas. Os conceitos e métodos relativos à lógica matemática não constituem um tema específico das Aprendizagens Essenciais, mas devem, de forma natural, ser integrados nos vários temas abordados. Noções elementares de Lógica podem e devem ser introduzidas à medida que forem relevantes para a clarificação de processos e de raciocínios. Pretende-se, assim, que o aluno adquira a capacidade de raciocinar dedutivamente e de forma autónoma, usando os princípios e a simbologia inerentes à lógica matemática. O grau de formalização a utilizar deve ter sempre em conta o nível de maturidade matemática dos alunos e deve surgir, se possível, como uma necessidade, garantindo que o processo de formalização acompanha a apropriação dos conceitos. Diversos temas, como, por exemplo, Geometria, Funções e Probabilidade, em contexto de resolução de problemas, podem constituir-se como excelentes oportunidades para desenvolver o raciocínio dedutivo.

3) Recurso sistemático à tecnologia

Incentivar a exploração de ideias e conceitos, integrando a tecnologia como alavanca para a compreensão e resolução de problemas.

A abordagem exploratória de ideias e conceitos matemáticos apresenta-se como determinante, o que pressupõe levar o aluno a participar ativamente num processo de construção e aprofundamento, motivado por questões desafiadoras, problemas e procura de justificações. A integração da tecnologia é considerada como indispensável nesse processo, pelas possibilidades que oferece de experimentação, visualização, representação, simulação, interatividade, bem como, evidentemente, de cálculo numérico e simbólico. O recurso a ambientes de geometria dinâmica (AGD), a folha de cálculo e a aplicativos digitais, explorados em computadores, smartphones ou calculadora gráfica, deve ser feito de forma sistemática. As atividades de programação devem ser integradas com uma complexidade progressiva, sendo relevantes para o desenvolvimento de processos algorítmicos, de um pensamento estruturado e do raciocínio lógico, proporcionando um vasto campo de aplicação da Matemática e envolvendo genuinamente a formulação e a resolução de problemas, além de promover o desenvolvimento do pensamento computacional.

4) Tarefas e recursos educativos

Apoiar a aprendizagem em tarefas, contextos e recursos diversificados

A construção de tarefas de aprendizagem constitui uma das ações decisivas do professor. Uma tarefa matemática enriquecedora pode assumir a forma de um problema, uma questão exploratória, um exercício de aplicação, um pequeno projeto ou uma pesquisa de aprofundamento, sempre que observe os seguintes critérios: ser interessante e desafiante, envolver matemática relevante, criar oportunidades para aplicar e ampliar conhecimentos, permitir diferentes estratégias, tornar possível monitorizar a compreensão dos alunos e apoiar o seu progresso. As tarefas devem ser, ainda, diversificadas e ajustadas aos objetivos de aprendizagem e a sua planificação deve prever diferentes tipos de organização do trabalho dos alunos. A utilização de recursos variados, nomeadamente da tecnologia, bem como a diversificação de contextos de aprendizagem, incluindo espaços fora da sala de aula, museus de ciência e outros, deverão merecer especial atenção na construção de tarefas.

5) História da Matemática

Valorizar a importância da Matemática na evolução da sociedade

O recurso a episódios e problemas marcantes da História da Matemática deve motivar pesquisas, estudos ou debates, não de caráter enciclopédico, mas contribuindo para que o progresso da Matemática seja apreciado e compreendido. Para além do seu valor intrínseco, enquanto património cultural que importa valorizar, existem numerosos factos, aspetos particulares e episódios da História da Matemática que, pelo seu potencial pedagógico, devem ser explorados em tarefas dentro e fora da sala de aula. Os professores devem aproveitar os factos contemporâneos da História da Matemática para levar os alunos a entender o papel determinante da Matemática na sociedade atual. Por exemplo, podem ser referidas as primeiras Medalhas Fields atribuídas a mulheres matemáticas, a importância dos modelos matemáticos para entender a crise climática, a evolução das epidemias ou a exploração espacial.

6) Práticas enriquecedoras e criatividade

Inovar e investir em práticas enriquecedoras, favorecendo o desenvolvimento da criatividade e atitudes positivas face à Matemática

O currículo integra propostas inovadoras, que incluem a realização de projetos ajustados às condições existentes e aos alunos. É igualmente recomendado que os alunos se envolvam na resolução de questões e problemas autênticos em contextos de interdisciplinaridade. A programação, tal como a modelação ou o trabalho de projeto, abrem inúmeras vias de trabalho promissoras que não devem ser ignoradas. Também a beleza da matemática, a sua aplicabilidade e a história fascinante que envolve a matemática são fortes motivos para inovar através de práticas de enriquecimento das aprendizagens. É importante que os alunos experimentem o prazer da descoberta em matemática e que desenvolvam o gosto pelo desafio, pela procura de soluções e pela sua comunicação. Dar aos alunos oportunidades de aprenderem matemática significativa contribui para que desenvolvam atitudes positivas em relação à disciplina. Estimular a curiosidade, o interesse, a motivação e a criatividade é essencial para que reconheçam a importância da Matemática na sua formação pessoal e académica e adquiram autoconfiança, sentindo-se capazes de raciocinar e comunicar matematicamente. O contexto socioemocional que permeia a aprendizagem da Matemática tem grande influência sobre a imagem que os jovens constroem da disciplina, sendo determinante na formação de cidadãos críticos, reflexivos, que se sintam capazes de tomar decisões e de formular e resolver problemas de forma criativa e eficiente.

7) Organização do trabalho dos alunos

Valorizar o trabalho colaborativo num ambiente de entreaajuda e corresponsabilização, cultivando comunidades de aprendizagem

A valorização do trabalho colaborativo é assumida enquanto estratégia de aprendizagem e enquanto competência a desenvolver nos jovens na sociedade atual. A colaboração é especialmente indicada em tarefas nas quais os alunos possam discutir e definir abordagens e processos de resolução, confrontar ideias e contribuir para um objetivo comum. É também uma forma de trabalho em que os alunos se devem apoiar mutuamente, envolvendo-se em processos matemáticos, argumentação e comunicação, valorizando as competências individuais de cada um. Assim, o trabalho em pares e em pequenos grupos é adequado em múltiplas situações de aprendizagem, desde a realização de tarefas curtas, passando por situações que envolvem pesquisa, recolha de dados, modelação, até ao desenvolvimento de projetos.

8) Comunicação matemática

Comunicar recorrendo a representações múltiplas, com clareza e rigor e um nível de formalização adequado

A comunicação matemática, a par do raciocínio e do pensamento crítico, está presente quando os alunos interpretam gráficos, esquemas, diagramas ou dados, justificam afirmações, utilizam diferentes representações, escrevem e criticam explicações e argumentos matemáticos, com simbologia adequada e produzindo encadeamentos lógicos. Importa pôr em prática diversos tipos de comunicação, dando espaço às discussões coletivas e em pequenos grupos, apresentações orais e/ou escritas, elaboração de relatórios e composições, publicações e exposições, que são essenciais no processo de desenvolvimento de conceitos ou processos matemáticos. A simbologia constitui um sistema de representação matemática robusto que deve ser relacionado com outros modos de representação, tendo em vista a sua utilização oportuna, nomeadamente no âmbito da comunicação matemática. A formalização de conceitos e resultados matemáticos é uma etapa importante da aprendizagem que não se alcança por meio do excesso de manipulação simbólica ou pela prática de artifícios de cálculo demasiadamente técnicos.

9) Avaliação para a aprendizagem

Privilegiar a avaliação formativa na regulação do processo de aprendizagem

A abordagem exploratória que se privilegia implica a integração da avaliação no processo de aprendizagem. É necessário que a avaliação seja um processo e não um fim, e que esteja ao serviço da aprendizagem dos alunos de modo a favorecê-la. A diversificação de formas e instrumentos de avaliação é uma das práticas de avaliação recomendadas. Constituem boas tarefas

de avaliação formativa as resoluções detalhadas de tarefas, os relatórios e os cartazes. A produção de documentos de natureza audiovisual é igualmente válida e apelativa, designadamente sob a forma de pequenos vídeos, criação de páginas e blogs, tirando partido de ferramentas digitais. As partilhas de ideias e conclusões em sala de aula, bem como as apresentações orais, constituem boas oportunidades para monitorizar e acompanhar o desenvolvimento das aprendizagens e identificar dificuldades e obstáculos.

4. Operacionalização das Aprendizagens Essenciais

A disciplina de Matemática B destina-se aos alunos do Curso Científico-Humanístico de Artes Visuais, como disciplina bial de opção, ou a alunos de outros cursos que, nos termos da legislação aplicável, optem por um percurso formativo próprio. Pretende-se que os alunos desenvolvam conhecimentos, capacidades e atitudes que lhes permitam adquirir um conjunto de competências, tendo em vista a construção do *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*. Os temas a abordar são Modelos Matemáticos para a Cidadania, Geometria, Trigonometria, Estatística, Probabilidade e Funções.

As Aprendizagens Essenciais do 10.º ano integram uma vertente de formação matemática para a cidadania, em consonância com as restantes disciplinas de Matemática do Ensino Secundário. Esta vertente é concretizada nos temas *Modelos Matemáticos para a Cidadania e Estatística*. Para além destes temas, no 10.º ano, os alunos estudam *Geometria Analítica* (no plano e no espaço), *Padrões Geométricos* e *Funções* numa lógica de ampliar e aprofundar as abordagens do Ensino Básico.

No 11.º ano as Aprendizagens Essenciais integram os temas *Taxa de Variação e Otimização*, *Geometria Sintética*, *Probabilidade*, *Distâncias Inacessíveis* e o tema *Matemática e a Arte*. A abordagem das funções considerará sempre estudos dos diferentes pontos de vista: gráfico, numérico e algébrico, valorizando o recurso à tecnologia.

O trabalho de projeto assume uma dimensão relevante, surgindo explicitamente no 10.º ano e no 11.º ano. No 10.º ano são apresentadas propostas de projetos nos temas *Modelos Matemáticos para a Cidadania*, *Estatística* e *Geometria Analítica* no plano e no espaço, *Funções* e *Padrões Geométricos*. No 11.º ano são apresentadas propostas de projetos nos temas *Distâncias Inacessíveis* e *Geometria Sintética*, podendo ser recuperado um trabalho de projeto do 10.º ano ou dada continuidade ao mesmo. Em cada um destes anos deverá ser desenvolvido pelo menos um projeto em cada tema indicado, podendo em alternativa ser desenvolvida outra proposta de trabalho de projeto em qualquer tema que o professor considere adequado.

As Aprendizagens Essenciais relativas à Matemática B (Matemática Aplicada às Artes Visuais) dos Cursos Científico-Humanísticos de Artes Visuais concretizam-se em dois documentos distintos. A organização das Aprendizagens Essenciais é apresentada em quatro áreas:

- *Temas, Tópicos e Subtópicos matemáticos*, em que são identificados os conceitos matemáticos a abordar.
- *Objetivos de aprendizagem, conhecimentos, capacidades e atitudes que o aluno deve revelar*, em que são concretizadas, para cada tópico matemático, as aprendizagens visadas com a indicação do foco e da especificação preconizada.
- *Ações estratégicas de ensino do professor*, onde é clarificado o papel do professor e as indicações metodológicas que são consideradas adequadas para a obtenção dos objetivos de aprendizagem definidos, bem como a sugestão de exemplos para a concretização das atividades a propor aos alunos.
- *Áreas de competência do perfil do aluno*, em que é estabelecida uma ligação entre as aprendizagens matemáticas visadas, as indicações metodológicas e as competências, capacidades e atitudes definidas no *Perfil dos Alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória*.

Quando nas Aprendizagens Essenciais se refere recurso a tecnologia gráfica, deve entender-se a utilização de folhas de cálculo ou qualquer versão de calculadora gráfica, física ou sob a forma de emulador, bem como o uso do Geogebra ou outro Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD), nas suas diversas versões disponíveis em qualquer dispositivo digital. Considera-se também o recurso a aplicativos digitais específicos (apliquetas), disponíveis na internet ou em fóruns temáticos.

Para cada tema são incluídas notas clarificadoras, nomeadamente no que se refere à sugestão de: atividades para o desenvolvimento do Pensamento Computacional, com recurso a exemplos; propostas de possíveis aprofundamentos de alguns temas ou de abordagens alternativas; referências bibliográficas que incluem documentos e recursos para apoio ao trabalho do professor.

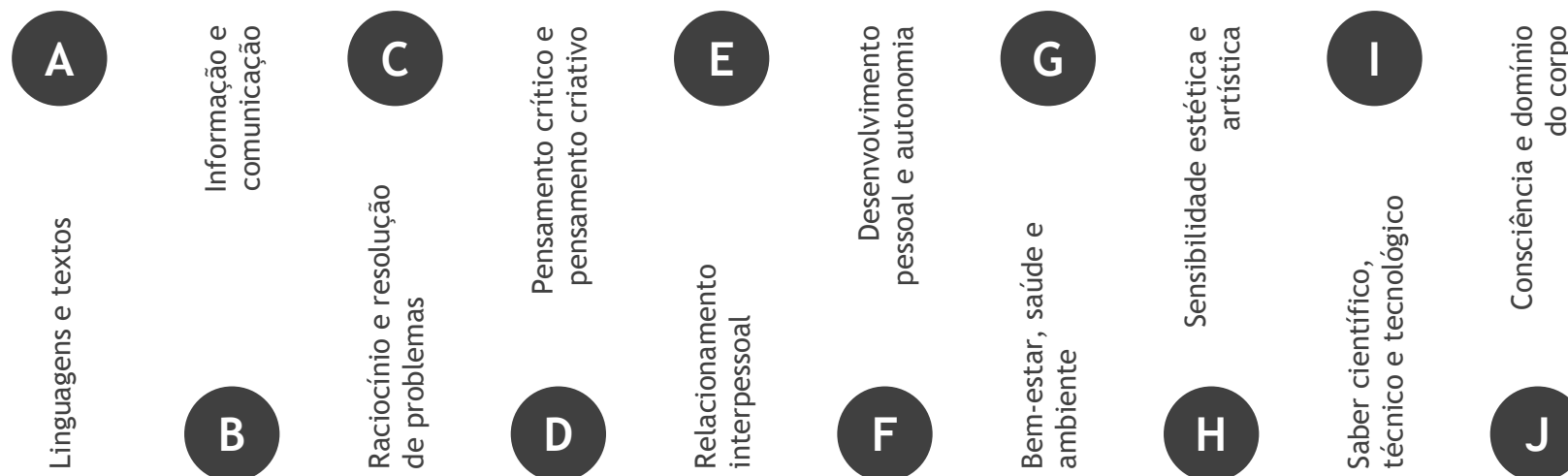
Importa esclarecer que a integração do Pensamento Computacional nas AE não tem como finalidade a aprendizagem de uma linguagem de programação. O que se pretende é que os alunos desenvolvam a capacidade de compreender, interpretar e analisar algoritmos e programas que lhes sejam apresentados, na resolução de problemas matemáticos, incluindo em linguagem natural.

A ordem dos temas apresentados nestas Aprendizagens Essenciais constitui um exemplo de uma sequência que se considera adequada no âmbito do processo de gestão e desenvolvimento do currículo.

Na tabela abaixo apresenta-se uma possível distribuição dos tempos letivos pelos tópicos das Aprendizagens Essenciais, tomando como referência vinte e oito semanas letivas, num total de trinta e duas ou trinta e três semanas previstas usualmente no calendário escolar. Considerou-se cada semana com seis tempos letivos de cinquenta minutos.

Temas	Tópicos	Aulas (50 min)	Semanas
Taxa de variação e otimização	Cálculo e interpretação da taxa de variação	18	6
	Otimização	18	
Probabilidade	Fenómeno aleatório	6	6
	Probabilidade	15	
	Probabilidade condicionada	15	
Geometria sintética	Geometria no plano	18	5
	Geometria no espaço	12	
Distâncias inacessíveis	Resolução de triângulos retângulos	8	6
	Resolução de triângulos obliquângulos	8	
	Determinação de distâncias inacessíveis	8	
	[Trabalho de Projeto]	12	
Matemática e Arte	Atividades investigativas e comunicação matemática	12	5
	Trabalhos de pesquisa	18	
		Total	28

ÁREAS DE
COMPETÊNCIAS
DO PERFIL DOS
ALUNOS (ACPA)



OPERACIONALIZAÇÃO DAS APRENDIZAGENS ESSENCIAIS (AE)

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
TAXA DE VARIAÇÃO E OTIMIZAÇÃO Taxa de Variação Cálculo e interpretação da variação e da taxa de variação	Calcular e interpretar a variação entre dois pontos do domínio de uma dada função. Calcular a taxa média de variação entre dois pontos do domínio de uma função e interpretar geometricamente o valor obtido. Calcular, através da observação da representação gráfica, a taxa média de variação entre dois pontos do domínio de uma função. Calcular numericamente e interpretar em termos geométricos a taxa de variação instantânea.	Tirar partido da utilização da tecnologia (calculadora gráfica, programas de geometria dinâmica como o Geogebra, folhas de cálculo, aplicações interativas, ou outras), para calcular numericamente a variação e a taxa média de variação entre dois pontos e a taxa instantânea de variação num ponto. Promover o cálculo numérico da taxa de variação instantânea, através do algoritmo da calculadora gráfica que aproxima a taxa de variação instantânea pela taxa média de variação num intervalo tão pequeno quanto possível (e esclarecer o aluno das vantagens e inconvenientes de tal processo). Propor a utilização do gráfico da taxa de variação instantânea gerado com recurso à tecnologia, para obter um valor específico no domínio da função.	Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida. (B) Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo. (C)

	Reconhecer, numérica e graficamente, a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia de uma função.	Sugerir a elaboração de um programa em <i>Python</i> para determinação da taxa de variação instantânea de uma função polinomial de grau 3. Promover a interpretação das relações entre as taxas de variação (média e instantânea) e o crescimento, com recurso a exemplos reais da Física, da Demografia e da Economia; ou recorrendo, ainda, a recortes de jornais; recolhas na internet; dados obtidos em experiências com sensores.	Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição. (D) Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos. (E)
Otimização Resolução de problemas envolvendo taxas de variação	Estudar gráfica e numericamente a monotonia de funções, recorrendo ao gráfico da função e ao gráfico da taxa de variação. Reconhecer, numérica e graficamente, a relação entre os zeros da taxa de variação e os extremos de uma função. Resolver problemas que envolvam a determinação de extremos de funções no contexto da vida real. Resolver problemas simples de modelação matemática. Perceber a importância do processo de modelação matemática na sociedade atual.	Promover a utilização do gráfico da taxa de variação instantânea, produzido com recurso à tecnologia, para efetuar tabelas de sinais e extrapolar para a variação da monotonia de uma função. Promover a análise de situações com contexto real, por exemplo, determinar as dimensões ótimas de pacotes de leite com a forma de prismas quadrangulares com uma determinada capacidade, ou situações que permitam a determinação de distâncias mínimas entre dois pontos. Criar condições de aprendizagem para que os alunos, em experiências individuais e colaborativas, tenham oportunidade de resolver problemas e atividades de modelação ou desenvolver projetos, com ênfase especial no trabalho em grupo, que mobilizem conhecimentos adquiridos, fomentem novas aprendizagens e permitam a articulação com outras disciplinas.	É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências. (F) Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos. (I)

Pensamento Computacional

Quando se trabalharem algoritmos, convém incentivar hábitos de rigor aos alunos e fomentar práticas sistemáticas de verificação e controlo. Será importante promover nos alunos a abstração, incentivando-os a recolher a informação essencial para a resolução da tarefa (ou situação) proposta. Os alunos devem ser incentivados a identificar os elementos importantes, no processo de criação do algoritmo, e a estabelecer ordem entre eles.

Antes de redigir o programa na linguagem *Python*, convém fazer uma descrição do algoritmo em linguagem natural.

Neste tema podem ser usados vários tipos de programas em *Python* para calcular taxas médias e instantâneas de variação, de forma aproximada.

Exemplo de programa em *Python* para determinar uma aproximação da variação instantânea de uma função do tipo $ax^3 + bx^2 + cx + d$ num dado ponto:

```
a=-2
b=3.5
c=1
d=0
x=0.2
fx=a*x**3+b*x**2+c*x+d
h=10**(-5)
x=x+h
fxh=a*x**3+b*x**2+c*x+d
d=(fxh-fx)/h
print(d)
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0

Possíveis aprofundamentos

Poderá ser proposto o estudo da concavidade dos gráficos das funções, como aprofundamento deste tema.

Bibliografia de referência

Academia Kahn. *Taxa média de variação e taxa instantânea de variação*. Obtido de

<https://pt-pt.khanacademy.org/math/11ano/xec1aeb6fd449d293:funcoes-reais-de-variavel-real#xec1aeb6fd449d293:taxa-media-de-variacao-e-taxa-de-variacao-instantanea>.

Grupo de Trabalho T3 (2011). *Funções no 3.º Ciclo com Tecnologia*. Lisboa: APM.

Teixeira, P. et al. (1997). *Funções - 10º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Teixeira, P. et al. (1998). *Funções - 11º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

Teixeira, P. et al. (1999). *Funções - 12º ano*. Lisboa: Ministério da Educação.

SESAMATH (2019). *Manuel MATHS première*. Magnard. Obtido de https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms1spe_2019.

WihHow. *Como Encontrar a Taxa Média de Variação*. Obtido de <https://pt.wikihow.com/Encontrar-a-Taxa-M%C3%A9dia-de-Varia%C3%A7%C3%A3o>.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
PROBABILIDADE Fenómeno aleatório Experiência aleatória Espaço de resultados ou espaço amostral Modelo de probabilidade Acontecimentos União e interseção de acontecimentos	Distinguir entre fenómeno aleatório e não aleatório (determinístico). Compreender que as realizações individuais de um fenómeno aleatório são incertas, mas existe um padrão genérico de comportamento, recorrendo-se à Teoria da Probabilidade para construir modelos matemáticos que descrevam a regularidade estatística observada numa longa série de repetições do fenómeno. Compreender que: - À realização de um fenómeno aleatório se dá o nome de experiência aleatória; - Ao conjunto S dos resultados possíveis se dá o nome de espaço de resultados ou espaço amostral; - Um acontecimento é um subconjunto do espaço de resultados e que a estes resultados se dá o nome de “resultados favoráveis” à realização do acontecimento; - A descrição do fenómeno aleatório é feita através de um modelo de probabilidade, constituído pelos resultados possíveis e a probabilidade atribuída a cada resultado. Relembrar os conceitos: acontecimento certo, impossível, elementar e composto; acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos; acontecimentos contrários ou complementares; união e interseção de acontecimentos	Recorrer a situações em contextos variados, para sensibilizar os alunos para a existência destes fenómenos, nomeadamente através de exemplos de fenómenos físicos, com leis determinísticas (movimento de um carro; queda de uma maçã do alto de uma torre) e de exemplos de fenómenos que se podem considerar aleatórios pela dificuldade em arranjar uma lei física para os descrever (número de irmãos de um aluno da escola, escolhido ao acaso; face do dado que fica virada para cima quando se lança; temperatura máxima a observar numa data futura). Salientar que os modelos de probabilidade são modelos matemáticos que descrevem os fenómenos aleatórios. Realçar que para construir um modelo de probabilidade tem de se arranjar um processo que permita atribuir probabilidades aos acontecimentos elementares.	Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) Analisa criticamente as conclusões a que chega, reformulando, se necessário, as estratégias adotadas (C) Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)

Probabilidade Probabilidade frequencista Regras da probabilidade Probabilidade da união de acontecimentos	Compreender que a característica do fenómeno aleatório permite definir, intuitivamente, a probabilidade de um acontecimento A, representada por $P(A)$, como sendo o valor para o qual estabiliza a frequência relativa da realização de A, num grande número de repetições da experiência aleatória, nas mesmas condições, ou seja, $P(A)$ é o valor em que estabiliza $\frac{n_A}{n}$, onde n_A representa o número de vezes que se realizou A em n repetições da experiência aleatória. Reconhecer que as probabilidades associadas aos acontecimentos elementares têm de ser números entre 0 e 1 e que a soma total deve ser 1. Reconhecer que a probabilidade de um acontecimento é igual à soma das probabilidades dos acontecimentos elementares constituídos pelos resultados que o compõem. Utilizar a representação dos acontecimentos em diagramas de Venn, para mostrar que, dados dois acontecimentos A e B quaisquer, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Reconhecer que se admite que os acontecimentos elementares são equiprováveis quando não haja à partida razão para admitir que os resultados do espaço de resultados não tenham igual possibilidade de se verificarem.	Iniciar o estudo deste tema com modelos de probabilidade simples, com espaços de resultados finitos, nomeadamente os que descrevem os chamados “jogos de sorte e azar”. Por exemplo, intuitivamente, espera-se que ao fim de muitas repetições do lançamento do dado, cada uma das faces saia aproximadamente 16,6(6)% das vezes. Alguns acontecimentos, associados com esta experiência, são: “sair uma face com um nº de pintas par”, “sair uma face com um nº de pintas maior ou igual a 5”, “sair uma face com um nº de pintas maior que 6”, etc. Sugerir a elaboração de um programa em <i>Python</i> para simular o lançamento de um dado numerado com n faces (4, 6, 8, 12, 20). Propor a resolução de problemas que envolvam o cálculo de probabilidades recorrendo à regra de Laplace, evitando o uso excessivo de técnicas de contagem. Realçar que uma vez definido o modelo de probabilidade se pode calcular a probabilidade de qualquer acontecimento associado ao fenómeno em estudo.	Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
---	--	---	---

Regra de Laplace	Compreender que quando se puder admitir que os acontecimentos elementares são equiprováveis, se pode utilizar a regra de Laplace para determinar a probabilidade de um acontecimento A, com o seguinte enunciado: $P(A) = \frac{\text{Número de resultados favoráveis a } A}{\text{Número de resultados possíveis}}$	Alertar os alunos para o facto de que na vida real as situações mais frequentes são aquelas em que não é possível recorrer à regra de Laplace para calcular a probabilidade de acontecimentos, por exemplo: o tipo sanguíneo de uma pessoa escolhida ao acaso, de entre a população portuguesa, ou a eficácia de uma vacina.	
Probabilidade condicionada Definição Regra do produto Árvore de probabilidade Tabelas de contingência Acontecimentos independentes	Saber que a probabilidade de um acontecimento A se realizar, condicionada ou sabendo que o acontecimento B se realizou, com $P(B) > 0$, se representa por $P(A B)$ e se calcula de acordo com a seguinte fórmula: $P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ Reconhecer que a partir da definição de probabilidade condicionada se pode definir a probabilidade simultânea de dois acontecimentos, chamada regra do produto, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B A)$ ou $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A B)$ conforme seja A ou B o acontecimento que está a condicionar. Reconhecer a utilidade de árvores de probabilidade para organizar a informação disponível sobre os acontecimentos em cadeia. Reconhecer a utilidade das tabelas de contingência para calcular a probabilidade condicionada. Identificar que os acontecimentos A e B, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, são independentes quando a ocorrência de um deles não altera a probabilidade da ocorrência do outro, ou seja, $P(A B) = P(A)$ (A independente de B) e $P(B A) = P(B)$ (B independente de A).	Conduzir os alunos a reconhecerem que em muitas situações em que se pretende calcular a probabilidade de um acontecimento, já se dispõe de alguma informação sobre o resultado da experiência, a qual permite atualizar a atribuição de probabilidade a esse acontecimento. Exemplificar com situações intuitivas, como a extração de bolas, de vários tipos, de uma caixa sucessivamente, sem reposição, em que a composição da caixa se altera, implicando que a probabilidade de se retirar uma bola depende dos tipos de bolas que saíram nas extrações anteriores Pedir aos alunos que calculem a probabilidade de ocorrência de cadeias simples de acontecimentos, utilizando árvores de probabilidade, como forma de organização da informação disponível. Salientar que uma das situações mais simples para compreender intuitivamente o conceito de independência de acontecimentos está ligada à situação do lançamento de uma moeda. A moeda “não tem memória” e a probabilidade de sair	

	Reconhecer que outra definição de independência consiste em dizer que os acontecimentos A e B são independentes se e só se $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. As duas definições de independência são equivalentes desde que se exija que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.	“face nacional” no próximo lançamento não depende do que saiu nos lançamentos anteriores. Porém, no acontecimento “selecionar o nome de dois alunos do sexo masculino” de uma turma com 14 rapazes e 16 raparigas, a probabilidade de selecionar o segundo rapaz, depende da escolha do primeiro aluno (seleção sem reposição). Promover a resolução de problemas em que se obtenha a probabilidade de um certo acontecimento B, quando são conhecidas as probabilidades de B condicionadas aos acontecimentos $(A_1, A_2, \dots, A_n)$, mutuamente exclusivos em que a sua união é igual ao espaço de resultados e são conhecidas as suas probabilidades, não nulas, utilizando: $P(B) = P(B A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B A_n) \cdot P(A_n)$	
--	---	---	--

Pensamento Computacional

Exemplo de programa em *Python* para simular lançamentos de 1 dado cúbico, numerado de 1 a 6, e o registo das frequências relativas referentes à saída de cada face:

```
from random import randint
n=int(input("Quantos lançamentos queres simular?"))
f=[0 for k in range(6)]
for i in range(n):
    r=randint(1,6)
    f[r-1]=f[r-1]+1

for k in range(6):
    print("Freq. relativa da saída da face",k+1,"=",f[k]/n)
```

Nota: O programa foi criado em *Python* IDLE 3.11.0 para computador.

Como possíveis alterações a este programa sugere-se a variação do número de faces.

Possíveis aprofundamentos

Explorar a utilização da tecnologia para simular determinados acontecimentos e utilizar a aproximação frequencista da probabilidade para estimar a probabilidade desses acontecimentos.

Explorar o problema das três portas (Monty Hall).

Bibliografia de referência

ALEA - *Noções de Probabilidade*, obtido de https://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=132&Itemid=1204&lang=pt.

COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

Graça Martins, M. E (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

Graça Martins, M. E (2005). *Introdução à Probabilidade e à Estatística, com complementos de Excel*. Sociedade Portuguesa de Estatística.

Graça Martins, M. E., e Cerveira, A. (1998). *Introdução às Probabilidades e à Estatística*. Universidade Aberta

Graça Martins, M. E., e Loura, L. (2002). *Estatística, Modelos de Probabilidade e Introdução à Inferência Estatística* (edição da responsabilidade do DES, Lisboa).

Obtido de <https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>

Graça Martins, M. E., Loura, L., e Mendes, F. (2007). *Análise de dados*. (edição da responsabilidade do DES, Lisboa).

Graça Martins, M. E., Monteiro, C., Viana, J. P., e Turkman, M. A. A. (1999). *Probabilidades e Combinatória*. Ministério da Educação/Departamento do Ensino Secundário.

Modelos de Probabilidade e Introdução à Inferência Estatística (edição da responsabilidade do DES, Lisboa). Obtido de

<https://www.dge.mec.pt/recursos-multimedia-online>

Noções de Probabilidade. Obtido de http://www.alea.pt/index.php?option=com_content&view=article&id=132&Itemid=1204&lang=pt.

Moore, D. (2019). *STATISTICS Concepts and controversies*. W.H.Freeman and Company. New York.

Moore, D. et al. (2021). *The Basic Practice of Statistics*. W.H.Freeman and Company. New York.

Rossman, A. et al. (2011). *Workshop Statistics: Discovery with Data*. Wiley.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
GEOMETRIA SINTÉTICA Geometria no plano Perímetros e áreas de figuras semelhantes	Compreender a noção de semelhança. Relacionar área e perímetro de figuras planas semelhantes. Utilizar escalas para o cálculo de perímetros e áreas. Conhecer um ou mais problemas e factos marcantes da História da Geometria ou das aplicações contemporâneas da semelhança de figuras.	Propor o cálculo de perímetros e áreas a partir da análise de plantas, recorrendo à escala aplicada, para determinar, por exemplo: - o custo associado à pintura das paredes de uma casa; - a compra de mosaicos ou de azulejos; - os custos para proceder à vedação de um jardim. Propor a elaboração de um trabalho de pesquisa sobre problemas históricos ou aplicações contemporâneas da semelhança de figuras, por exemplo: - a altura da grande pirâmide do Egito, por Tales de Mileto; - modelagem 3D de fotografias de pessoas no computador para determinar o seu aspeto em diferentes idades; - identificar padrões de crescimento alométrico; - utilizar a ferramenta Google Maps para a determinação de uma área de um determinado terreno; - utilizar exemplos das viagens espaciais, por exemplo os fornecidos pela NASA e pela ESA-Agência Espacial Europeia. Orientar os alunos a exprimir, oralmente e por escrito a sua exploração dos exemplos trabalhados, evidenciando o domínio dos conceitos, dos raciocínios e das ideias matemáticas usados, interpretando textos de Matemática e justificando raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo a vocabulário e linguagem próprios da matemática.	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A) Apresenta e explica conceitos em grupos, ideias e projetos diante de audiências reais, presencialmente ou a distância (B) Preocupa-se com a construção de um futuro sustentável e envolve-se em projetos de cidadania ativa (G)

Geometria no Espaço Medidas de volume e capacidade Volumes de sólidos Áreas de superfícies Empacotamento	Desenvolver a capacidade de visualização no espaço tridimensional. Resolver problemas de cálculo de medidas, nomeadamente, volumes ou superfícies. Resolver problemas do quotidiano envolvendo volumes e capacidades. Aplicar os conceitos de volume e capacidade no cálculo de quantidades e custos. Relacionar sólidos semelhantes com os respetivos volumes. Determinar a melhor solução de empacotamento de objetos num determinado contentor.	Propor a resolução de problemas que impliquem o cálculo de volumes e superfícies de diferentes sólidos geométricos ou resultantes da composição dos mesmos, a partir da análise de modelos 3D ou da sua representação, por exemplo: - a capacidade de um determinado tanque ou a quantidade de água necessária para encher uma piscina; - o material e os custos gastos num embrulho; - o material e custos associados à construção de uma maquete. Incentivar os alunos a explorar a relação entre volumes de sólidos semelhantes, recorrendo ao Geogebra ou outro software de geometria dinâmica. Promover o estudo de diferentes casos de empacotamento, enquadrados no perfil do curso.	Têm consciência de si próprio a nível emocional, cognitivo, psicossocial, estético e moral por forma a estabelecer consigo próprio e com os outros uma relação harmoniosa (J)
--	--	--	--

Possíveis aprofundamentos

Poderá ser feita uma referência ao problema da Mochila e à sua complexidade matemática:

Landau, E. (2020). How the Mathematical Conundrum Called the ‘Knapsack Problem’ Is All Around Us. SMITHSONIANMAG.COM, MARCH 9, 2020. Obtido de <https://www.smithsonianmag.com/science-nature/why-knapsack-problem-all-around-us-180974333/>

Neste tema há oportunidade de explorar de forma interativa vários tipos de empacotamento, usando o software GEOGEBRA. Páginas a explorar, por exemplo:

- Octagon Packing. Obtido de <https://www.geogebra.org/m/KqrXf9Uu>
- Circle Packing and Room Capacities for COVID 19. Obtido de <https://www.geogebra.org/m/zqe6wtf9>
- Circle Packing. Obtido de <https://www.geogebra.org/m/DTD6dSxQ>
- Malfatti's Packing Problem. Obtido de <https://www.geogebra.org/m/bXjAVqhf>

Bibliografia de referência

- Agrupamento de Escolas D. Pedro I (2018). *Geometria no Empacotamento*. Obtido de http://agrupamento.dpedro.net/wp-content/uploads/2018/04/Prova2_Geometria_N%C3%ADvel-II.pdf
- Caraça, Bento de Jesus (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Ciência Aberta, Lisboa: Gradiva.
- Cássio, J. (2019). *Aprendendo Geometria Plana com a Plataforma GeoGebra*. Obtido de <https://www.geogebra.org/m/hsXHDX7>
- Estrada, M. F. et al. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Gupta, M. (1977). *The Geometry of Art and Life*. New York: Dover.
- IMPA (2020). *As lições de geometria do isolamento social*. Obtido de <https://impa.br/noticias/as-licoes-de-geometria-do-isolamento-social/>
- Loureiro, C. et al. (1997). *Geometria 10º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- Loureiro, C. et al. (1998). *Geometria 11º ano de escolaridade*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário.
- Martins, R. (2016). *Isto é Matemática - T10E10 - “Empacotamentos”*. Obtido de <https://youtu.be/q2DWiAlw5Wk>
- OBMEP (2019). *Atividade: Proporção em Geometria*. Obtido de <http://clubes.obmep.org.br/blog/atividade-proporcao-em-geometria-2/>
- Precatado, A., e Guimarães, H. (2001). *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.
- Sebastião e Silva, J. (1970). *Geometria Analítica Plana*. Lisboa: Empresa Literária Fluminense.
- Sebastião e Silva, J. (1976). *A Matemática na Antiguidade*. Lisboa: SPM.
- Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
DISTÂNCIAS INACESSÍVEIS Resolução de triângulos retângulos	Conhecer e aplicar as relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo retângulo. Formular e resolver problemas geométricos ou da vida real que envolvam triângulos retângulos e o cálculo de medidas dos seus lados e dos seus ângulos.	Propor a resolução de problemas de triângulos retângulos, utilizando a variação de ângulos/lados, envolvendo situações concretas, como por exemplo sombras ao longo do dia ou alturas de edifícios.	Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática. (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C)
Resolução de triângulos oblíquângulos	Estabelecer relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo não retângulo, a partir da sua decomposição em triângulos retângulos. Conhecer e aplicar nos processos de resolução de triângulos não retângulos a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos. Formular e resolver problemas geométricos ou da vida real que envolvam triângulos não retângulos e o cálculo de medidas dos seus lados e dos seus ângulos. Conhecer problemas e factos marcantes da História da Trigonometria e analisá-los em confronto com os conhecimentos disponíveis.	Propor a resolução de problemas que envolvam triângulos não retângulos, usando a: - decomposição em triângulos retângulos; - Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos. Promover a aplicação de conhecimentos de trigonometria a situações da vida real, através da elaboração de esquemas, da identificação de triângulos, da escolha das relações trigonométricas adequadas e da validação das soluções. Propor a elaboração de um trabalho de pesquisa sobre problemas históricos que tenham envolvido o cálculo de distâncias inacessíveis, tais como: a altura da grande pirâmide do Egito, por Tales de Mileto; o raio da Terra por Eratóstenes; a construção do túnel da ilha de Samos; a altura de uma falésia do <i>Manual Matemático da Ilha do Mar</i>, do chinês Liu Hui; cálculos astronómicos no Observatório de Jantar Mantar, Ujjain, Índia.	

	Utilizar a visualização, a representação e o raciocínio espacial na análise de situações problemáticas da vida real e na resolução de problemas, construindo modelos úteis e adequados com recurso a medições e escalas.	Recorrer a situações e contextos variados, que envolvam aplicações e modelação matemática, incluindo a utilização de materiais diversificados e tecnologia, de modo a proporcionar aos alunos experiências individuais e colaborativas que integrem a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemática.	
Determinação de distâncias inacessíveis	Determinar lados e ângulos em problemas com triângulos retângulos e não retângulos, para calcular todo o tipo de distâncias inacessíveis. Exprimir, oralmente e por escrito, conceitos, raciocínios e ideias matemáticas, interpretando textos de matemática e justificando raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática.	Propor aos alunos a elaboração de um projeto de determinação de uma distância inacessível, usando instrumentos adequados de medição, ainda que rudimentares e construídos pelos alunos. Pode por exemplo ser usado um teodolito caseiro (transferidor, palhinha e fio de prumo ou clip), ou podem ser usados exemplos de livros antigos que recorrem ao grafómetro. Utilizar ferramentas tecnológicas específicas, incluindo calculadoras científicas ou gráficas e um programa de geometria dinâmica para: simular e modelar situações da vida real ou da geometria, fazer conjecturas, formular e resolver problemas.	Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D) Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E)
Aprofundamento do estudo de Distâncias Inacessíveis com trabalho de projeto (*)	Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados ao cálculo de Distâncias Inacessíveis num problema contextualizado, desenvolvendo competências de representação e comunicação matemática. Desenvolver hábitos de pesquisa. Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos. Conhecer, aplicar e criar modelos presentes no cálculo de Distâncias Inacessíveis, tirando partido da tecnologia.	Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório. Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia. Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta.	É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências (F) Trabalha com recurso a materiais,

	Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pôsteres, vídeos ou outros suportes.	Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: - A Trigonometria e a resolução de triângulos ao longo da história (Túnel de Samos, raio da Terra, distância da Terra à Lua) - Uso da Trigonometria em textos clássicos chineses (“Manual Matemático da Ilha do Mar”); - Determinação de uma distância inacessível, usando instrumentos adequados de medição, ainda que rudimentares e construídos pelos alunos. Pode por exemplo ser usado um teodolito caseiro (transferidor, palhinha e fio de prumo ou clip), ou podem ser usados exemplos de livros antigos que recorrem ao grafómetro. Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática ou recurso à tecnologia sempre que for considerado relevante.	instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)
(*) Este tópico pode ser substituído por tópico idêntico noutros temas do 11.º ano tal como é exemplificado nas propostas apresentadas abaixo ou recuperar propostas de temas lecionados no 10.º ano.			

Possíveis aprofundamentos

Poderá ser aprofundado o estudo da Lei dos Senos, abordando a sua demonstração e algumas aplicações, consultando por exemplo a página da Casa das Ciências: https://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php/Lei_dos_senos

Para fomentar a visualização gráfica pode-se recorrer a ferramentas computacionais, como, por exemplo, o Geogebra:

- Lei dos senos: <https://www.geogebra.org/m/uv8QJeDj>
- Lei dos senos: <https://www.geogebra.org/m/vTxDD3eY>
- Leis trigonométricas: <http://www.malinc.se/math/trigonometry/lawsen.php>
- O “som” do seno: <http://www.malinc.se/math/trigonometry/musicen.php>

Bibliografia de referência

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Ciência Aberta. Lisboa: Gradiva.

COMAP (2016). *FOR ALL PRACTICAL PURPOSES - Mathematical Literacy in Today's World*. New York: W. H. Freeman and Company.

Devlin, K. (2002). *Matemática - A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Estrada, M., Queiró, J. F., Silva, M. C. e Costa, M. J. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

Khan Academy (s/d). *Problema de trigonometria: estrelas*. Obtido de

<https://pt-pt.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-trig/hs-geo-solving-general-triangles/v/law-of-cosines-word-problem>.

Matos, J. F., e Carreira, S. P. (1996). *Modelação e Aplicações no Ensino da Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Neto, F. (2015). *O cálculo de distâncias entre pontos inacessíveis*. Universidade Federal da Paraíba. Obtido de <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/9410/2/arquivototal.pdf>.

Precatado, A. e Guimarães, H. (2001). *Materiais para a aula de Matemática*. Lisboa: APM.

Sebastião e Silva, J. (1975-1978). *Compêndio de Matemática* (3 volumes). Lisboa: GEP.

Proposta 1

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
Aprofundamento do estudo de Geometria sintética com trabalho de projeto	Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados à Geometria sintética num problema contextualizado, desenvolvendo competências de generalização, representação e comunicação matemática. Desenvolver hábitos de pesquisa. Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos. Conhecer, aplicar e criar modelos presentes na Geometria sintética, tirando partido da tecnologia. Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório. Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia. Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta. Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: - Exploração da Enciclopédia de pontos notáveis de um triângulo; - Secções num cubo; - Sólidos platónicos e sólidos arquimedianos; - Poliedros estrelados; - Estudo do primeiro livro dos Elementos de Euclides; - Exploração de contextos reais de empacotamento, (escolha do produto, eficácia do empacotamento, otimização dos custos). Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática ou recurso à tecnologia sempre que for considerado relevante.	Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D) Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

Proposta 2

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
Aprofundamento do estudo de Taxa de Variação e Otimização com trabalho de projeto	Aplicar e aprofundar conceitos e processos associados à Taxa de Variação e Otimização num problema contextualizado, desenvolvendo competências de generalização, representação e comunicação matemática. Desenvolver hábitos de pesquisa. Interpretar de forma crítica, informação, modelos e processos. Conhecer, aplicar e criar modelos presentes na Taxa de Variação e Otimização, tirando partido da tecnologia. Desenvolver a criatividade e a comunicação, através da apresentação do projeto em palestras, pósteres, vídeos ou outros suportes.	Discutir e estabelecer a elaboração de um trabalho de projeto, contemplando as diversas fases (formulação de um problema, planificação, realização de pesquisas, recolha de informações e dados, análise e interpretação de resultados e conclusões). Reservar momentos de trabalho na sala de aula para o desenvolvimento e acompanhamento, em grupo, do trabalho de projeto, incluindo a escrita do respetivo relatório. Propor a discussão da pertinência e da necessidade de usar recursos e tecnologia. Promover a divulgação, em grupo, destes trabalhos, podendo essa etapa acontecer na sala de aula ou ser alargada a outros espaços da escola e para além desta. Estimular a discussão do tema de cada investigação que pode ser escolhido de entre uma lista de opções, como por exemplo: - Episódios da História do Cálculo Diferencial (Teorema de Rolle para polinómios, o método dos máximos e mínimos de Fermat, a definição da derivada de Anastácio da Cunha); - Splines e curvas de Bézier; - Funções polinomiais que surgem no estudo das ciências do espaço (polinómio do 6.º grau na radiação da cintura de Van Allen em SpaceMath@NASA); - Fomentar a visualização gráfica e a interpretação da taxa média de variação recorrendo a ferramentas computacionais, como por exemplo, o Geogebra: • https://www.geogebra.org/m/RCGp7JjK; • https://www.geogebra.org/m/aC9j8ZrE. Valorizar aspetos relevantes da História da Matemática ou recurso à tecnologia sempre que for considerado relevante.	Desenvolve ideias e projetos criativos com sentido, no contexto a que dizem respeito, e testa e decide sobre a sua exequibilidade (D) Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I)

Bibliografia de referência (trabalhos de projeto)

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: a experiência do projecto mat789*. (Tese de Doutoramento). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Amado, N. e Carreira, S. (2019). *Trabalho de Projeto*. Obtido de: <http://hdl.handle.net/10400.1/15482>.

George Lucas Educational Foundation (2021). *Project-Based Learning (PBL)*. Obtido de: <https://www.edutopia.org/project-based-learning>.

Mestre, A. P. (2011). *Histórias com matemática: trabalho de projecto no 2º ciclo do ensino básico*. (Dissertação de Mestrado). Obtido de: <http://hdl.handle.net/10400.1/6872>.

Ponte, J. P., Brunheira, L., Abrantes, P., e Bastos, R. (1998). *Projetos Educativos: matemática - ensino secundário*. Ministério da Educação.

TEMAS, Tópicos e Subtópicos matemáticos	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM: Conhecimentos, Capacidades e Atitudes que o aluno deve revelar	AÇÕES ESTRATÉGICAS DE ENSINO DO PROFESSOR	Áreas de Competência do Perfil dos Alunos
MATEMÁTICA E ARTE Atividades investigativas Comunicação matemática	Apreciar o contributo da Matemática para a atividade artística, tendo por base o conhecimento de problemas e factos marcantes da História da Arte e da Matemática, discutindo-os em confronto com os conhecimentos disponíveis. Conhecer pintores, escultores, designers ou arquitetos que usaram a Matemática ou que encontraram inspiração nos conceitos matemáticos para as suas obras. Utilizar a Matemática para analisar e interpretar obras de arte (pintura, escultura, design, arquitetura, ...). Aprofundar autonomamente conhecimentos matemáticos relacionados com uma obra de arte, uma escola, um artista ou um período da História da Arte e apresentá-los, de forma clara e organizada. Expressar, oralmente e por escrito, conceitos, ideias e raciocínios matemáticos, interpretando textos de Matemática e justificando raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática.	Propor aos alunos a escolha de uma obra, um artista, uma escola ou um período da História da Arte e investigar as técnicas ou conceitos de origem matemática usados ou que podem ser utilizados para interpretar a obra. Proporcionar aos alunos, em experiências individuais e colaborativas, o aprofundamento de forma autónoma e em interação com os outros, de conhecimentos matemáticos em contextos históricos e artísticos, através da construção de sínteses e da elaboração de relatórios. Organizar momentos em que os alunos tenham oportunidade de comunicar resultados de aprendizagens através de trabalhos e/ou projetos de diversa natureza (textos, imagens, desenhos, posters, maquetes, portefólios, debates, exposições, vídeos, apresentações digitais, blogues e/ou outros produtos multimédia), elaborados individualmente ou em grupo, realizados no contexto da disciplina e/ou de forma interdisciplinar	Compreende, interpreta e comunica, utilizando linguagem matemática (A) Recorre à informação disponível em fontes documentais físicas e digitais; avalia, valida e organiza a informação recolhida (B) Usa modelos para explicar um determinado sistema, para estudar os efeitos das variáveis e para fazer previsões acerca do comportamento do sistema em estudo (C) Usa critérios para apreciar ideias, processos ou produtos, construindo argumentos para a fundamentação das tomadas de posição (D)

Exemplos de trabalhos de pesquisa			
Apresentam-se três exemplos, entre outros possíveis, sendo que em cada caso os conhecimentos matemáticos a aprofundar serão necessariamente diferentes			
1. Matemática e Arte no Renascimento Perspetiva linear	Conhecer a obra de Brunelleschi, Leon Battista Alberti, Piero della Francesca e Albrecht Dürer e os conceitos matemáticos que usaram nas suas obras. Aprofundar conhecimentos matemáticos relacionados com as obras destes artistas, precursores da perspetiva linear e da geometria projetiva, estudando conceitos como por exemplo: plano de tela, ponto de fuga, linha do horizonte, linhas de fuga, projeções e secções. Encontrar os elementos da perspetiva linear em obras de arte desta época e fazer as suas representações em réplicas dessas obras.	Propor aos alunos a elaboração de um trabalho de pesquisa sobre a perspetiva linear no Renascimento com o objetivo de investigarem as técnicas ou conceitos de origem matemática usados ou que podem ser utilizados para interpretar as obras de arte. Organizar momentos em que os alunos tenham oportunidade de comunicar, de variadas formas, os resultados das suas aprendizagens.	Compreende, interpreta e comunica utilizando linguagem matemática. (A) Trabalha em equipa e aprende a considerar diversas perspetivas e a construir consensos (E) É confiante, resiliente e persistente, construindo caminho personalizado de aprendizagem de médio e longo prazo, com base nas suas vivências (F)
2. Matemática e arquitetura Poliedros	Conhecer a obra de arquitetos, como por exemplo, Rafael Leoz, Anna e Ricardo Bofill, Piet Blom, Richard Fuller, Arata Isozaki, Antoni Gaudí, Siza Vieira, Souto Moura, Philip Johnson ou Zaha Hadid, e os conceitos matemáticos que usaram nas suas obras. Aprofundar conhecimentos matemáticos relacionados com as obras destes arquitetos, estudando os poliedros visíveis nas suas obras, bem como outros conceitos geométricos. Elaborar uma maquete, com materiais recicláveis, de uma das obras de um desses arquitetos que evidencie os poliedros que serviram de inspiração a essa obra.	Propor aos alunos a elaboração de um trabalho de pesquisa sobre a obra de um ou mais arquitetos com o objetivo de investigarem as técnicas ou conceitos de origem matemática usados nas suas obras. Organizar momentos em que os alunos tenham oportunidade de comunicar, de variadas formas, os resultados das suas aprendizagens.	Mobiliza os processos de reflexão, comparação e argumentação em relação às produções artísticas e tecnológicas, integradas nos contextos sociais, geográficos, históricos e políticos (G)

3. Le Corbusier Proporções	Conhecer os conceitos matemáticos presentes na obra do arquiteto Le Corbusier. Aprofundar conhecimentos matemáticos relacionados com as obras de Le Corbusier, especialmente os que se referem ao “Le modulator” e às proporções entre as medidas da figura humana, com repercussões no design de objetos ergonómicos. Realizar um trabalho de antropometria com a recolha de medidas do corpo humano numa amostra da população, verificando proporções e estabelecendo correlações entre algumas dessas medidas, comparando-as com as propostas por Le Corbusier.	Propor aos alunos a elaboração de um trabalho de pesquisa sobre a obra de Le Corbusier com o objetivo de investigarem as técnicas ou conceitos de origem matemática usados nas suas obras. Organizar momentos em que os alunos tenham oportunidade de comunicar, de variadas formas, os resultados das suas aprendizagens.	Aprecia criticamente as realidades artísticas, em diferentes suportes tecnológicos, pelo contacto com os diversos universos culturais. (H) Trabalha com recurso a materiais, instrumentos, ferramentas, máquinas e equipamentos tecnológicos, relacionando conhecimentos técnicos e científicos (I) Domina a capacidade percetivo-motora (imagem corporal, direcionalidade, afinamento percetivo e estruturação espacial e temporal) (J)
--	---	--	---

Possíveis aprofundamentos

Neste tema podem ser utilizadas diversas aplicações interativas que permitem explorar diferentes configurações. Podem ser exploradas as aplicações interativas da exposição Formas & Fórmulas: <http://formas-formulas.fc.ul.pt/multimedia/interactivo/>

Podem ser usados os módulos de software construídos pelo IMAGINARY, em casa, na escola ou num museu. Todos os módulos incluem especificações para instalações públicas: <https://www.imaginary.org/programs>

Bibliografia de referência

- Atrator (2003). *O ritmo das formas - Itinerário matemático (e não só) no mundo da simetria*. Ed. Atrator.
- Atrator (2018). A Matemática dos Azulejos, *Gazeta de Matemática*, nº 186, p. 3-9. Obtido de <https://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=1484>.
- Bastos, R. (2006). Simetria, *Educação & Matemática*, nº 88, p. 9-11. Obtido de <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1484>.
- IMAGINARY. Obtido de <https://www.imaginary.org/>.
- King, J. e Schattschneider, D. (Eds.). (2003). *Geometria Dinâmica*. Lisboa: APM.
- Marques, A. (2020). *O Século de Le Corbusier*. Obtido de <https://www.acasinhadamatematica.pt/?p=17698>
- Museu da Ciência (2012). *Imaginary - Matemática e Natureza*. Universidade de Coimbra.
- Museu Nacional de História Natural e da Ciência (2012/2013). *Formas & Fórmulas (Conceitos naturais e matemáticos em ação e interação)*. Universidade de Lisboa. Obtido de <http://formas-formulas.fc.ul.pt/>.
- Reis, L. (2007). Le Modulor por Le Corbusier, *Educação & Matemática*, nº 93, p. 43-48. Obtido de <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1612/1651>.
- Siqueira, V., Sirilo, G., e Marques, J. (2017). *A proporção no corpo humano e sua influência na arquitetura*. Obtido de https://www.researchgate.net/publication/342666922_A_PROPORCAO_NO_CORPO_HUMANO_E_SUA_INFLUENCIA_NA_ARQUITETURA.
- Teixeira, R. (2013). *Simetrias nos Açores*. Obtido de <http://sites.uac.pt/rteixeira/simetrias/>.
- Veloso, E. (1998). *Geometria - Temas atuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Veloso, E. (2012). *Simetria e Transformações Geométricas*. Lisboa: APM.
- Veloso, E. (2020). *Arte e Geometria no Renascimento*. Lisboa: APM. Obtido de https://wordpress.apm.pt/wp-content/uploads/2020/10/ArtGeom_OUT_2020.pdf.
- Veloso, E. et al. (2009). Isometrias e Simetria com materiais manipuláveis, *Educação & Matemática*, n.º 101, p. 23-28. Obtido de <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1746>.