
TEORIA DOS GRAFOS – APLICAÇÕES PRÁTICAS

O porquê da escolha da Teoria dos Grafos

Os países mais desenvolvidos têm vindo a sofrer a mudança duma sociedade industrial para uma sociedade de informação/comunicação. O ritmo desta mudança tem sido tal que actualmente é possível constatar que a produção, armazenamento, transmissão e difusão da informação (oral, escrita, gráfica, numérica) é muito maior que a que qualquer ser humano pode assimilar. Este movimento exige o recurso a tecnologia da mais avançada e provoca profundas transformações no nosso dia a dia.

Os objectivos que a Escola quer alcançar devem ser o reflexo das necessidades da sociedade onde os alunos se inserem. Há que reflectir profundamente sobre o tipo de conhecimento e sobretudo de competências que vão ser exigidas aos nossos alunos. Relativamente à Matemática há que repensar os aspectos da matemática que temos necessidade de transmitir aos alunos bem como os conceitos e processos que estes devem dominar. Assim o sistema escolar deve proporcionar um ensino que permita ao aluno:

- ◆ decidir que informação é relevante para o estudo e compreensão de um determinado problema e qual a melhor forma de apresentar essa informação
- ◆ dar a resposta mais adequada, apesar da multiplicidade de situações novas que irão encontrar durante a sua vida e a que têm de dar resposta imediata.

Segundo o professor Sebastião e Silva (1975), o ensino em todos os graus terá de se tornar mais flexível, mais adaptado, quer às solicitações dum mundo em rápida evolução quer às aptidões dos indivíduos.

Conseguir que os alunos aprendam a pensar, a resolver problemas, a enfrentar novas situações, a aceder à informação e a tratá-la de forma adequada é o grande desafio do nosso sistema escolar.

O NCTM, já em 1991, nas suas Normas propunha que se incluíssem tópicos de Matemática Discreta nos currículos. Na Norma 12 para os níveis de escolaridade do 9^o ao 12^o anos podíamos encontrar referências tais como:

- ◆ (...) em contextos geométricos e algébricos, os alunos devem ter numerosas oportunidades para investigar situações problemáticas deste tipo, e também de situações que envolvam três redes de comunicação, diagramas de circuitos, torneios desportivos, esquemas de produção e relações matemáticas ... que podem ser modeladas e analisadas a partir de grafos. Grafos particulares, chamados árvores, são usados frequentemente na resolução de problemas de probabilidades e na representação da prioridade das operações nas expressões algébricas (p. 212)
- ◆ (...) O pensamento recursivo aplica-se também em muitos contextos geométricos. Por exemplo, para determinar o número máximo de regiões que são designadas no plano por n rectas, não paralelas duas a duas e que se intersectam em pontos diferentes ... (p.213)

Em Portugal a preocupação em torno da Matemática Discreta também já se faz sentir há algum tempo.

Paulo Abrantes (1994) refere que para as *Normas*, a Matemática Discreta diz respeito às propriedades de conjuntos e sistemas numeráveis, e o seu estudo é indispensável no mundo do processamento da informação e na resolução de problemas que envolvam métodos computacionais. O NCTM argumenta que " os computadores são essencialmente máquinas finitas e discretas" que vêm exercendo uma influência crescente nos modos de criar e usar a Matemática.

Sendo dois dos objectivos gerais dos programas de ensino a preparação para a vida activa e aprender a aprender acreditamos que a introdução da Teoria dos Grafos nos programas de ensino teria vantagens atendendo:

- ◆ às suas aplicações em diferentes áreas do saber
- ◆ ao seu potencial para desenvolver aspectos como a visualização de situações e a esquematização de raciocínios
- ◆ a que é um extraordinário meio de comunicação
- ◆ a que desenvolve capacidades lógicas e de precisão bem como destrezas manuais

A importância crescente de problemas matemáticos relacionados por exemplo com questões de trânsito ou de negócios, que implicam tomada de decisões leva-nos a considerar que os grafos devem ser um dos tópicos a ser integrados nos programas de Matemática. Estes constituem uma boa ferramenta para conceptualizar situações, para entender esquemas e transferi-los para novas situações para além de exigirem poucas destrezas numéricas e de cálculo. Permitindo trabalhar conceitos numéricos e operações básicas. não exigem muitos conhecimentos nem técnicas matemáticas, o que pode levar a que um maior número de alunos os discutam sem dificuldades.

São apresentadas seguidamente um conjunto de problemas, sob o nome de Grafolândia, que poderão ser discutidos com os alunos de qualquer grau de ensino desde que possuam os conhecimentos básicos necessários sobre grafos

Houve o cuidado de escolher os problemas que pareceram mais aliciantes e ao mesmo tempo que abarcassem uma variedade apreciável de tópicos, a saber:

- ◆ Grafos
- ◆ Árvores
- ◆ Euler e Hamilton
- ◆ Colorir um grafo
- ◆ Colorir regiões
- ◆ Algoritmos

Com este tipo de actividades os alunos devem ter oportunidade de expressar as suas ideias e desenvolvê-las ao resolver os problemas. Estes devem justificar e provar as suas afirmações sempre que possível.

A estrutura é a seguinte: cada actividade escolhida é apresentada com :

- uma folha com a descrição da situação a apresentar aos alunos;
- uma folha para o professor com os conceitos chave e a respectiva resolução

As diferentes situações podem ser resolvidas individualmente (I) ou em grupo (G) embora no final os alunos devam confrontar as suas conjecturas, justificações, resultados com o grupo turma.

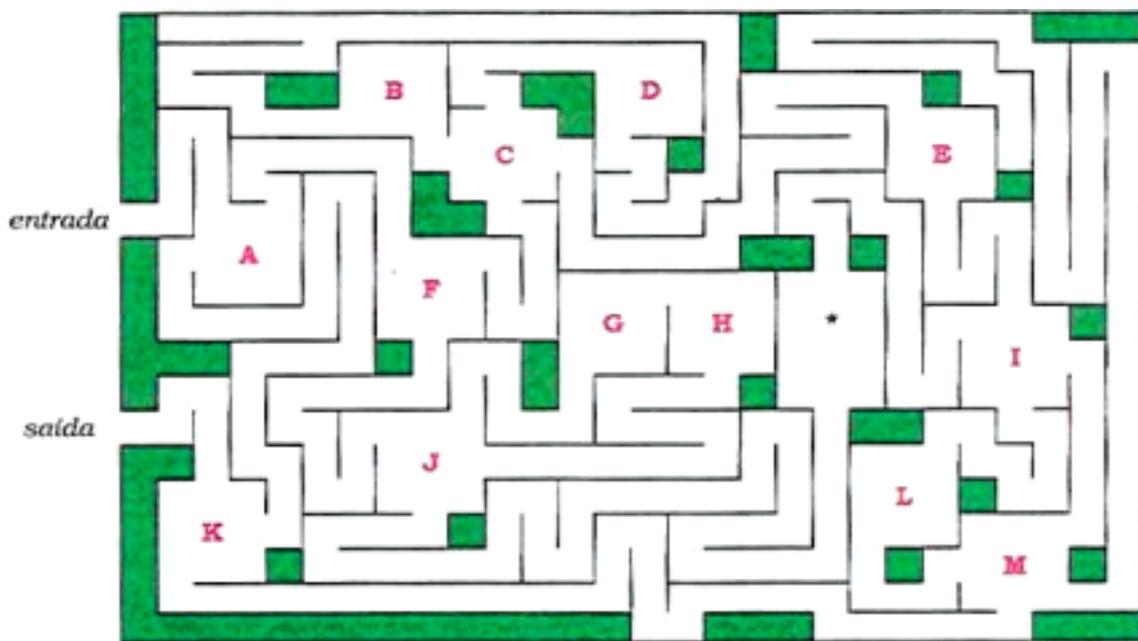
A sequência das actividades foi feita segundo uma lógica pessoal do momento da construção desta apresentação. Também os conceitos chave e as propostas de resolução são apenas sugestões que cada professor poderá alterar.

O importante é que se compreenda que o professor tem um papel fundamental na planificação destas situações. Deve ponderar qual o peso que devem ter no cômputo das actividades da turma e a frequência com que devem surgir, os objectivos a atingir, o nível etário e o desenvolvimento matemático dos alunos.

GRAFOLÂNDIA

Actividade I

Encontra um caminho até ao centro representado por *, e a respectiva saída



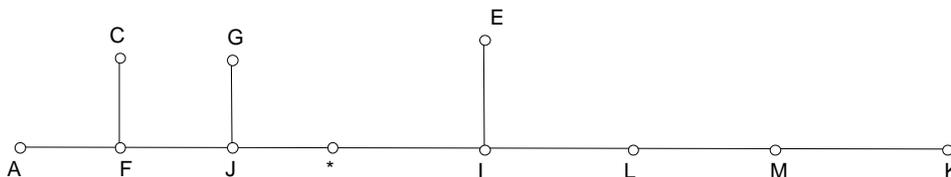
Actividade I (Folha do Professor)

Conceitos Chave:

- ◆ vértices
- ◆ arestas
- ◆ grafos (definição)

Resolução: (I)

A situação apresentada pode ser resolvida recorrendo a uma representação em grafo:



Em que os vértices representam as salas do labirinto, e as arestas unem duas dessas salas quando é possível chegar de uma a outra.

A solução da situação proposta será então :

Entrar em A,
chegar ao centro *
e sair em K
ou seja , fazer o percurso :
A F J * I L M K

Actividade II

Pretendemos ligar três casas **A**, **B** e **C**, a três utilitários, gás (**g**), água (**a**) e electricidade (**e**). Por razões de segurança convém que as ligações não se cruzem. Quantas ligações terão de ser feitas?



A



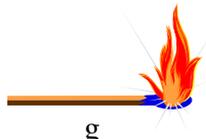
B



C



a



g



e

Actividade II (Folha do Professor)

Conceitos Chave:

- ◆ vértices
- ◆ arestas
- ◆ grafos (definição)
- ◆ vértices adjacentes
- ◆ vértices incidentes
- ◆ Grau de um vértice
- ◆ Grafo regular
- ◆ Grafo completo
- ◆ Grafo bipartido
- ◆ Grafo planar

Grau de um vértice é igual ao número de arestas nele incidentes

Grafo Regular é aquele em que todos os vértices têm o mesmo grau

Grafo Completo é aquele em que todos os vértices são adjacentes.

Um grafo G diz-se um *Grafo Bipartido* se o conjunto dos seus vértices admitir uma partição $\{V_1, V_2\}$ de tal maneira que toda a aresta de G une um vértice de V_1 e um vértice de V_2

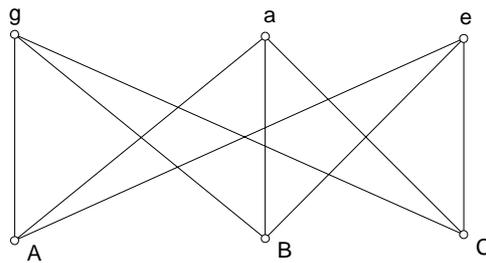
Um *Grafo Planar* é um grafo que pode ser desenhado no plano de forma a que as arestas não se cruzem

Resolução: (I)

Representação em grafo:

Vértices: A, B, C, g, a, e

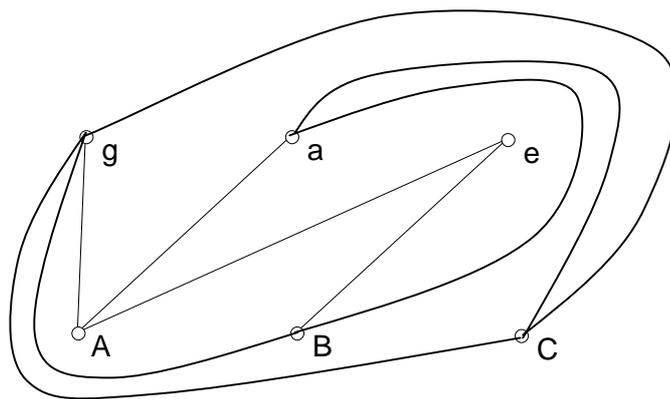
Arestas: Ag, Aa, Ae, Bg, Ba, Be, Cg, Ca, Ce



Trata-se de um grafo regular : todos os vértices têm grau 3

É bipartido, basta considerar a partição $V_1 = \{ A, B, C \}$
 $V_2 = \{ g, a, e \}$

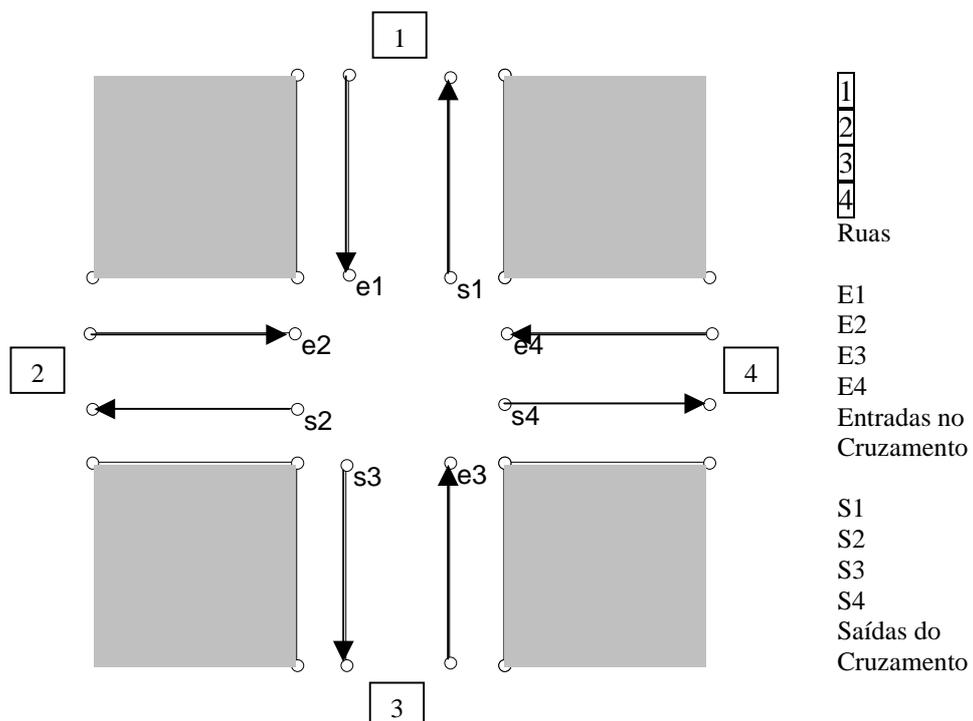
É planar porque, embora tenha sido desenhado com as arestas a intersectarem-se, pode ser desenhado sem que tal aconteça :



Actividade III

A regulação do tráfego automóvel, em cruzamentos, por semáforos, parte do princípio de que o fluxo de circulação de veículos procedente de ruas distintas não se intercepta ao confluir para o cruzamento. Esta situação é representada por um esquema de pontos e linhas. Os pontos mostram a saída dum cruzamento (e a chegada ao mesmo) enquanto que as linhas indicam o(s) sentido(s) de possíveis circulações entre as entradas e saídas do cruzamento.

Regula com semáforos a circulação automóvel de modo a evitar colisões num cruzamento com dois sentidos e possibilidade de virar à esquerda e à direita. Não é permitido fazer uma volta de 180°.



Actividade III (Folha do Professor)

Conceitos Chave:

Subgrafo

Grafo dirigido

Grafos isomorfos

Um grafo G' diz-se um *Subgrafo* de um grafo G se o conjunto dos vértices e o conjunto das arestas de G' são subconjuntos do conjunto de vértices e do conjunto de arestas, respectivamente, de G

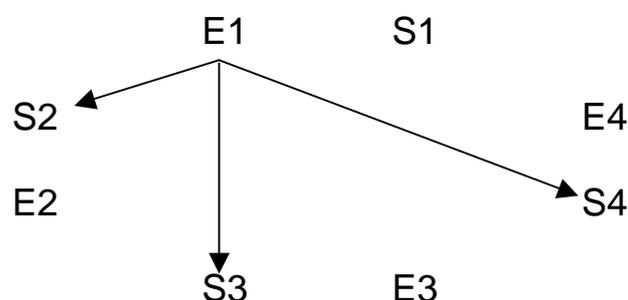
Dois Grafos G_1, G_2 , dizem-se *Isomorfos* se existe uma bijecção entre os conjuntos dos vértices dos dois grafos, preservando a adjacência desses vértices, ou seja, se dois vértices são adjacentes em G_1 , as suas imagens pela referida bijecção são adjacentes em G_2 .

Um *Grafo Dirigido* é um grafo em cujas arestas é definido um sentido

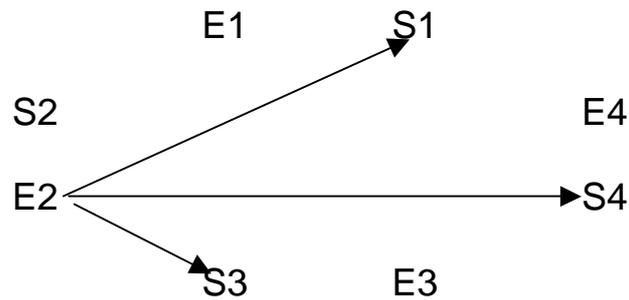
Resolução: (G)

Primeiramente exploramos várias situações :

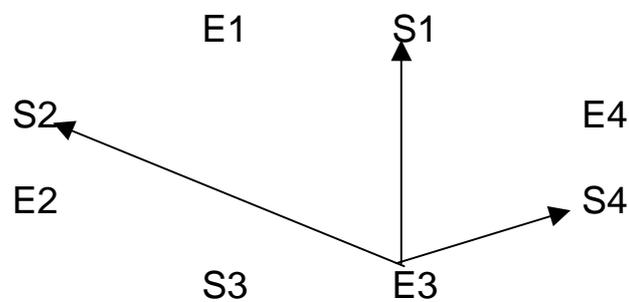
1- Quando o grafo da Rua 1 está verde (supondo que todos os outros estão vermelhos, nesse caso) temos :



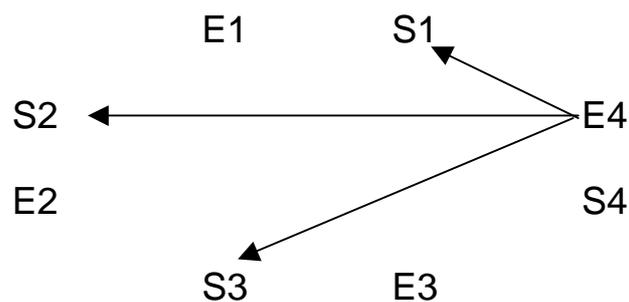
2- Quando o grafo da Rua 2 está verde (supondo que todos os outros estão vermelhos, nesse caso) temos :



3- Quando o grafo da Rua 3 está verde (supondo que todos os outros estão vermelhos, nesse caso) temos :



4- Quando o grafo da Rua 4 está verde (supondo que todos os outros estão vermelhos, nesse caso) temos :



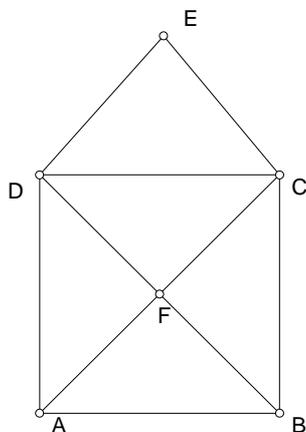
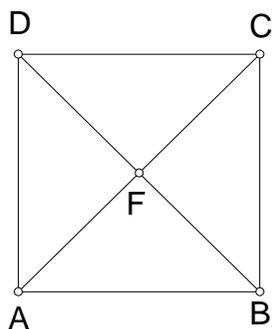
Cada situação é um subgrafo da situação global que representa todas as possibilidades de deslocamento no cruzamento em causa.

Em cada situação os grafos subjacentes ao grafos dirigidos (supondo que as arestas deixam de ter um sentido), são isomorfos aos restantes

Há a possibilidade de decompor os doze trajectos num menor número de situações. Esse será um desafio que poderá verificar no ar : qual o número mínimo de situações a considerar, na organização dos semáforos, neste cruzamento ? ...

Actividade IV

Sabes repetir as seguintes figuras sem levantar o lápis do papel, sem repetir duas vezes a mesma linha mas passando por todas?



Actividade IV (Folha do Professor)

Conceitos chave:

- ◆ Grau de um vértice
- ◆ Passeio – sequência de vértices, possivelmente não todos distintos
- ◆ Trilho – passeio sem repetição de arestas
- ◆ Caminho – passeio sem repetição de vértices
- ◆ Ciclo ou Circuito Fechado – caminho, com pelo menos três arestas, em que o primeiro vértice é igual ao último
- ◆ Grafo dirigido
- ◆ Grafo orientado
- ◆ Grafo conexo
- ◆ Grafo de Euler
- ◆ Circuito de Euler
- ◆ Teorema de Euler

Um *Grafo Orientado* é um grafo dirigido que se obtém de um grafo simples orientando as respectivas arestas

Um grafo diz-se um *Grafo Conexo*, quando dados quaisquer dois dos seus vértices existe sempre um passeio que os une.

Um grafo G é *Euleriano* se existir um circuito fechado que contenha todas as arestas de G . Tal circuito chama-se circuito *Euleriano*.

Teorema de Euler: Um grafo G é *Euleriano* se, e só se, todos os vértices têm grau par.

Resolução: (I)

A primeira figura é impossível de resolver porque não se pode encontrar um circuito Euleriano.

A segunda é possível e um percurso poderá ser :

A → D → C → B → D → E → C → A → B.

Esta situação pode servir de introdução ao problema seguinte - As pontes de Königsberg.

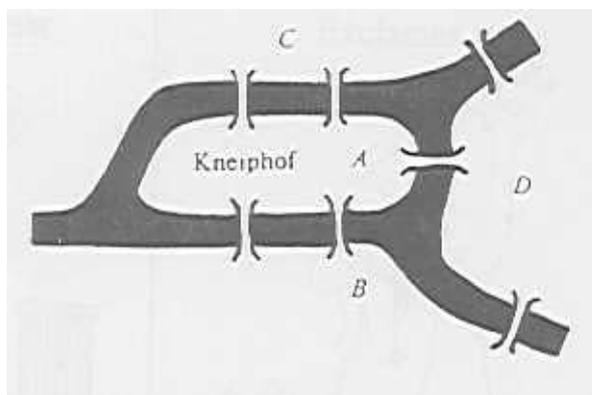
Actividade V

(a) - "A um ocioso de uma cidade alemã, Königsberg, ocorreu um dia uma estranha e inútil pergunta, cujo único interesse parecia residir na dificuldade em lhe responder: poderia ele planejar um passeio que cruzasse as sete pontes sobre o rio Pregel, que uniam as diversas zonas da cidade e a ilha situada ao meio? A pergunta correu de boca em boca e de cabeça em cabeça sem resposta, até que veio a pousar sobre a de Euler. Ali aninhou e, depois de um período de incubação, deu nascimento a um dos ramos importante da matemática: a topologia".

A questão é a seguinte:

Na cidade de Königsberg, na Prússia, há uma ilha chamada Kneiphof, rodeada por dois braços do rio Pregel. Há sete pontes, A, B, C, D, E, F e G, que cruzam os dois braços do rio. A questão consiste em determinar se uma pessoa pode realizar um passeio de maneira a cruzar cada uma das pontes exactamente e apenas uma só vez.

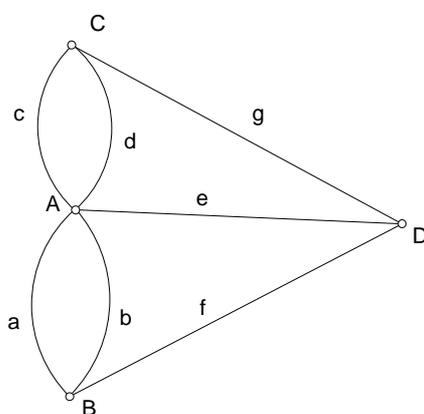
Por onde começar? Pensa e observa.



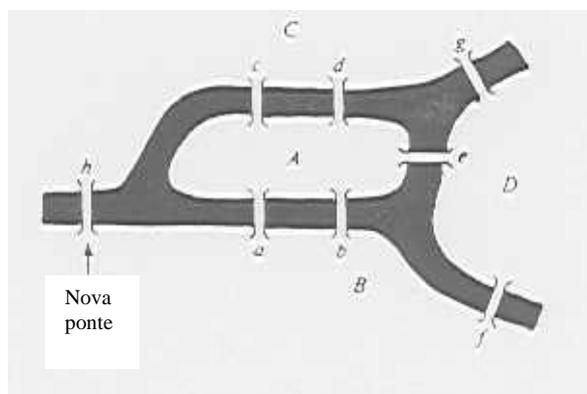
Conseguiste? Não? Não desanimes!
Tenta a situação seguinte.

(b) - No problema anterior há muitos aspectos que são completamente desnecessários. Por exemplo, que a ilha seja maior ou mais bonita, que as pontes sejam mais estreitas ou não, rectas ou curvas, mais compridas ou mais curtas. O importante é o esquema, o que as pontes unem e como se comportam entre si. Em suma, o importante é:

Pode-se fazer o seguinte desenho de um só traço sem repetir nenhuma linha?



E se houvesse mais uma ponte, como resolverias?



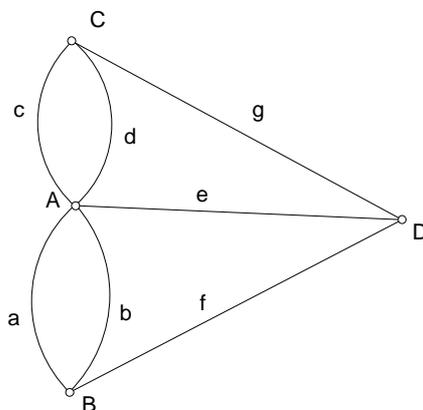
Actividade V (a) (Folha do Professor)

Conceitos chave:

- ◆ Grau de um vértice
- ◆ Caminho
- ◆ Passeio
- ◆ Ciclo ou Circuito Fechado
- ◆ Grafo dirigido
- ◆ Grafo orientado
- ◆ Grafo conexo
- ◆ Grafo de Euler
- ◆ Circuito de Euler
- ◆ Teorema de Euler

Resolução: (G)

Os alunos devem começar por fazer o diagrama e fazer o mesmo que na situação IV.



Verificarão que o problema é impossível porque não se consegue encontrar um circuito Euleriano.

Com efeito, em 1736, Euler mostrou que era impossível encontrar um tal circuito.

É condição necessária, para existir um **circuito Euleriano**, que todos os vértices tenham grau par ou que todos os vértices tenham grau par, excepto dois, que serão de grau ímpar e constituirão o ponto de partida e o ponto de chegada.

Actividade V (b) (Folha do Professor)

OBS: Esta actividade só deve ser dada aos alunos no caso destes não terem conseguido resolver a anterior.

Conceitos chave:

- ◆ Grau de um vértice
- ◆ Caminho
- ◆ Passeio
- ◆ Ciclo
- ◆ Circuito fechado
- ◆ Grafo dirigido
- ◆ Grafo orientado
- ◆ Grafo conexo
- ◆ Grafo de Euler
- ◆ Circuito de Euler
- ◆ Teorema de Euler

Resolução da primeira parte: (I)

Impossível tal como foi visto na actividade anterior.

Resolução da segunda parte: (I)

Como A e D são os únicos vértices de grau ímpar a sua resolução já é possível. Um passeio poderá ser:

A → B → A → C → A → D → B → C → D
atravessando as pontes pela seguinte ordem:
a b c d e f h g.

LABIRINTOS:

Hoje em dia vemos os **labirintos** como quebra-cabeças, mas antigamente estes estavam associados a mistério, perigo e confusão. Era frequente construírem-se **labirintos** para a defesa das fortalezas. Os invasores eram obrigados a andar grandes distâncias ficando assim expostos a um ataque.

Num **labirinto**, um dos principais objectivos é encontrar um caminho desde o princípio até ao fim. Geralmente isto acontece depois de se dar muitas voltas, de becos sem saída, de caminhos repetidos. Na maior parte das situações temos de encontrar um só caminho ou o caminho mais curto.

A **Teoria dos Grafos** é o ramo da matemática que estuda os **labirintos** como uma rede ou seja os problemas podem ser resolvidos utilizando diagramas de vértices e arestas.

No fim do século XIX pôs-se a questão "Como escapar de um **labirinto**". Euler mostrou que poderia fazer um grafo partindo do mapa do **labirinto**. Nesse grafo indicaria as diferentes hipóteses em cada cruzamento pelo que para encontrar a saída bastaria encontrar um circuito de Euler.

Vomos agora a fazer uma viagem pelo mundo dos labirintos. Eis alguns exemplos:

Parte do fascínio dos labirintos consiste em tentar descobrir quando e onde surgiram.

EXEMPLO 1:

A lenda de Teseu, do Minotauro e do labirinto subterrâneo existente por baixo do palácio de Minos em Cnosso é bem conhecida. Padrões sinuosos e em forma de labirinto sempre foram sinal de boa sorte. Os Romanos usavam-nos nos mosaicos como motivo favorito.

Este é um desenho do labirinto que foi descoberto no Palácio de Cnosso



EXEMPLO 2:

Este é o desenho tradicional dum labirinto encontrado numa moeda cunhada em Creta no ano 67 a. C. Por toda a Europa têm sido descobertos desenhos idênticos a este.



EXEMPLO 3:

Este labirinto foi encontrado numa manta dos Índios Navajos



LABIRINTOS EM IGREJAS:

Os primeiros labirintos foram construídos em igrejas góticas no século XII, no Norte de França. Estes eram construídos num pavimento plano, normalmente riscado na nave da igreja, ou por vezes gravado numa parede.

Embora sejam muitos não se sabe bem quais as razões da sua existência. Acredita-se que tenha a ver com as muitas voltas por que passa a vida de uma pessoa antes de atingir a eternidade.

Eis alguns exemplos.

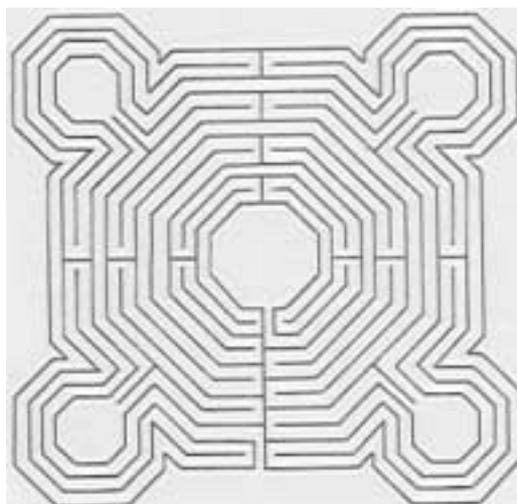
EXEMPLO 1:

O maior e mais famoso labirinto em igrejas é o da Catedral de Chartres, Norte de França, em 1220 d. C. construído com pedras azuis e brancas e com um diâmetro de 12 m. Este labirinto tem características interessantes. As quatro partes simétricas simbolizam a cruz cristã.



EXEMPLO 2:

O labirinto de Reims , apresentado em baixo, foi destruído em 1779, devido ao barulho que as crianças faziam ao correrem sobre ele durante os serviços religiosos.



EXEMPLO 3:

O labirinto seguinte já não existe, mas crê-se que devia pertencer ao chão da Catedral de Poitiers. Este obrigava a que se saísse pelo sítio por onde se tinha entrado, mas podiam dar-se muitas voltas antes de se conseguir sair.



LABIRINTOS DE SEBES

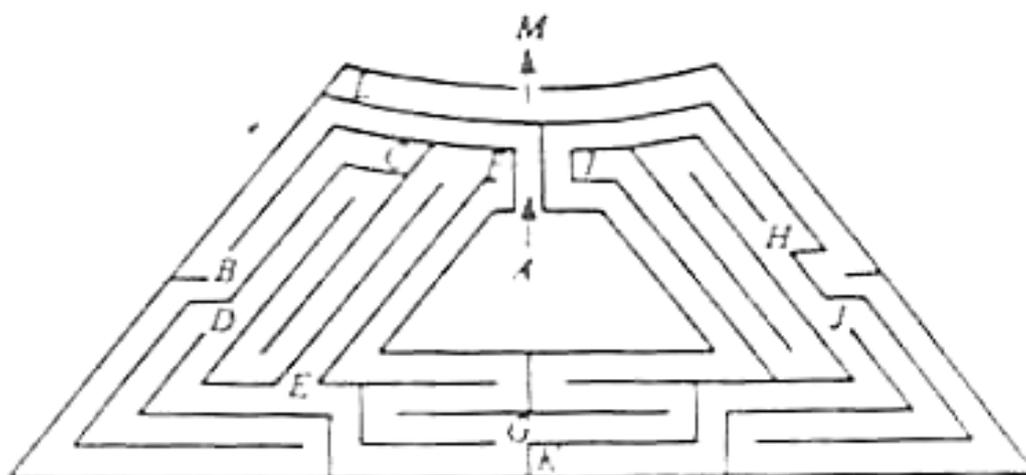
O labirinto de sebes mais famoso encontra-se em Inglaterra, nos terrenos do Palácio Real de Hampton. O seu percurso completo tem cerca de 3/4 de um quilómetro.



O labirinto de Hampton:

Actividade VI

Tenta encontrar um trajecto para sair do labirinto de Hampton, supondo que estás em A.



Actividade VI (Folha do Professor)

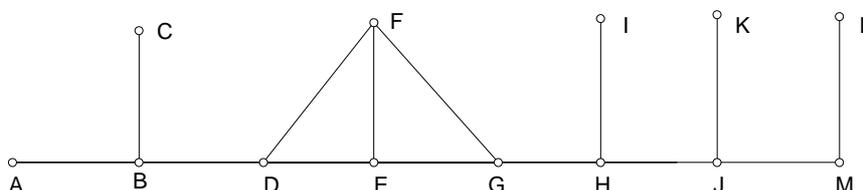
Conceitos Chave:

- ◆ Grafo de Euler
- ◆ Circuito de Euler
- ◆ Teorema de Euler

Resolução: (G)

A partir do mapa do labirinto podemos fazer o seu grafo. Como neste estão indicadas as várias hipóteses em cada cruzamento para encontrar a saída basta encontrar um circuito de Euler.

O grafo do labirinto:



Para sair do centro A do labirinto e chegar à saída M basta seguir o circuito ABDEGHJM, ignorando as outras passagens.

Actividade VII

Em qualquer trabalho de detective para que uma investigação seja eficaz, os resultados devem estar organizados de forma clara pois assim podes retirar novas pistas.

Também poderás encontrar pistas que aparentemente não te conduzem a sítio nenhum. Se tal acontecer guarda a ideia para outra ocasião pois poderá vir a ser útil.

Então agora, que tal serem "Watsons" num caso de assassínio?

Assassinato no Castelo de Ghastleigh

Era noite em Baker Street 221-B.

Holmes tocava uma ária Irlandesa no seu violino quando fui forçado a interrompê-lo.

Watson - Holmes, acabamos de receber uma carta que descreve um assunto urgente.

Holmes - Por favor leia-ma, Watson.

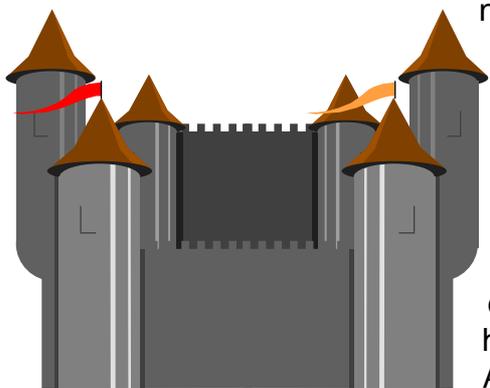
Watson - O remetente é o Castelo de Ghastleigh em Grimly Sinister:

"Caro Senhor Holmes,

Houve um terrível assassinato. A senhora Melpomene Beetroot foi morta à "cacetada" com um candelabro. A polícia está confusa. Por favor ajude-nos a resolver este horrível crime.

Ornelian, Duque de Ghastleigh."

Holmes - Watson, não temos tempo a perder. Faça as nossas malas e chame uma carruagem para levar-nos à estação. Um crime tão singular testará a nossa perspicácia até ao limite, não tenho dúvidas.



Chegando à aldeia de Grimly Sinister, Holmes e eu podíamos ver o Castelo de Ghastleigh. O velho castelo era composto por 46 torres distribuídas em 3 círculos concêntricos com uma única torre no centro. Estavam ligadas entre si por caminhos estreitos sobre os quais existiam várias histórias.

A única entrada visível ficava no extremo de uma ponte levadiça que dava para a torre mais a oeste. Fomos recebidos à

entrada pelo mordomo, que se apresentou como Dunnnett. Levou-nos através de uma escada de caracol e ao longo de um caminho estreito até uma torre vizinha, onde fomos recebidos pelo Duque de Ghastleigh.

Duque - Oh! Senhor Holmes, (exclamou). Eu não tenho palavras para lhe agradecer.

Holmes - Não é necessário agradecimentos.

Duque - O assassino da senhora Beetroot ocorreu no seu quarto. Deseja inspeccioná-lo?

Holmes - Dentro de um momento, Vossa Excelência. Primeiro preciso enviar um telegrama.

Duque - Dunnnett tratará disso, senhor Holmes. Esperamos por ele, não deve demorar. (Nesse instante entrou o mordomo). Por favor sigam-me, senhores. Cada torre do Castelo de Ghastleigh é formada por um único quarto, e cada uma é habitada por um dos membros sobreviventes da linha de Ghastleigh. (Entraram na torre da senhora Beetroot). Isto é onde a traiçoeira morte se deu. Existia um grande candelabro no centro do tecto do quarto, mas o assassino provocou a sua queda de alguma forma, e a pobre Melpomene estava a dormir debaixo dele.

Watson - Quem encontrou o corpo?

Dunnnett - Fui eu, senhor. O que restava dele, senhor.

Watson - Então você foi a última pessoa a ver a senhora Beetroot viva?

Dunnnett - Sem contar com o assassino, sim.

(Reparei que Holmes estava a inspeccionar o quarto com a sua lupa, parou e ouviu-me atentamente).

Holmes - Receio que não vamos encontrar pistas aqui, Watson. A polícia inspeccionou-o minuciosamente. (com olhar fixo, perguntou). A que torre conduz esta porta?

Dunnnett - À torre da duquesa de Amaranth.

Watson Pode ser ela o assassino?

Duque - Dunnnett tem o único conjunto de chaves, têm um desenho muito complicado e original, e acredito que seria impossível para qualquer pessoa fazer duplicados. Mas em qualquer caso, a duquesa é demasiado surda e passa a maior parte do tempo a dormir.

Holmes - Estava toda a gente no seu quarto, ou no quarto dela, na noite do crime?

Duque - Quase todos. Todos os meus familiares recolhem aos seus quartos à noite como está escrito no testamento do meu avô. O primeiro duque tinha muito receio da solidão, então o seu testamento manda que cada descendente seu passe todas as noites no castelo, caso contrário perde o direito à sua parte na fortuna da família.

Dunnnett - Isso está correcto, senhor. Todas as noites faço um turno verificando cada torre e tranco todas as portas de comunicação. Todas as manhãs eu faço as minhas rondas outra vez e destranco todas as portas de ligação. Nessa manhã terrível, bati na porta da senhora Beetroot. Não obtive resposta. Fiquei preocupado e abri a porta. Foi quando vi os ... seus restos mortais.

Holmes - e ninguém entrou ou saiu do Castelo de Ghastleigh durante a noite?

Dunnett - Não, senhor. Nunca, senhor. O único caminho de saída é passando através das torres vizinhas até à torre de entrada onde passo todas as noites. Posso confirmar que ninguém entrou ou saiu.

Holmes - E todos os residentes estavam de boa saúde quando os fechou à chave?

Dunnett - Sim, senhor. Todos têm campainhas de chamada nas suas torres, senhor, e depois das portas fechadas tocam para confirmarem as suas presenças ao Duque.

Duque - Uso as campainhas para confirmar que estão a cumprir o testamento. Dunnett está correcto. Mantenho uma severa disciplina, e todas as campainhas tocaram.

Watson - Mas um intruso poderia facilmente tocar a campainha.

Duque - Não Dr. Watson. Cada residente tem um código pessoal, conhecido apenas por ele ou ela e por mim.

Holmes - Dunnett, entrou nalguma torre mais do que uma vez?

Dunnett - Oh não, Senhor Holmes. Eu entro apenas uma vez em cada torre quando faço a ronda - é uma regra inviolável. Nunca ninguém é perturbado depois das portas estarem fechadas.

(Holmes tentou uma outra linha de inquérito).

Holmes - Vossa Senhoria, a polícia encontrou o tempo estimado da morte?

Duque - Isso é impossível de dizer, senhor Holmes, devido ao estado do corpo. A partir da temperatura do sangue, estimaram que provavelmente foi antes da meia noite.

Holmes (arqueou a sobancelha) - Existe alguma maneira de alguém passar entre as torres sem utilizar os caminhos.

Duque - Um montanhista experiente pode talvez escalar as paredes a partir do solo. Mas, senhor Holmes, ele nunca poderia fazê-lo de noite. A família de Ghastleigh é muito minuciosa na segurança. O último acto do Dunnett nas suas rondas nocturnas é libertar uma matilha de cães no pátio do castelo.

Um rapaz do correio chega à entrada com um telegrama para Holmes (sem dúvida uma resposta ao seu telegrama). Depois de ler, vi os seus olhos ficarem semi-fechados

Holmes - Qual a rota que costuma fazer nas suas rondas, Dunnett?

Dunnett - Isso varia, senhor.

Holmes - Lembra-se da rota que fez na noite do crime?

Dunnett - Não, senhor.

Holmes - Isso é lamentável. (abanando a cabeça). Watson, teremos de alugar quartos para esta noite. Não podemos fazer mais nada aqui.

Duque - Mas, senhor Holmes, o assassino

Holmes - Não disse, Vossa Senhoria, que não resolveria o crime. Eu estava apenas a dizer que a minha investigação aqui está completa. Dr. Watson e eu temos trabalho a fazer, e não tenho dúvidas que dentro em pouco tempo poderei indicar o nome do criminoso. Dunnett, por favor chame a carruagem.

Holmes e eu retiramo-nos para um confortável quarto na aldeia de Grimly Sinister.

Watson - Holmes, acredita mesmo no que disse o duque? Acerca da confirmação do nome do criminoso?

Holmes - Watson, desde quando eu desiludi um duque?

Watson - Mas, temos muito pouco até agora.

Holmes - Tontices, Watson! Recapitulemos os factos pertinentes. A senhora Beetroot foi morta antes da meia noite. Nenhum intruso poderia Ter entrado ou saído por causa dos cães. O assassino terá de ser um dos habitantes do castelo de Ghastleigh. Dunnnett fechou todos os seus habitantes nos seus quartos individuais, que assinalaram a sua presença ao duque. Dunnnett começou a ronda pela torre de entrada e voltou a ela, entrando em cada torre precisamente uma única vez.

Depois dos quartos estarem fechados, os únicos residentes que poderiam Ter entrado no quarto da senhora Beetroot sem serem vistos eram os seus vizinhos contíguos. Mas para o fazerem teriam de Ter uma chave, e Dunnnett possui o único conjunto de chaves. As chaves não podem ser copiadas. Quem, então, poderia Ter cometido o assassinato?

Watson - Uh, Oh! Pois claro! Ele poderia Ter voltado ao quarto depois da senhora Beetroot Ter assinalado a sua presença ao duque.

Holmes - Precisamente. O duque disse-nos que a duquesa de Amaranth, cujo quarto é adjacente, é surda que nem uma porta e dorme profundamente. Dunnnett poderia Ter esperado no quarto da duquesa até a senhora Beetroot tocar a campainha de sinalização e depois entrar novamente para matá-la.

Watson - Com um candelabro?

Holmes - Ele matou-a com outra arma, um tubo, talvez e depois arranjou o candelabro para este cair de modo a fazer desaparecer as pistas.

Watson - Uma teoria interessante.

Holmes - Mas ainda só uma teoria, Watson. Como poderemos provar que Dunnnett é o criminoso? A duquesa de Amaranth continuava a dormir quando ele regressou, e ele continuou a sua ronda como se nada se tivesse passado.

Watson - A queda do candelabro de certeza acordou alguém.

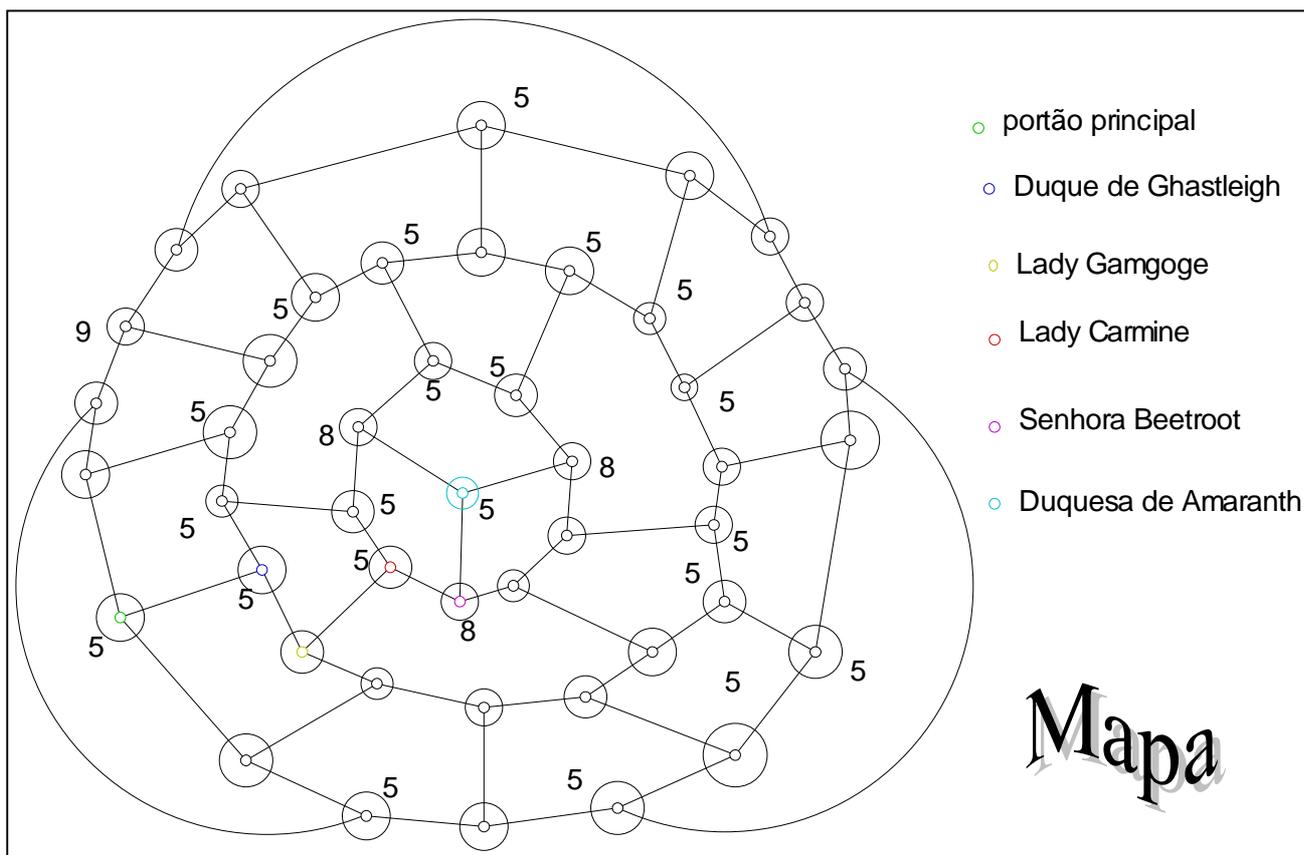
Holmes - As torres estão isoladas umas das outras. Não, não houve qualquer som.

Watson - Dunnnett atrasar-se-ia na sua ronda.

Holmes - Alguns minutos somente, se ele já anteriormente tivesse arranjado o candelabro de forma a desprender-se do tecto. Mas apenas o suficiente para não chamar a atenção.

Watson - Então fomos derrotados, Holmes! Não pode ser ninguém senão Dunnnett, no entanto o canalha está livre.

Holmes - De maneira nenhuma, Watson. Se a sorte estiver connosco, ele pode já estar condenado pela sua própria boca. (Deu-me para a mão um papel, onde estava o mapa de Ghastleigh). Watson, aqui está um simples puzzle para você.



Dunnett afirma que todas as noites, na sua ronda, entra em cada torre apenas uma e uma só vez. Ele não pode Ter-se movido de uma torre apenas uma e uma só vez. Ele não pode Ter-se movido de uma torre para outra sem ser pelos caminhos. Talvez você encontre a tal rota para min.

Watson - Certamente, Holmes, deve haver centenas de soluções.

E tu, concordas com Watson ou não?
Será Dunnett o assassino?

Actividade VII (Folha do Professor)

Conceitos Chave:

- ◆ Grau dum vértice
- ◆ Grafo de Euler
- ◆ Circuito de Euler
- ◆ Ciclos de Hamilton
- ◆ Número Cromático
- ◆ Coloração dum grafo utilizando arestas
- ◆ Snarks

Um grafo G é *Hamiltoniano* se existir um ciclo que contenha todos os vértices de G . Tal ciclo chama-se *Hamiltoniano*.

O *Número Cromático* de um grafo é o número mínimo necessário para colorir os seus vértices de forma que dois vértices adjacentes não possam ter a mesma cor.

O *Número Cromático das Arestas* de um grafo é o número mínimo de cores necessárias para colorir as arestas de G , de forma a que as arestas incidentes num mesmo vértice não possam ter a mesma cor

SNARK: Grafo cujo número cromático para as arestas é igual a quatro

Resolução: (G)

Dunnett não poderia ter passado por todos os caminhos uma única vez porque o grafo tem 69 arestas e 46 vértices todos de grau três, portanto não existe um circuito de Euler. Para ele existir tinha que ter no máximo dois vértices de grau ímpar. Também não era possível encontrar um circuito Hamiltoniano: *uma linha fechada que atravessasse as arestas visitando cada nó precisamente uma única vez*. Dunnett visitou duas vezes uma torre: a torre da senhora Beetroot.

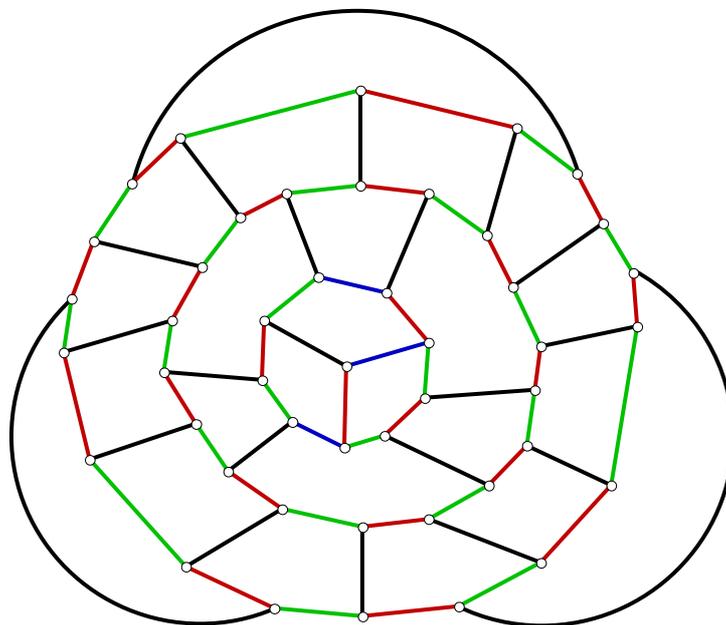
Conclusão: Dunnett mentiu.

Outra possibilidade de Resolução:

Colorir as arestas do grafo e ver se era um *snark*

De salientar que num *snark* não existem ciclos Hamiltonianos.

$\chi'(G) = 4$ é um *snark*, logo não existe um ciclo Hamiltoniano
(número cromático das arestas)



Conclusão: Como o grafo é um *snark*, não existe um ciclo Hamiltoniano. Logo Dunnett mentiu.

Actividade VIII

Pintar será Matemática?

Se pensas que sim propomos - te a seguinte actividade, se pensas que não, também...

Uma companhia industrial deseja armazenar sete diferentes produtos farmacêuticos C1, C2, ..., C7, mas alguns não podem ser armazenados juntos por motivos de segurança. A tabela seguinte mostra os produtos que não podem estar no mesmo local

Encontra o número mínimo de localizações necessárias para colocar estes produtos.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1		X				X	X
C2	X		X	X			
C3		X		X	X		
C4		X	X		X	X	
C5			X	X		X	X
C6	X			X	X		X
C7	X				X	X	

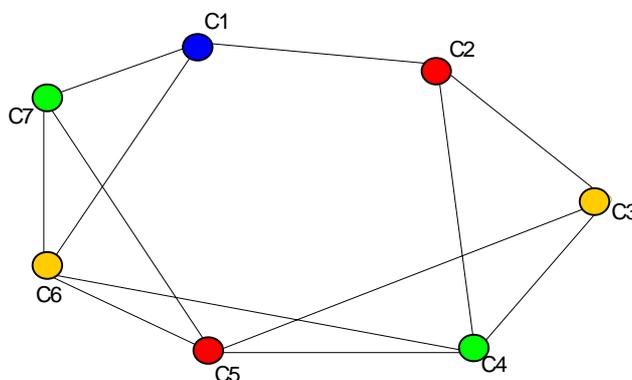
Actividade VIII (Folha do Professor)

Conceitos Chave:

- ◆ Vértices adjacentes
- ◆ Coloração dum grafo utilizando arestas
- ◆ Coloração dum grafo utilizando vértices
- ◆ Número cromático
- ◆ Snarks

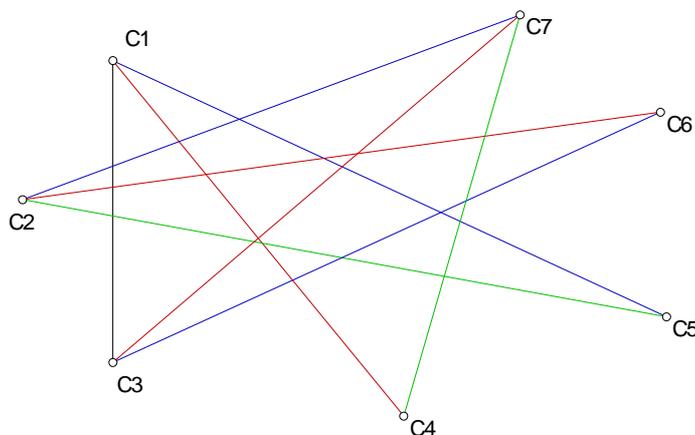
Resolução: (G)

Primeira maneira de resolver (coloração de vértices)



Resposta: C2C5, C3C6, C4C7, C1

Segunda maneira de resolver (coloração de arestas)



Resposta: C1C3, C2C5, C4C7, C6

Terceira maneira de resolver

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
C1	■		■	■	■		
C2		■			■	■	■
C3	■		■			■	■
C4	■			■			■
C5	■	■					
C6		■	■				
C7		■	■	■			

Resposta: C1C3, C2C5, C4C7, C6

Actividade IX

A herança do Califa de Bagdad

Em tempos que já lá vão, o califa de Bagdad tinha quatro filhos de quem muito gostava.

Para cada um deles mandou construir um palácio. O do filho mais velho, Abdul, ficou no terreno 1, o de Budal, no terreno 2, o de Cadaf, no 3 e o de Dubal, no 4, conforme se pode ver no mapa.



Antes de morrer, fez o testamento com indicações de como deviam ser distribuídas as suas ricas terras. Cada filho ficaria com o terreno onde tinha o seu palácio. Evidentemente, Abdul herdaria também o terreno 9, onde ficava situado o palácio do califa. Os restantes terrenos seriam distribuídos de modo que, no final, cada um ficasse com 5. Mas impôs uma condição a cada um dos filhos: os seus cinco terrenos não poderiam ter fronteiras comuns. Por exemplo, Cadaf não podia ficar com o terreno 19.

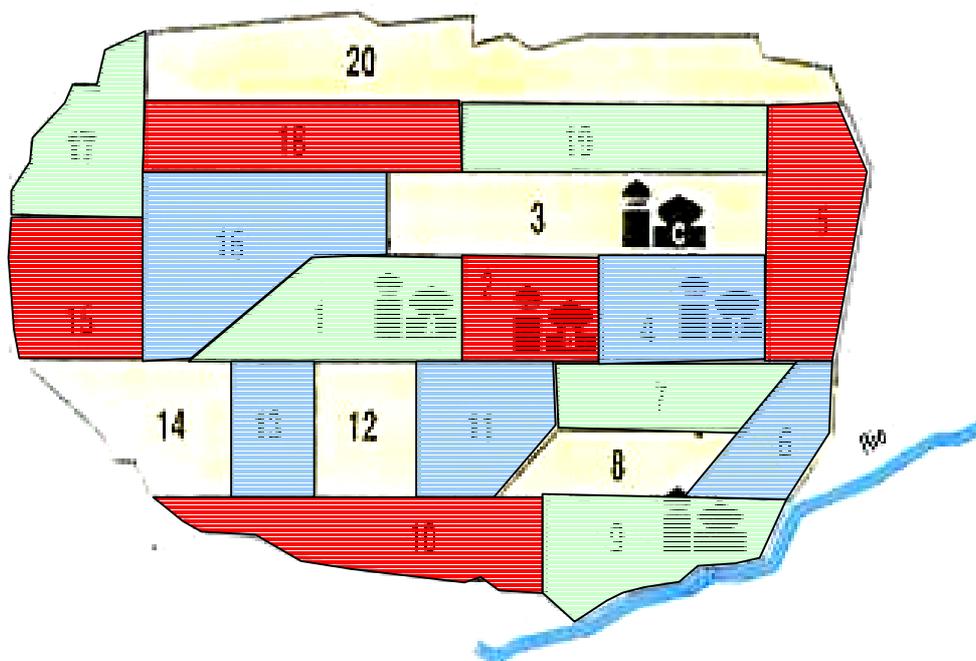
Como é que os irmãos dividiram as terras entre si?

Actividade IX (Folha do Professor)

Conceitos Chave:

- ◆ Grafo Planar
- ◆ Região
- ◆ Adjacência de regiões
- ◆ Coloração dum grafo utilizando arestas
- ◆ Snarks
- ◆ Coloração de regiões
- ◆ Teorema da 4 cores

Resolução: (G)



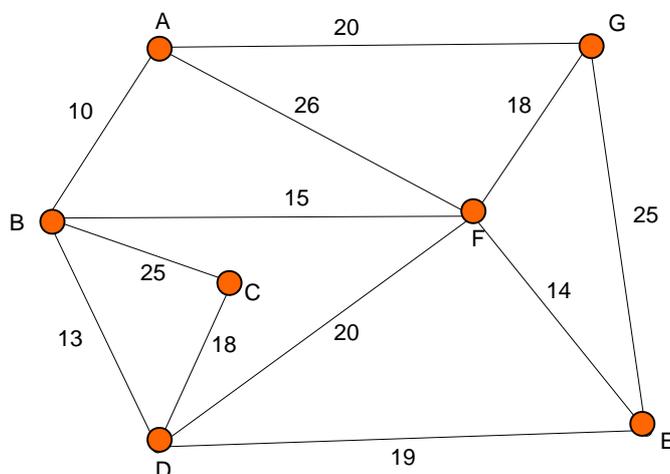
O professor pode aproveitar a ocasião para referir o *Teorema das 4 cores*, enunciando-o de forma simples :

Qualquer mapa de regiões, desenhado num plano pode ser colorido apenas com 4 cores de modo a que as regiões adjacentes (arestas comuns ou parcialmente comuns) fiquem com cores diferentes

Actividade X

E se fosses um vereador ?

Sete pequenas cidades no concelho de *Small County* estão unidas umas às outras, como podemos ver no grafo seguinte em que os vértices representam as cidades e as arestas as estradas. Os números junto a essas estradas indicam as distâncias em quilómetros. Todas as estradas estão tão degradadas que se tornaram praticamente intransitáveis. O concelho, que possui um orçamento muito limitado, quer pavimentar algumas estradas de forma que se possa ir de qualquer cidade para qualquer cidade só por estrada pavimentada, directa ou indirectamente. A autarquia quer minimizar o número total de quilómetros a pavimentar. Procura a rede de estradas a pavimentar que preencherá todos estes requisitos.



Actividade X (Folha do Professor)

Conceitos Chave:

- ◆ Grafo com arestas pesadas
- ◆ Árvore
- ◆ Árvore Geradora
- ◆ Árvore Geradora Mínima
- ◆ Algoritmo de Kruskal
- ◆ Algoritmo de Prim

Se a cada aresta de um grafo se associar um número natural, chamado *peso*, ficamos com um grafo “pesado”

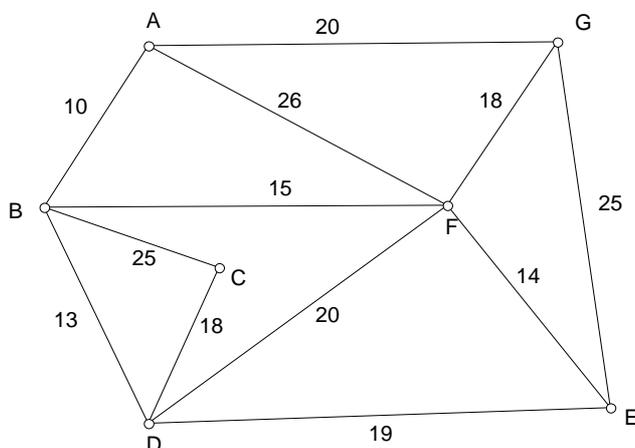
Árvore é um grafo conexo e sem ciclos.

Dado um grafo G , uma *Árvore Geradora* de G é um subgrafo G' de G tal que :
 G' é uma árvore e possui todos os vértices de G

Num grafo “pesado” G , a *Árvore Geradora Mínima* é uma árvore geradora de G para a qual é mínima a soma dos pesos das arestas envolvidas

Resolução: (G)

A solução deste problema passa por encontrar a árvore geradora mínima do grafo apresentado :



Existem muitas possibilidades de abordagem a este problema e os alunos deverão ser encorajados a partilhar o maior número possível.

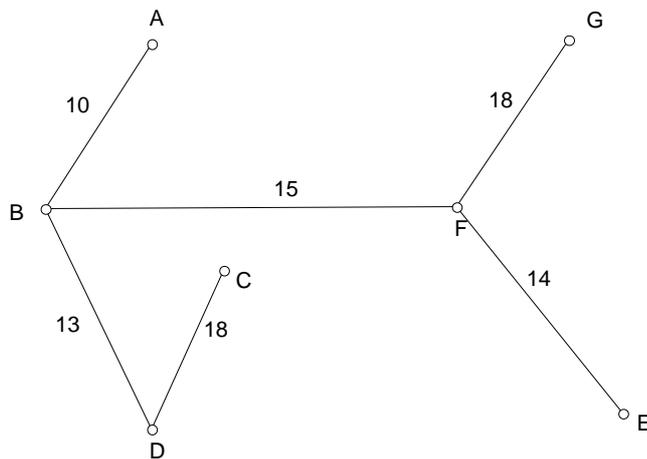
Apresentamos aqui dois exemplos que serão dos mais comuns, conhecidos por algoritmos de Kruskal e de Prim :

Pelo Algoritmo de Kruskal ou Algoritmo do Avarento :

- 1º - Escolher a aresta menos pesada : AB
- 2º - Das restantes escolher a aresta menos pesada : BD
- 3º - Continuar sucessivamente mas sem nunca escolher uma aresta que feche um ciclo.

Uma solução será então :

AB BD FE FB FG CD



Peso Total : 88

Pelo Algoritmo de Prim :

- 1º - Começar num vértice qualquer : o vértice A
- 2º - Ir para o “vizinho mais próximo” : B
- 3º - Daí para o “vizinho mais próximo” e assim sucessivamente até chegar ao último vértice

Obs. : Por vezes por este método pode chegar-se a um beco sem saída, que é o que acontece se começarmos em A :

De A para B – AB

De B para D – BD

De D para C – DC e não se pode continuar senão formamos um ciclo.

A solução para esta situação será :

- começar por outro vértice, ou

-
- modificando o método de forma a procurar em cada fase o vértice mais próximo de algum dos vértices já considerados (sempre sem criar ciclos).

Com esta última abordagem obteremos :

AB BD DC BF EF FG

Solução igual à anterior

CONTEÚDOS ABORDADOS :

1.1 Grafo

- ◆ Definição de grafo
- ◆ Grafo completo
- ◆ Grafo regular
- ◆ Grafo bipartido
- ◆ Grafo planar

1.2 Grau de um vértice Vértices adjacentes Arestas incidentes

1.3 Sub-grafo

1.4 Grafo isomorfo

1.5 Caminho Passeio Trilho Ciclo

1.6 Grafo dirigido Grafo orientado

2 Euler e Hamilton

- ◆ Grafo de Euler, Grafo de Hamilton
- ◆ Circuito Euleriano, ciclo Hamiltoniano
- ◆ Teorema de Euler

3 Colorir um grafo

- ◆ Vértices coloridos
- ◆ Número cromático
- ◆ Arestas coloridas
- ◆ *Snarks*

4 Colorir regiões em grafos (eventualmente Teorema das 4 Cores)

5 Árvores e Algoritmos : Kruskal e Prim

BIBLIOGRAFIA

Benarroch, Moisés Coriat et al. (1989). *Nudos Y Nexos: Redes en la escuela*. Madrid: Editorial Sintesis

Chartrand, Gary (1977). *Introductory Graph Theory*. Nova Iorque: Dover Publications Inc.

Gardner, Martin (1990). *Ah, descobri!*. Lisboa: Gradiva - Publicações

Gouveia, Maria Teresa A. H. (1998). *Teoria dos grafos: Currículo alternativo para a disciplina de Métodos Quantitativos*. Dissertação de Mestrado. Porto: Universidade Portucalense - Infante D. Henrique.

Guzman, Miguel (1991). *Contos com contas*. Lisboa: Gradiva - Publicações

Guzman, Miguel (1990). *Aventuras Matemáticas*. Lisboa: Gradiva - Publicações

Langdon, Nigel e Snape, Charles. (1993). *Viva a Matemática*. Lisboa: Gradiva – Publicações

National Council of Teachers of Mathematics (1991) *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional

National Council of Teachers of Mathematics (1994) *Normas Profissionais para o Ensino da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional

Pappas, Theoni (1998). *Fascínios da Matemática*. Lisboa: Editora Replicação

Snape, Charles e Scott, Heather. (1995). *Labirintos Matemáticos*. Lisboa: Gradiva – Publicações

Veloso, E. e Viana, J.P. (1991). *Desafios. Um ano de problemas no Público*. Porto: Edições Afrontamento

Veloso, E. e Viana, J.P. (1992). *Desafios 2. 52 problemas matemáticos no Público*. Porto: Edições Afrontamento

Veloso, E. e Viana, J.P. (1995). *Desafios 4. Problemas e Histórias da Matemática no Público*. Porto: Edições Afrontamento

Veloso, E. e Viana, J.P. (1996). *Desafios 5. Problemas e Histórias da Matemática no Público*. Porto: Edições Afrontamento